

数学经验

[美] P. J. 戴维斯

R. 赫什 著

王 前 俞晓群等 译

陈以鸿 校

江苏教育出版社

封面设计 余连如

ISBN 7-5343-1453-4

G · 1290 定价：4.40 元

(苏)新 字第003号

Philip J. Davis & Reuben Hersh

The Mathematical Experience

Birkhäuser, 1981.

数 学 经 验

〔美〕P.J. 戴维斯 R. 赫什著

王 前 俞晓群 等译

陈以鸿 校

责任编辑 王建军

出版发行：江苏教育出版社
(南京中央路165号，邮政编码：210009)

经 销：江苏省新华书店
印 刷：淮阴新华印刷厂
(淮阴市淮海北路44号，邮政编码：223001)

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 13 插页 1 字数 319,000

1991 年12月第1版 1991 年12月第1次印刷

印数 1-1,000 册

ISBN 7-5343-1453-4

G · 1290

定价：4.40 元

江苏教育版图书若有印刷装订错误，可向承印厂调换

译 者 的 话

《数学经验》一书是美国著名数学家 P.J. 戴维斯和 R. 赫什合写的一部在国际上影响很大的著作。1981年首次出版后，在美国国内外引起强烈反响，获得了1983年美国图书奖，并计划译成德文、西班牙文和日文出版。戴维斯和赫什虽然是专业数学家，但他们的这部著作广泛涉及数学与哲学、科学技术、社会经济活动、艺术、宗教等多方面的关系，从不同角度探讨了数学思维活动的实际过程以及数学在现实生活中的实际作用。他们的思路开阔，知识渊博，见解深刻，充分展示了现代数学家的亲身经验，使读者有可能对他们的思想风貌有一个活生生的了解。这样的著作确实是难得见到的。因此，我们把它译成中文献给我们读者。我们认为，这部著作的价值不仅在于介绍有关数学发展规律和数学思想方法的知识，而且在于表明现代的具有创造性的数学工作者应有怎样的知识结构和文化素养，这对于改进我们的数学研究和教学工作都是十分必要的。从事自然科学、社会科学和哲学研究与教学的读者，也会从这部著作中获得大量信息和有益启示。

为了便于读者理解和掌握本书的内容，我们在翻译过程中对原著作了若干技术性改动。原著中有些我国读者不大熟悉的史料、典故和习语用法，根据说明主题内容的需要，或作必要注释，或作删改。我们还照原著复制了若干图片，并将说明简要译出。希望得到全部图片的读者可查阅原著。

本书第一、四、七、八章由王前翻译，第二、三、五章由俞晓群翻译，第六章第一至五节由冯军翻译，第六章第六节由郭淑范翻译。译稿承蒙陈以鸿先生审校，我们表示衷心感谢。

本书翻译过程中，曾得到著名数学家徐利治先生和南京航空学院朱梧楨、南京大学郑毓信两位教授热情支持和帮助。江苏教育出版社的领导和编辑同志理解这部书的价值，为中译本问世付出了辛勤劳动，在此一并致以诚挚谢意。

译 者

1990年9月

目 录

译者的话	1
前言	1
志谢	3
引言	6
序	10
第一章 数学景观	13
1.1 数学是什么	13
1.2 数学在哪里	15
1.3 数学社会	15
1.4 这个行业的工具	18
1.5 已知的数学知识有多少	22
1.6 乌拉姆的困境	25
1.7 可能有多少数学知识	28
附录A 1910年前大事年表	29
附录B 数学分类, 1868年与1979年的比较	31
第二章 数学经验种种	35
2.1 当代的个体和集体意识	35
2.2 理想的数学家	36
2.3 一个物理学家看数学	46
2.4 夏弗里维奇和新柏拉图主义	52
2.5 异端	54
2.6 个人与文化	59
第三章 外部问题	64
3.1 数学为什么有效——约定论的回答	64
3.2 数学模型	71

3.3 数学的效用	73
3.4 并非“正统”的应用	81
3.5 抽象和经院神学	100
第四章 内部问题	107
4.1 符号	107
4.2 抽象	110
4.3 推广	117
4.4 形式化	120
4.5 数学对象和结构; 存在	124
4.6 证明	130
4.7 无限——数学的超凡容器	134
4.8 伸长的线	140
4.9 命运之神的硬币	144
4.10 美学成分	149
4.11 模式、秩序和混沌	152
4.12 算法数学和论理数学	161
4.13 普遍性和抽象的倾向——中国剩余定理的事例研究	167
4.14 数学之谜	174
4.15 多样性中的统一	176
第五章 数学专题选述	179
5.1 群论和有限单群分类	180
5.2 素数定理	186
5.3 非欧几何	192
5.4 非康托尔集合论	199
5.5 非标准分析	212
5.6 傅里叶分析	227
第六章 数学教学	244
6.1 一个预科学校数学教师的自白	244
6.2 传统教学法的危机	246
6.3 波利亚的发现技巧	256

