

高等院校应用型特色教材

大学数学 (下册)

韩建玲 曾健民 主 编

陈特清 廖晓花 副主编

孙德红 石莲英



清华大学出版社

高等院校应用型特色教材

大学数学 (下册)

韩建玲 曾健民 主 编
陈特清 廖晓花 副主编
孙德红 石蕊英

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书分8章,内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微积分学及其应用、微分方程、无穷级数、向量组的线性相关性、相似矩阵及二次型、多维随机变量及其分布,以及数理统计.书后还附有习题答案、 t 分布表和 F 分布表.

本书适用于应用型高等院校理工类和经济类各专业的公共数学课.本书还配套有学习辅导书,便于学生学习使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.下册/韩建玲,曾健民主编. —北京:清华大学出版社,2012.1

ISBN 978-7-302-27869-6

I. ①大… II. ①韩… ②曾… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第282618号

责任编辑:孟毅新

责任校对:李 梅

责任印制:李红英

出版发行:清华大学出版社

地 址:北京清华大学学研大厦A座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者:北京密云胶印厂

装 订 者:三河市新茂装订有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185×260 印 张:14

字 数:321千字

版 次:2012年1月第1版

印 次:2012年1月第1次印刷

印 数:1~4000

定 价:28.00元

产品编号:041360-01

随着我国社会、经济的发展,为了适应应用型高等数学教育的教学改革和教材建设的需求,我们特地组织了一批有丰富教学经验的教师编写了本书.本书以应用、实用和适用为基本原则,淡化理论并突出实践.在本书的编写过程中,我们结合应用型本科和高职高专的特点,对比较烦琐的定理、公式的推导和证明尽可能只给出结果或简单直观地给出几何说明;对例题的选择由浅入深,讲述尽可能深入浅出,力求具有一定的启发性和应用性.

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的一门科学,大学数学是应用型本科和高职高专学生的一门必修课,不但对发展学生逻辑思维能力和空间想象能力有不可替代的作用,而且在其他领域与学科中也发挥着十分重要的作用.大学数学是一门非常重要的基础课,不但内容丰富、理论严谨,而且应用广泛、影响深远,可为学习后继课程和进一步扩大知识面奠定必要的基础,帮助学生培养综合利用所学知识分析问题和解决问题的能力,增强学生的自主学习能力和创新能力.所以编写一本适合的应用型大学数学教材是一项十分有意义的工作.

在本书的编写过程中,我们参考了大量的同类图书,特别是参考了一些典型例题和习题,它们是各位老师的教学经验的积累,对本书中例题和习题的编写起到了很大的帮助作用,特此说明并致谢.本书中有的章节有加“*”的内容,属于附加内容,供有此需求的专业选用.

本书由闽南理工学院具有多年教学与实际工作经验的教师集体编写,由曾健民总体策划并撰写前言,由韩建玲和曾健民统稿.第10章由石莲英编写,第11章由陈特清编写,第12章和第13章由廖晓花编写,第14章和第15章由孙德红编写,第16章和第17章由韩建玲编写.在本书的编写过程中,得到了闽南理工学院迟岩院长、许沧海、许栋梁、王坚和许为勇等院领导的具体指导,得到了刘德凤、邱秀环、梁晓彬、钟艳林、王素娟、程书红、王昌忠、高小明、徐金平、郝俊灵、韩俊峰、师晶、温焕明、王洁丹、蔡小红、林美丽等老师的具体协助,在此表示衷心感谢!

由于我们水平有限,书中难免有不足之处,敬请有关专家、学者及使用本书的老师和同学批评指正,以帮助我们不断改进.

编 者

2011年12月

第 10 章 空间解析几何与向量代数	1
10.1 向量及其线性运算	1
10.1.1 向量的概念	1
10.1.2 向量的线性运算	2
10.1.3 空间直角坐标系	4
10.1.4 利用坐标进行向量的线性运算	5
10.1.5 向量的模、方向角与投影	6
习题 10-1	8
10.2 数量积和向量积	9
10.2.1 两向量的数量积	9
10.2.2 两向量的向量积	10
习题 10-2	12
10.3 曲面及其方程	12
10.3.1 曲面方程的概念	12
10.3.2 旋转曲面	13
10.3.3 柱面	15
10.3.4 二次曲面	15
习题 10-3	16
10.4 空间曲线及其方程	17
10.4.1 空间曲线的一般方程	17
10.4.2 空间曲线的参数方程	18
10.4.3 空间曲线在坐标面上的投影	18
习题 10-4	20
10.5 平面及其方程	20
10.5.1 平面的点法式方程	20
10.5.2 平面的一般方程	21
10.5.3 两平面的夹角	23
习题 10-5	25
10.6 空间直线及其方程	25

