高等院校应用型特色教材

大学数学（下册）

韩建玲 曾健民 主 编
陈特清 廖晓花 副主编
孙德红 石莲英

清华大学出版社

高等院校应用型特色教材

大学数学（下册）

韩建玲 曾健民 主编
陈特清 廖晓花 副主编
孙德红 石莲英

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书分 8 章，内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学及其应用、微分方程、无穷级数、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、多维随机变量及其分布，以及数理统计. 书后还附有习题答案、t 分布表和 ^{2} 分布表.

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类各专业的公共数学课. 本书还配套有学习辅导书，便于学生学习使用.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 下册/韩建玲，曾健民主编. —北京：清华大学出版社，2012.1
ISBN 978-7-302-27869-6

Ⅰ. ①大…　Ⅱ. ①韩… ②曾…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 282618 号

责任编辑：孟毅新
责任校对：李　梅
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京密云胶印厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　　**印　张**：14　　**字　　数**：321 千字
版　　次：2012 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 1 月第 1 次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：28.00 元

产品编号：041360-01

前言

FOREWORD

随着我国社会、经济的发展，为了适应应用型高等数学教育的教学改革和教材建设的需求，我们特地组织了一批有丰富教学经验的教师编写了本书. 本书以应用、实用和适用为基本原则，淡化理论并突出实践. 在本书的编写过程中，我们结合应用型本科和高职高专的特点，对比较烦琐的定理、公式的推导和证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明；对例题的选择由浅入深，讲述尽可能深入浅出，力求具有一定的启发性和应用性.

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学，大学数学是应用型本科和高职高专学生的一门必修课，不但对发展学生逻辑思维能力和空间想象能力有不可替代的作用，而且在其他领域与学科中也发挥着十分重要的作用. 大学数学是一门非常重要的基础课，不但内容丰富、理论严谨，而且应用广泛、影响深远，可为学习后继课程和进一步扩大知识面奠定必要的基础，帮助学生培养综合利用所学知识分析问题和解决问题的能力，增强学生的自主学习能力和创新能力. 所以编写一本适合的应用型大学数学教材是一项十分有意义的工作.

在本书的编写过程中，我们参考了大量的同类图书，特别是参考了一些典型例题和习题，它们是各位老师的教学经验的积累，对本书中例题和习题的编写起到了很大的帮助作用，特此说明并致谢. 本书中有的章节有加“*”的内容，属于附加内容，供有此需求的专业选用.

本书由闽南理工学院具有多年教学与实际工作经验的教师集体编写，由曾健民总体策划并撰写前言，由韩建玲和曾健民统稿. 第 10 章由石莲英编写，第 11 章由陈特清编写，第 12 章和第 13 章由廖晓花编写，第 14 章和第 15 章由孙德红编写，第 16 章和第 17 章由韩建玲编写. 在本书的编写过程中，得到了闽南理工学院迟岩院长、许沧海、许栋梁、王坚和许为勇等院领导的具体指导，得到了刘德凤、邱秀环、梁晓彬、钟艳林、王素娟、程书红、王昌忠、高小明、徐金平、郝俊灵、韩俊峰、师晶、温焕明、王洁丹、蔡小红、林美丽等老师的具体协助，在此表示衷心感谢！

由于我们水平有限，书中难免有不足之处，敬请有关专家、学者及使用本书的老师和同学批评指正，以帮助我们不断改进.

编　者

2011 年 12 月

目录

CONTENTS

第10章

空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而用代数的方法来研究几何问题. 空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的. 本章先引入向量的概念，根据向量的线性运算建立空间直角坐标系，然后利用坐标讨论向量的运算，并介绍空间解析几何的有关内容，主要内容包括空间曲面、曲线、平面、直线及它们的方程表示.

10.1 向量及其线性运算

10.1.1 向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，经常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向，如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做**向量**(或**矢量**).

在数学上，用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$. 有时用黑体字母表示，也可用上加箭头书写体字母表示，例如：$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{r}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等.