6.4	新数学的创造: 拉卡托斯启发法的应用	262
6.5	比较美学	268
6.6	数学的非解析方面	269
第七章	从确实性到易谬性	285
7.1	柏拉图主义、形式主义和构造主义	285
7.2	正在工作的数学家的哲学困境	287
7.3	欧几里得神话	288
7.4	基础的发现和丧失	295
7.5	形式主义的数学哲学	302
7.6	拉卡托斯与可疑性哲学	308
第八章	数学实在	321
8.1	黎曼假设	321
8.2	π 和 $\hat{\pi}$	327
8.3	数学模型, 计算机和柏拉图主义	331
8.4	为什么我应当相信计算机	336
8.5	有限单群的分类	342
8.6	直觉	344
8.7	四维直觉	352
8.8	关于假想对象的真正事实	358
参考文献		365
索引		394

前 言

我们现在所知道的最古老的数学书板^①，早在公元前2400年就已存在了，但没有理由说创造和使用数学的愿望不是与整个人类文明共存的。几千年来，涌现了被看作是数学的极为丰富的概念和实践活动，并通过种种途径联系着人们的日常生活。数学的性质是什么？它的意义何在？它涉及什么？它的方法论是什么？它如何被创造和使用？它如何同人们的各种经验相适应？它带来什么益处和害处？它有什么重要性？

要回答这些困难问题决非轻而易举，事实上这里牵涉的材料如此广泛，其内部联系如此丰富，以致任何一个人都不可能完全把握，更不用说在一本中等篇幅的书中之加以概括和总结了。为了避免被这些庞杂的材料吓倒，我们还是换一种方式来思考数学。数学千百年来一直是人类的一种活动。在某种意义上，每个人都是数学家，都在有意识地做数学工作。在市场上买东西，量一条墙壁纸，或按规则图案装饰一个瓷罐，都是在做数学工作。更进一步说，每个人在某种意义上都是数学哲学家。只要有时候他大呼道：“可是数字不会撒谎！”他就已加入到柏拉图和拉卡托斯的行列中了。

除了在有限程度上使用数学的大众之外，还有少量专业数学家。他们以数学为业，培育它，传授它，创造它，并在多种情形

① 书板是古代用木、石制成的平板，供写文字用。——译者注

下使用它。向非专业的人们解释数学家在干些什么，他们如何谈论自己的工作，他们为什么该得到别人的支持，应当是可能的。简单说来，这就是我们给自己设定的任务。本书并不想展示近代或古典的数学材料特定内容的系统而详尽的讨论。我们力图捕捉的倒是数学经验中无穷无尽的变化。我们阐述的主要内容将是数学的本质，它的历史，它的哲学，以及如何获得数学知识的方法。这本书不是用来灌输数学，而只是打上数学的印记。这不是一本数学书，而是一本关于数学的书，当然这里不可避免地要包含一些数学。同样地，这不是一本历史书或哲学书，但是它要讨论数学的历史和哲学。因此读者必须具备少许预备知识和一定的兴趣作为基础。有了这个基础的一般读者在阅读本书大部分内容时不会有任何困难。也有少数我们提供了特殊材料的地方，是为那些使用和创造数学的专家所准备的。这里读者们可以像应邀赴家宴的客人一样，在客气的一般性谈话之后，听到那些自家人谈论着他们范围内的私事和欢乐，只好在一边愣着。这些地方读者应该明智地轻松地越过去。

本书的大部分章节可以彼此独立地阅读。

在这本两个人合写的书中，“我”这个词的使用需要说明一下。在有些地方，这个“我”指哪个著者是显然的。但不管怎样，即使误解这个我也不要紧，因为每个著者一般说来是赞同合作者的意见的。

志 谢

本书有些材料选自著者已发表的文章。其中有几篇是与他人合作的。《非康托尔集合论》由P.柯恩(P. Cohen)和R.赫什合著,《非标准分析》由M.戴维斯(M. Davis)和R.赫什合著,都发表在《科学美国人》(*Scientific American*)杂志上。《数学的非解析方面》由P.J.戴维斯和A.安德森(A. Anderson)合著,发表在《工业应用数学学会评论》(*SIAM Review*)上。我们衷心感谢安德森教授、柯恩教授、M.戴维斯教授和这些刊物允许将上述文章收入本书之中。