10.6.1	空间直线的一般方程	25
10.6.2	空间直线的对称式方程与参数方程	25
10.6.3	两直线的夹角	27
10.6.4	直线与平面的夹角	27
	习题 10-6	29
第 11 章	多元函数微积分学及其应用	30
11.1	多元函数的极限与连续性	30
11.1.1	多元函数的概念	30
11.1.2	多元函数的极限与连续	32
	习题 11-1	34
11.2	偏导数和全微分	35
11.2.1	偏导数	35
11.2.2	全微分	38
	习题 11-2	41
11.3	多元复合函数与隐函数的微分法	41
11.3.1	复合函数的微分法	41
11.3.2	隐函数的微分法	43
	习题 11-3	44
11.4	偏导数的应用	45
11.4.1	几何应用	45
11.4.2	多元函数的极值与最值	47
* 11.4.3	偏导数在经济管理中的应用——偏边际与偏弹性	50
	习题 11-4	52
11.5	二重积分的概念与性质	53
11.5.1	二重积分的概念	53
11.5.2	二重积分的性质	56
	习题 11-5	57
11.6	二重积分的计算	57
11.6.1	利用直角坐标计算二重积分	58
11.6.2	利用极坐标计算二重积分	62
	习题 11-6	64
第 12 章	微分方程	66
12.1	微分方程的基本概念	66
12.1.1	两个实例	66
12.1.2	微分方程的基本概念	67
	习题 12-1	68

12.2	一阶微分方程	69
12.2.1	可分离变量的微分方程	69
*12.2.2	齐次方程	70
12.2.3	一阶线性微分方程	73
*12.2.4	一阶微分方程应用举例	76
	习题 12-2	78
12.3	可降阶的高阶微分方程	78
12.3.1	右端仅含自变量 x 的方程	78
12.3.2	右端不显含未知函数 y 的方程	79
*12.3.3	右端不显含自变量 x 的方程	80
	习题 12-3	82
12.4	二阶常系数线性微分方程	82
12.4.1	二阶常系数线性齐次微分方程	82
12.4.2	二阶常系数非齐次线性微分方程	85
	习题 12-4	90
第 13 章	无穷级数	91
13.1	常数项无穷级数的概念和性质	91
13.1.1	无穷级数的概念	91
13.1.2	数项级数的性质	94
	习题 13-1	95
13.2	数项级数敛散性的判别法	95
13.2.1	正项级数的审敛法	96
13.2.2	交错级数及其审敛法	100
13.2.3	绝对收敛和条件收敛	101
	习题 13-2	102
13.3	幂级数	103
13.3.1	函数项级数的概念	103
13.3.2	幂级数的审敛准则	103
13.3.3	幂级数的性质	105
	习题 13-3	107
13.4	函数的幂级数展开式	108
13.4.1	泰勒公式	108
13.4.2	泰勒级数	109
13.4.3	函数展开成幂级数	109
	习题 13-4	113
第 14 章	向量组的线性相关性	114
14.1	向量组及其线性运算	114

习题 14-1	116
14.2 向量组的线性相关性	117
14.2.1 线性组合	117
14.2.2 线性相关与线性无关	118
14.2.3 向量间线性关系定理	120
习题 14-2	122
14.3 向量组的秩	122
14.3.1 极大无关组	122
14.3.2 向量组秩的定义及求法	123
习题 14-3	125
14.4 线性方程组解的结构	126
14.4.1 齐次线性方程组解的结构	126
14.4.2 非齐次线性方程组解的结构	130
习题 14-4	133
第 15 章 相似矩阵及二次型	134
15.1 向量的内积、长度及正交性	134
15.1.1 向量的内积	134
15.1.2 向量的长度与夹角	134
15.1.3 规范正交基	135
15.1.4 施密特正交化方法	136
15.1.5 正交矩阵	138
习题 15-1	139
15.2 方阵的特征值与特征向量	139
习题 15-2	143
15.3 相似矩阵	143
习题 15-3	145
15.4 实对称矩阵的对角化	145
习题 15-4	149
15.5 二次型及其标准形	149
习题 15-5	154
15.6 用配方法转换二次型为标准形	154
习题 15-6	156
15.7 正定二次型	156
习题 15-7	158
第 16 章 多维随机变量及其分布	159
16.1 二维随机变量及其联合分布	159