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，所以在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**，简称**向量**. 因此，如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，且方向相同，则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是**相等的**，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的大小叫做向量的**模**. 向量 $\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$、$\overrightarrow{AB}$的模分别记为$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$、$|\overrightarrow{AB}|$. 模等于1的向量叫做**单位向量**. 模等于0的向量叫做**零向量**，记作 $\boldsymbol{O}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看做是任意的.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**记作$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$或$(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$(设 $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，则 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$).

对于两个非零向量，如果它们的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则有$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$. 零向量认为是与任何向量都平行. 若$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，则称

这两个向量**垂直**.

当两个平行向量的起点为同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上.此时称两向量**共线**.

类似地,还有共面的概念.设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当它们的起点为同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量**共面**.

10.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 10-1-1 所示.

上述作出两向量之和的方法叫做向量加法的**三角形法则**.

另外,还有向量相加的**平行四边形法则**:

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 10-1-2 所示.

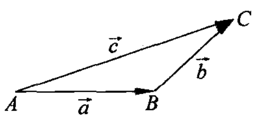

图　10-1-1

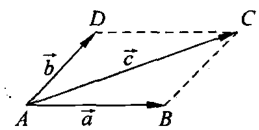

图　10-1-2

向量的加法满足下列运算规律.

(1) 交换律:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一向量的起点为起点,最后一向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$,如图 10-1-3 所示.

我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$$

即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上,便得到 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,如图 10-1-4 所示.

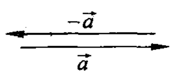

图　10-1-3

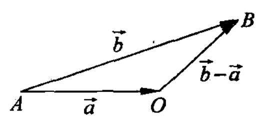

图　10-1-4

特别地，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{O}$$

显然，对于任意的向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引的向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中，等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反.

当 $\lambda=0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的.

特别地，当 $\lambda=\pm1$ 时，有

$$1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

向量与数的乘积满足下列运算规律.

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

例 10-1-1 在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{DM}$，其中 M 是平行四边形对角线的交点，如图 10-1-5 所示.

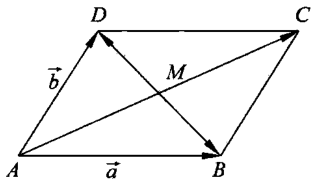

图 10-1-5

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA}$$

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

因为 $-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DM}$，所以

$$\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

已知模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{O}$，则向量 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记作 $\boldsymbol{e}_a$. 即 $\boldsymbol{e}_a=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 于是 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

定理 10-1-1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{O}$，那么，向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，两式相减，便得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{O}$，即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{O}$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，故 $|\lambda-\mu|=0$，即 $\lambda=\mu$.

证毕.

由定理 10-1-1 可知，给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox，对于轴上任一点 P，对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$，由 $\overrightarrow{OP}/\!/\boldsymbol{i}$，根据定理 10-1-1，必有唯一的实数 x，使 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$（实数 x 叫做轴上**有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值**），并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应，于是

$$点\ P\leftrightarrow 向量\ \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow 实数\ x$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此，定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知，轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$$

10.1.3 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和 3 个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了 3 条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记作 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为**坐标轴**. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系，如图 10-1-6 所示. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上，而 z 轴则是铅垂线：它们的正向通常符合右手规则，即以右手握住 z 轴，当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，如图 10-1-7 所示.

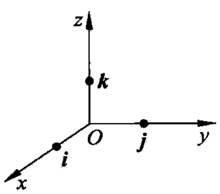

图 10-1-6

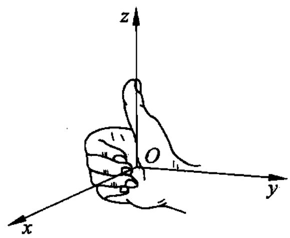

图 10-1-7

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为坐标面. 由 x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面，另两个由 y 轴及 z 轴所确定的坐标面和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面，分别叫做是 yOz 面和 zOx 面. 3 个坐标面把空间分成 8 个部分，每一部分叫做**卦限**. 含有 3 个正半轴的卦限叫做**第一卦限**，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 8 个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 表示，如图 10-1-8 所示.