著者个人的文章选入本书的有:P.J.戴维斯的《数》、《数值分析》、《数学要认可吗?》,分别发表在《科学美国人》、麻省理工学院出版社的《数学科学》(*The Mathematical Sciences*)和《二年学院数学杂志》(*Two Year College Mathematical Journal*)上;R.赫什的《复兴数学哲学的一些建议》和《介绍伊姆雷·拉卡托斯》,分别发表在《数学进展》(*Advances in Mathematics*)和《数学通报》(*Mathematical Intelligencer*)上。

我们感谢下列组织和个人允许本书利用有关复制材料:哥廷根科学院,阿姆毕克斯、多佛出版公司,《计算数学》杂志(*Mathematics of Computation*),麻省理工学院出版社,《纽约杂志》(*New Yorker Magazine*),舍恩菲尔德(A.H. Schoenfeld)教授,约翰·威利父子出版公司。

有关傅里叶分析的一节由R.赫什与P.赫什(Phyllis Hersh)

合写。P.赫什在有关哲学问题的批判性讨论方面，在耐心而细致地校订粗糙的草稿方面，在对我们的计划提供不断的道义支持方面，都作出了必不可少的贡献，我们愿致以诚挚谢意。

下列个人和机构慨然应允我们复制图像和美术资料：班乔夫(Thomas Banchoff)教授和斯特劳(Charles Strauss)教授，布朗大学图书馆，现代艺术博物馆，鲁默斯公司，雷施(Ron Resch)教授，劳特利奇(Routledge)和保罗(Kegan Paul)，萨克斯(A. J. Sachs)教授，芝加哥大学出版社，怀特沃什艺术馆，曼彻斯特大学，犹他大学计算机科学系，耶鲁大学出版社。

我们衷心感谢拉克斯(Peter Lax)教授和吉安-卡洛·罗塔(Gian-Carlo Rota)教授给予鼓励和提出建议。斯托尔岑伯格(Gabriel Stolzenberg)教授曾就本书讨论的某些问题同我们进行了热情而富有成果的通信。库格勒(Lawrence D. Kugler)教授阅读了原稿，并提出了很多有价值的批评意见。阿布雷乌(José Luis Abreu)教授参加了新墨西哥大学的数学哲学讨论会。我们对他们都十分感谢。

在布朗大学举行的数学哲学问题讨论会的参加者，还有新墨西哥大学和布朗大学有关课程的学生们，帮助我们使观点具体化，这种帮助令人感激至深。纳吉菲尔德(Igor Najfeld)教授的援助特别令人难忘。

我们应对布朗大学数学史系的同事们表示谢意。在多年共进午餐的过程中，平格里(David Pingree)教授、诺伊格鲍尔(Otto Neugebauer)教授、萨克斯教授和吐默尔(Gerald Toomer)教授使我们获得了很多信息、见识和灵感。感谢谢定宇^①(Din-Yu Hsieh)教授提供的关于中国数学史的资料。

我们还要特别感谢爱迪生(Eleanor Addison)提供了很多线

① 音译。——译者注

条图，拉齐尔 (Edith Lazear) 细心审阅了第七章和第八章并提出了修改意见。埃弗里 (Katrina Avery)、比甘 (Frances Beagan)、J.M.戴维斯 (Joseph M. Davis)、丰塞卡 (Ezoura Fonseca) 和加多夫斯基 (Frances Gajdowski) 在原稿的准备和处理工作中给予了非常有效的帮助，埃弗里女士并帮助我们查找了大量经典参考文献，在此一并表示衷心感谢。

P. J. 戴维斯

R. 赫什

引言

献给凯克(Mark Kac):

“啊，富有营养的哲学。”

——萨特

上世纪末，瑞士历史学家布尔克哈特(Jakob Burckhardt)①一反大多数历史学家的习惯，别出心裁地要猜测未来。他曾透露给友人尼采一个预言：20世纪将是“过分简单化的年代”。

布尔克哈特的预言被证明为令人惊异地精确。各种肤色的独裁者和政客们向大众许诺，在用一场战争结束所有战争后立即会有温饱和幸福的生活，居然赢得了他们的信任。哲学家们提出要把存在物的复杂性大胆地归结为弹性小球的力学；更有甚者，另一些人认为生活就是语言，而语言不是别的，只是用弗雷格逻辑令人迷惑地联成一体符号链。认真地端出各种红、白、蓝棋盘图案的艺术家们，现在在索思比(Sotheby)②拍卖行叫喊着最高标价。诸如“机械地”、“自动地”、“即刻地”这些词的采用，已被麦迪逊大街上的奇才们接受为广告的第一法则了。