16.1.1	二维随机变量的分布函数	159
16.1.2	二维离散型随机变量	159
16.1.3	二维连续型随机变量	160
	习题 16-1	161
16.2	边缘分布	162
16.2.1	离散型随机变量的边缘分布	162
16.2.2	连续型随机变量的边缘分布	163
* 16.2.3	二维正态分布	164
	习题 16-2	165
16.3	条件分布及随机变量的独立性	165
* 16.3.1	二维离散型随机变量的条件分布	165
* 16.3.2	二维连续型随机变量的条件分布	166
16.3.3	随机变量的独立性	167
	习题 16-3	169
16.4	二维随机变量函数的分布	169
	习题 16-4	171
16.5	随机变量的其他数字特征	172
16.5.1	协方差	172
16.5.2	相关系数	172
16.5.3	矩	173
16.5.4	分位数	173
16.6	大数定律与中心极限定理	174
16.6.1	大数定律	174
16.6.2	中心极限定理	175
	习题 16-6	177
第 17 章	数理统计	178
17.1	基本概念	178
17.1.1	总体与样本	178
17.1.2	统计量	179
17.1.3	统计三大分布	180
17.2	参数估计	181
17.2.1	点估计	181
17.2.2	估计量的优良性标准	185
17.2.3	区间估计	186
	习题 17-2	188
17.3	假设检验	190
17.3.1	假设检验的基本原理	190

* 17.3.2 假设检验的两类错误	191
17.3.3 单个正态总体的假设检验	192
习题 17-3	194
附录 A t 分布表	196
附录 B χ^2 分布表	197
附录 C 习题答案	198
参考文献	214

第10章

空间解析几何与向量代数

在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有序的数对应起来,把平面上的图形和方程对应起来,从而用代数的方法来研究几何问题.空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.本章先引入向量的概念,根据向量的线性运算建立空间直角坐标系,然后利用坐标讨论向量的运算,并介绍空间解析几何的有关内容,主要内容包括空间曲面、曲线、平面、直线及它们的方程表示.

10.1 向量及其线性运算

10.1.1 向量的概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时,经常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向,如力、力矩、位移、速度、加速度等,这一类量叫做**向量**(或**矢量**).

在数学上,用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 A 为起点、 B 为终点的有向线段所表示的向量记作 $\overrightarrow{AB}$.有时用黑体字母表示,也可用上加箭头书写体字母表示,例如: $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{r}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{F}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{r}$ 、 $\vec{v}$ 、 $\vec{F}$ 等.

由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,所以在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**,简称**向量**.因此,如果向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的大小相等,且方向相同,则说向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是相等的,记作 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的大小叫做向量的**模**.向量 $\mathbf{a}$ 、 $\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为 $|\mathbf{a}|$ 、 $|\vec{a}|$ 、 $|\overrightarrow{AB}|$.模等于1的向量叫做**单位向量**.模等于0的向量叫做**零向量**,记作 $\mathbf{0}$.零向量的起点与终点重合,它的方向可以看做是任意的.

向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的**夹角**记作 $(\widehat{a,b})$ 或 $(\widehat{b,a})$ (设 $\varphi=(\widehat{a,b})$, 则 $0\leq\varphi\leq\pi$).

对于两个非零向量,如果它们的方向相同或相反,则称这两个向量**平行**.向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行,记作 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, 则有 $(\widehat{a,b})=0$.零向量认为是与任何向量都平行.若 $(\widehat{a,b})=\frac{\pi}{2}$, 则称

这两个向量垂直.

当两个平行向量的起点为同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上.此时称两向量共线.

类似地,还有共面的概念.设有 $k(k \geq 3)$ 个向量,当它们的起点为同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

10.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

向量的加法运算规定如下:

设有两个向量 a 与 b , 平移向量使 b 的起点与 a 的终点重合, 此时从 a 的起点到 b 的终点的向量 c 称为向量 a 与 b 的和, 记作 $a+b$, 即 $c=a+b$, 如图 10-1-1 所示.

上述作出两向量之和的方法叫做向量加法的三角形法则.

另外, 还有向量相加的平行四边形法则:

当向量 a 与 b 不平行时, 平移向量使 a 与 b 的起点重合, 以 a, b 为邻边作一平行四边形, 从公共起点到对角的向量等于向量 a 与 b 的和, 即 $a+b$, 如图 10-1-2 所示.