任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应有点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线、3 条坐标轴为棱作长方体，如图 10-1-9 所示，有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $\quad \overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$

则 $\quad \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

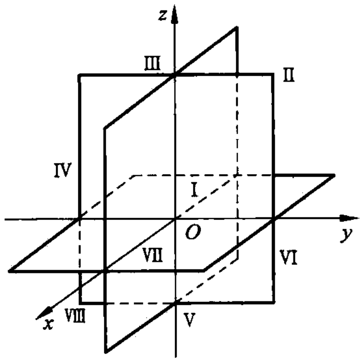

图　10-1-8

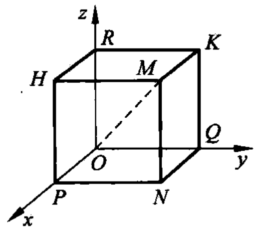

图　10-1-9

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴方向的分向量.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 这 3 个分向量，进而确定了 x、y、z 这 3 个有序数；反之，给定 3 个有序数 x、y、z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 个有序数 x、y、z 之间有一一对应的关系：

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)$$

据此定义：有序数 x、y、z 称为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $Oxyz$）中的**坐标**，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x、y、z 也称为点 M（在坐标系 $Oxyz$）的**坐标**，记作 $M(x,y,z)$.

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的**向径**. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样地，在 zOx 面上的点，有 $y=0$；在 xOy 面上的点，有 $z=0$. 如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，如果点在 y 轴上，则 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$. 如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

10.1.4　利用坐标进行向量的线性运算

利用向量的坐标，可得向量的一些运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$$
$$=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

显然,对向量进行加、减及与数相乘运算,只须对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由定理 10-1-1 知,若 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,用坐标表示为 $(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$,这说明向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例,即 $\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$.

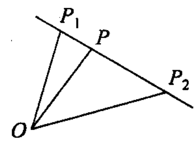

图 10-1-10

例 10-1-2 已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 P_1P_2 上求一点 P,使 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,如图 10-1-10 所示.

解法 1 由于 $\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}$,$\overrightarrow{PP_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}$,因此

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP})$$

从而得

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2})=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

这就是点 P 的坐标.

解法 2 设所求点为 $P(x,y,z)$,则

$$\overrightarrow{P_1P}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$$
$$\overrightarrow{PP_2}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

依题意有 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$,即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$
$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z)$$
$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2)$$
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$$

点 P 叫做有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的**定比分点**.当 $\lambda=1$ 时,点 P 为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的中点,其坐标为

$$\left(x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

10.1.5 向量的模、方向角与投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,如图 10-1-9 所示,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|OM|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2}$$

设　$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，　$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，　$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$

有　$|OP|=|x|$，　$|OQ|=|y|$，　$|OR|=|z|$

于是得向量模的坐标表示式为

$$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

设有点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 10-1-3　设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,-1,1)$ 的距离为到点 $P_2(0,\sqrt{2},3)$ 的距离的一半，求点 P 的坐标.

解　因为 P 在 x 轴上，设 P 点坐标为 $(x,0,0)$，则有

$$|PP_1|=\sqrt{(-x)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{x^2+2}$$

$$|PP_2|=\sqrt{(-x)^2+(\sqrt{2})^2+3^2}=\sqrt{x^2+11}$$

因为 $|PP_1|=\frac{1}{2}|PP_2|$，所以 $\sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$，解得 $x=\pm1$.

于是所求点为：$(1,0,0)$，$(-1,0,0)$.

例 10-1-4　已知两点 $A(7,0,3)$ 和 $B(4,1,5)$，求 $\overrightarrow{AB}$、$|\overrightarrow{AB}|$ 及 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量 $\boldsymbol{e}_{AB}$.

解　因为　$\overrightarrow{AB}=(4,1,5)-(7,0,3)=(-3,1,2)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$$

所以　$\boldsymbol{e}_{AB}=\pm\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(-3,1,2)$

2. 方向角与方向余弦

已知，当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与 3 条坐标轴的夹角 α、β、γ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**.

设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

$$x=|\boldsymbol{r}|\cos\alpha,\quad y=|\boldsymbol{r}|\cos\beta,\quad z=|\boldsymbol{r}|\cos\gamma$$

$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**，于是

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

从而有

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_r$$

上式表明，以向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为坐标的向量就是与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$. 因此

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$