最优秀的科学头脑也不曾避免过分简单化的诱惑。物理学一直被追求唯一规律的研究所驱动，在即将来临的一天，这一规律会把所有的力即引力、电力、强和弱相互作用力以及别的什么力都统一起来。生物学家沉迷于企求通过布满大分子的双螺旋结构去

① 布尔克哈特(1818—1897)，瑞士美术和社会史学家。——译者注

② 纽约著名拍卖行。——译者注

揭示生命奥秘。心理学家们又建议用性解放、麻醉药物和原始呼叫来治疗常见的抑郁症，而传教士们则会反对用不够贵重的献祭参加为再生举行的赞美合唱。

值得称道的是数学家最后才加入这个运动之中。数学，像神学和心智的所有自由创造一样，服从不可抗拒的想象规律，主观愿望对于确定一项推测的真理是很少能有帮助的。当笛卡儿和格罗登迪克(Grothendieck)^①想把几何学归结为代数，或当罗素和根岑(Gentzen)^②要把数学变为逻辑时，人们可能口头奉承，但我们知道有些数学家更富于画图的才能，另一些则更善于摆弄符号，或在论证中挑毛病。

然而，当要理解数学家们活动的性质和数学在整个世界上的地位时，有些数学家就屈从于我们这个时代的过分简单化了。有充分的理由说，没有人愿意让人们谈论他实际的所作所为，或者分析并记录他的私人工作习惯。如果普罗克斯迈尔(Proxmire)参议员^③看到了这样一种描写，他会说些什么？可能更有益的事还是把那本科学哲学301教科书塞到参议员手里，此书的作者是哲学系一位雄心勃勃的年轻成员，他用无懈可击的清晰笔调描绘了理想的数学家在理想的世界里理想地工作的情景。

我们常听说数学的主要内容是“证明定理”，难道可以说作家的主要工作就是“写句子”吗？数学家的工作多半是猜测、类比、机敏的思考和挫折纠缠在一起。证明远非数学发现的核心，它多半是承认我们的思维不是在玩把戏的一种方法。在戴维斯和赫什之前是不大有人敢于公然地这样讲的。对于数学来说，定理并不像餐桌上一道道烧得成功的菜一样。营养角度的类比是错误的。

① 格罗登迪克(1928—)，法国数学家，菲尔兹奖获得者。——译者注

② 根岑(1909—1945)，德国数学家。——译者注

③ 普罗克斯迈尔(1915—)，1957年起当选为美国参议员。他以反对政府开支的浪费，特别是军事上的挥霍而著称。——译者注

掌握数学就是掌握一种难以捉摸的观点，它需要一种不使演奏拘泥于标准的艺术家的技巧。几何定理与整个几何学领域的关系，并不是元素与集合的关系。这里的关系是更微妙的，戴维斯和赫什对这一关系作了难得的忠实的描述。

经过戴维斯和赫什的工作，就难以支持对数学的这种扑朔迷离的观点了。作者通过有充分根据的叙述，指出数学的奥秘不过是心智活动中产生的结论得到了有力的实际应用。戴维斯和赫什选择的方法是描述这个奥秘而不是把它巧辩过去。

使数学易于为受过教育的外行所理解，同时又保持其高度的科学性，一向被认为是在专业蔑视的希勒(Scylla)岩礁①与大众误解的克雷伯迪斯(Charybdis)大漩涡②之间作风云莫测的航行。戴维斯和赫什已经张满风帆渡过了这个海峡。他们开创了生存所不可缺少的数学经验的讨论。从他们的船尾望去，看到过分简单化的漩涡已后退到远处，我们可以宽慰地舒一口气了。

吉安-卡洛·罗塔

1980年8月9日

① ② 希勒岩礁在意大利墨西拿(Messina)海峡上，对面有克雷伯迪斯大漩涡。

——译者注

几何学追求的知识是关于永恒的知识。

——柏拉图,《共和国》Ⅶ,527

时而清晰……时而模糊的东西……就是……数学。

——拉卡托斯,1922—1974

规定了、整理了、事实上的东西,永远不足以囊括全部真理:生活总是要溢出每一只杯子的边沿。

——帕斯捷尔纳克(Boris Pasternak)①,1890—1960

① 帕斯捷尔纳克,苏联诗人和翻译家。——译者注