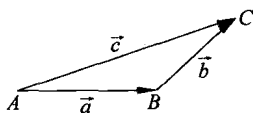


图 10-1-1

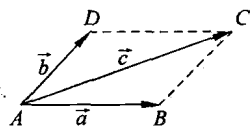


图 10-1-2

向量的加法满足下列运算规律.

- (1) 交换律: $a+b=b+a$;
- (2) 结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$.

由于向量的加法符合交换律与结合律, 故 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 相加可写成

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

按向量相加的三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则如下: 使前一向量的终点作为次一向量的起点, 相继作向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 再以第一向量的起点为起点, 最后一向量的终点为终点作一向量, 这个向量即为所求的和.

设 a 为一向量, 与 a 的模相同而方向相反的向量叫做 a 的负向量, 记为 $-a$, 如图 10-1-3 所示.

我们规定两个向量 b 与 a 的差为

$$b-a=b+(-a)$$

即把向量 $-a$ 加到向量 b 上, 便得到 b 与 a 的差 $b-a$, 如图 10-1-4 所示.

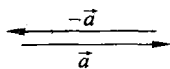


图 10-1-3

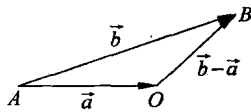


图 10-1-4

特别地,当 $b=a$ 时,有

$$a - a = a + (-a) = O$$

显然,对于任意的向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O ,有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

因此,若把向量 a 与 b 移到同一起点 O ,则从 a 的终点 A 向 b 的终点 B 所引的向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 b 与 a 的差 $b-a$.

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a-b| \leq |a| + |b|$$

其中,等号在 b 与 a 同向或反向时成立.

2. 向量与数的乘法

向量 a 与实数 λ 的乘积记作 λa . 规定 λa 是一个向量,它的模 $|\lambda a| = |\lambda| |a|$, 它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 相同,当 $\lambda < 0$ 时与 a 相反.

当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 λa 为零向量,这时它的方向可以是任意的.

特别地,当 $\lambda = \pm 1$ 时,有

$$1a = a, \quad (-1)a = -a$$

向量与数的乘积满足下列运算规律.

(1) 结合律: $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$;

(2) 分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$.

例 10-1-1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{DM}$, 其中 M 是平行四边形对角线的交点,如图 10-1-5 所示.

解 由于平行四边形的对角线互相平分,所以

$$a + b = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{MA}$$

于是

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(a+b), \quad \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(a+b)$$

因为 $-b+a = \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DM}$, 所以

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(a-b), \quad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(a-b)$$

已知模等于 1 的向量叫做单位向量. 设 $a \neq O$, 则向量 $\frac{a}{|a|}$ 是与 a 同方向的单位向量,

记作 e_a . 即 $e_a = \frac{a}{|a|}$. 于是 $a = |a|e_a$.

定理 10-1-1 设向量 $a \neq O$, 那么, 向量 b 平行于 a 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $b = \lambda a$.

证明 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $b \parallel a$. 取 $|\lambda| = \frac{|b|}{|a|}$, 当 b 与 a 同向时 λ 取正值, 当 b 与 a 反向时 λ 取负值, 即 $b = \lambda a$.

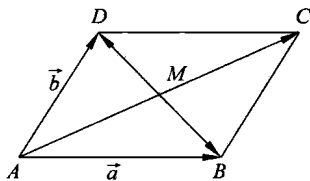


图 10-1-5

这是因为此时 b 与 λa 同向, 且

$$|\lambda a| = |\lambda| |a| = \left| \frac{b}{a} \right| |a| = |b|$$

再证明数 λ 的唯一性. 设 $b = \lambda a$, 又设 $b = \mu a$, 两式相减, 便得 $(\lambda - \mu)a = O$, 即 $|\lambda - \mu| |a| = 0$. 因 $|a| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

证毕.

由定理 10-1-1 可知, 给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴. 设点 O 及单位向量 i 确定了数轴 Ox , 对于轴上任一点 P , 对应一个向量 $\overrightarrow{OP}$, 由 $\overrightarrow{OP} \parallel i$, 根据定理 10-1-1, 必有唯一的实数 x , 使 $\overrightarrow{OP} = xi$ (实数 x 叫做轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 的值), 并知 $\overrightarrow{OP}$ 与实数 x 一一对应, 于是

$$\text{点 } P \leftrightarrow \text{向量 } \overrightarrow{OP} = xi \leftrightarrow \text{实数 } x$$

从而轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系. 据此, 定义实数 x 为轴上点 P 的坐标.

由此可知, 轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OP} = xi$$

10.1.3 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和 3 个两两垂直的单位向量 i, j, k , 就确定了 3 条都以 O 为原点的两两垂直的数轴, 依次记作 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系, 如图 10-1-6 所示. 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线: 它们的正向通常符合右手规则, 即以右手握住 z 轴, 当右手的 4 个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 的角度转向正向 y 轴时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向, 如图 10-1-7 所示.

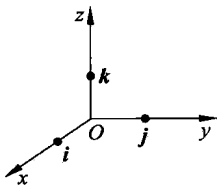


图 10-1-6

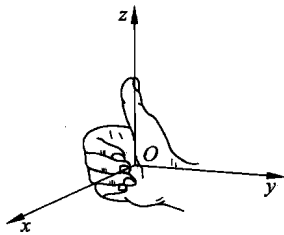


图 10-1-7

在空间直角坐标系中, 任意两个坐标轴可以确定一个平面, 这种平面称为坐标面. 由 x 轴及 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面, 另两个由 y 轴及 z 轴所确定的坐标面和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面, 分别叫做是 yOz 面和 zOx 面. 3 个坐标面把空间分成 8 个部分, 每一部分叫做卦限. 含有 3 个正半轴的卦限叫做第一卦限, 它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 的下方, 与第一卦限对应的是第五卦限, 按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 8 个卦限分别用罗马数字 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII 表示, 如图 10-1-8 所示.

任给向量 r , 对应有点 M , 使 $\overrightarrow{OM} = r$. 以 OM 为对角线、3 条坐标轴为棱作长方体, 如图 10-1-9 所示, 有

$$\begin{aligned} r = \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} \\ \text{设 } \overrightarrow{OP} &= xi, \quad \overrightarrow{OQ} = yj, \quad \overrightarrow{OR} = zk \\ \text{则 } r = \overrightarrow{OM} &= xi + yj + zk \end{aligned}$$

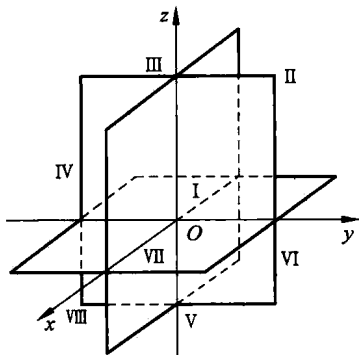


图 10-1-8

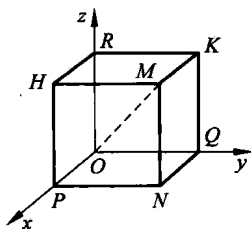


图 10-1-9

上式称为向量 r 的坐标分解式, xi 、 yj 、 zk 称为向量 r 沿 3 个坐标轴方向的分向量.

显然, 给定向量 r , 就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP} = xi$, $\overrightarrow{OQ} = yj$, $\overrightarrow{OR} = zk$ 这 3 个分向量, 进而确定了 x 、 y 、 z 这 3 个有序数; 反之, 给定 3 个有序数 x 、 y 、 z , 也就确定了向量 r 与点 M . 于是, 点 M 、向量 r 与 3 个有序数 x 、 y 、 z 之间有一一对应的关系:

$$M \leftrightarrow r = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk \leftrightarrow (x, y, z)$$

据此定义: 有序数 x 、 y 、 z 称为向量 r (在坐标系 $Oxyz$) 中的坐标, 记作 $r = (x, y, z)$; 有序数 x 、 y 、 z 也称为点 M (在坐标系 $Oxyz$) 的坐标, 记作 $M(x, y, z)$.

向量 $r = \overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明, 一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x, y, z) 既表示点 M , 又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点, 其坐标各有一定的特征. 例如: 点 M 在 yOz 面上, 则 $x = 0$; 同样地, 在 zOx 面上的点, 有 $y = 0$; 在 xOy 面上的点, 有 $z = 0$. 如果点 M 在 x 轴上, 则 $y = z = 0$; 同样, 如果点在 y 轴上, 则 $z = x = 0$; 在 z 轴上的点, 有 $x = y = 0$. 如果点 M 为原点, 则 $x = y = z = 0$.

10.1.4 利用坐标进行向量的线性运算

利用向量的坐标, 可得向量的一些运算如下:

设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, 即 $a = a_x i + a_y j + a_z k$, $b = b_x i + b_y j + b_z k$, 则

$$\begin{aligned} a + b &= (a_x i + a_y j + a_z k) + (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= (a_x + b_x) i + (a_y + b_y) j + (a_z + b_z) k \\ &= (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \\ a - b &= (a_x i + a_y j + a_z k) - (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= (a_x - b_x) i + (a_y - b_y) j + (a_z - b_z) k \\ &= (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \mathbf{a} &= \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = (\lambda a_x) \mathbf{i} + (\lambda a_y) \mathbf{j} + (\lambda a_z) \mathbf{k} \\ &= (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\end{aligned}$$

显然,对向量进行加、减及与数相乘运算,只须对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由定理 10-1-1 知,若 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ 的充要条件是 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 用坐标表示为 $(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z)$, 这说明向量 $\mathbf{b}$ 与向量 $\mathbf{a}$ 对应的坐标成比例, 即 $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}$.

例 10-1-2 已知两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$, 在直线 P_1P_2 上求一点 P , 使 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 如图 10-1-10 所示.

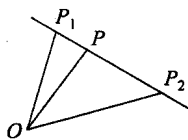


图 10-1-10

解法 1 由于 $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{PP_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP}$, 因此

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = \lambda(\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP})$$

从而得

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OP_1} + \lambda \overrightarrow{OP_2}) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right)$$

这就是点 P 的坐标.

解法 2 设所求点为 $P(x, y, z)$, 则

$$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$$

$$\overrightarrow{PP_2} = (x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$$

依题意有 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 即

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \lambda(x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z)$$

$$(x, y, z) - (x_1, y_1, z_1) = \lambda(x_2, y_2, z_2) - \lambda(x, y, z)$$

$$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

点 P 叫做有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$ 时, 点 P 为有向线段 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的中点, 其坐标为

$$\left(x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

10.1.5 向量的模、方向角与投影

1. 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 作 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 如图 10-1-9 所示, 则

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

按勾股定理可得

$$|\mathbf{r}| = |OM| = \sqrt{|OP|^2 + |OQ|^2 + |OR|^2}$$

设 $\overrightarrow{OP}=xi, \overrightarrow{OQ}=yj, \overrightarrow{OR}=zk$
 有 $|OP|=|x|, |OQ|=|y|, |OR|=|z|$

于是得向量模的坐标表示式为

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设有两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

于是点 A 与点 B 间的距离为

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 10-1-3 设 P 在 x 轴上, 它到 $P_1(0, -1, 1)$ 的距离为到点 $P_2(0, \sqrt{2}, 3)$ 的距离的一半, 求点 P 的坐标.

解 因为 P 在 x 轴上, 设 P 点坐标为 $(x, 0, 0)$, 则有

$$|PP_1| = \sqrt{(-x)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$|PP_2| = \sqrt{(-x)^2 + (\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{x^2 + 11}$$

因为 $|PP_1| = \frac{1}{2}|PP_2|$, 所以 $\sqrt{x^2 + 11} = 2\sqrt{x^2 + 2}$, 解得 $x = \pm 1$.

于是所求点为: $(1, 0, 0), (-1, 0, 0)$.

例 10-1-4 已知两点 $A(7, 0, 3)$ 和 $B(4, 1, 5)$, 求 $\overrightarrow{AB}$ 、 $|\overrightarrow{AB}|$ 及 $\overrightarrow{AB}$ 的单位向量 e_{AB} .

解 因为 $\overrightarrow{AB} = (4, 1, 5) - (7, 0, 3) = (-3, 1, 2)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

所以 $e_{AB} = \pm \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}(-3, 1, 2)$

2. 方向角与方向余弦

已知, 当把两个非零向量 a 与 b 的起点放到同一点时, 两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 a 与 b 的夹角, 记作 $(\widehat{a, b})$ 或 $(\widehat{b, a})$. 如果向量 a 与 b 中有一个是零向量, 规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.

非零向量 r 与 3 条坐标轴的夹角 α, β, γ 称为向量 r 的方向角.

设 $r = (x, y, z)$, 则

$$x = |r| \cos \alpha, \quad y = |r| \cos \beta, \quad z = |r| \cos \gamma$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为向量 r 的方向余弦, 于是

$$\cos \alpha = \frac{x}{|r|}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|r|}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|r|}$$

从而有

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{|r|} r = e_r$$

上式表明, 以向量 r 的方向余弦为坐标的向量就是与 r 同方向的单位向量 e_r . 因此

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$