TEST MODELING METHOD FOR DYNAMIC SYSTEM

动态数学模型测试建模方法

王跃钢 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

动态数学模型测试建模方法

王跃钢　编著

西安电子科技大学出版社

内容简介

本书系统地介绍了动态数学模型测试建模的概念、理论与应用技术，内容包括建模方法基础知识、建立动态数学模型的频域方法和时域方法、测试数据时间序列分析建模法以及非平稳数据建模方法等。

本书不但注重基础理论的讲解，也注重工程算法的研究。书中的应用实例均取自作者的研究成果。

本书可作为工科高等院校控制类专业高年级本科生和研究生的教材，也可作为该领域科技工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

动态数学模型测试建模方法/王跃钢编著. 一西安：西安电子科技大学出版社，2012.3

ISBN 978-7-5606-2760-1

Ⅰ. ① 动… Ⅱ. ① 王… Ⅲ. ① 数学模型：动态模型 Ⅳ. ① O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 023733 号

策　　划　戚文艳

责任编辑　阎　彬　戚文艳

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西光大印务有限责任公司

版　　次　2012 年 3 月第 1 版　2012 年 3 月第 1 次印刷

开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印 张 8

字　　数　181 千字

印　　数　1～2000 册

定　　价　15.00 元

ISBN 978-7-5606-2760-1/O·0126

XDUP 3052001-1

前　言

建立数学模型是许多科学研究和工程实践的需要。一个良好的数学模型是人们认识系统，进而对系统进行分析和决策的必要条件。在导弹测试控制领域，经常需要对各种各样的测试数据建立数学模型，以进行仿真分析、控制器设计、性能指标计算评定、误差修正补偿、故障诊断和预测预报等。这些建模问题有一个共同特点，就是都需要由测试数据来建立数学模型。

本书以测控工程为应用背景，系统介绍动态系统测试建模的基本理论及其应用技术，重点介绍比较成熟且常用的系统，特别是线性系统的测试建模理论与应用技术。全书共分6章。第1章概述，介绍动态数学模型测试建模问题的起源、一般数学模型的分类以及建模方法。第2章建模方法基础知识，介绍本书用到的主要建模基础知识。第3章建立动态数学模型的频域方法，介绍给定传递函数模型结构，由频率特性数据估计传递函数参数的方法，给出由瞬态响应求传递函数的两步法的基本思想和步骤，并介绍了两步法的应用——多谐差相信号激励下的频域建模法。第4章建立动态数学模型的时域方法，介绍时域建模方法，包括非参数模型建模方法和参数类建模方法。第5章测试数据时间序列分析建模法，介绍根据含噪声的输出随机时间序列来建立输出时间序列的数学模型方法。第6章非平稳数据建模方法，介绍改进平稳信号模型求解算法用于非平稳信号处理的方法和对非平稳信号的模型系数进行在线或离线学习的方法。

本书的基本指导思想是突出动态系统的测试建模方法的主题，对系统建模分析理论与应用专题的介绍有所侧重，注重基本理论分析与实用技术相结合，适当穿插介绍一些前沿理论与技术，以便开阔读者视野，启发思路。书中不但给出了丰富的基础理论和各类算法，也包括作者多年来的理论研究和工程应用的成果。书中给出的实例对工程应用有较大的参考价值。

多年来，作者获得国家安全重大基础研究项目、国防预研项目、军队科研项目的资助，在测试与建模领域做了大量的理论和研究工作，并在第二炮兵工程学院控制科学与工程、仪器科学与技术学科的研究生课程中讲授了这些内容，效果良好。

在本书的写作过程中，得到了许多老师和同行的指导与支持，同时还得到了作者的研究生的大力帮助，其中邓卫强博士、徐洪涛硕士参与了相关的研究，他们为本书的第5、第6章内容的编写做了大量工作，杨颖涛博士、胡腾硕士及蔚跃、雷堰龙、陈苏邑硕士研究生为本书做了大量的文字整理工作，在此深表谢意。同事王新国博士为本书第5章内容提供了部分资料，并绘制了相关的插图，在此表示感谢。

本书引用了许多论著的结果（见参考文献），这些结果对本书内容有重要的指导作用，并使本书形成了一个完整的体系。在此对这些论著的作者表示衷心的感谢。

本书的出版得到了第二炮兵工程学院“导航、制导与控制”国家重点学科建设专项的资助，在此向关心支持本书出版的各级领导表示感谢。西安电子科技大学出版社对本书的出版给予了热情支持，在此深表谢意。

书中如有不妥之处，敬请读者批评指正。

编 著 者

2011 年 11 月

目　录

第1章　概　　述

1.1　问题的提出

在导弹测试控制领域，经常需要对各种各样的测试数据建立数学模型，以进行仿真分析、控制器设计、性能指标计算评定、误差修正补偿、故障诊断和预测预报等。例如：在进行陀螺仪漂移测试时需要由得到的数据建立陀螺仪漂移误差模型；对变换放大器、伺服机构等设备以及测发控系统的快速测试，可以通过由测试数据建立的数学模型计算设备或系统的性能指标；对于故障，需要通过由测试数据建立的数学模型来进行诊断。以上这些建模问题有一个共同特点，就是都需要由测试数据来建立数学模型。

事例一　随着机动发射对导弹控制系统快速测试的要求，对控制系统采用动态测试方法势在必行。动态测试的基本过程是：对系统施加动态激励获得响应数据，由响应数据建立系统的数学模型，最后从数学模型中计算系统的性能指标。在动态测试过程中数学模型起着关键作用。

事例二　现代战争对导弹武器制导精度提出了更高的要求，改进现役武器的性能是适应现代战争需要的迫切问题。通过对惯导系统进行全面的测试，建立完整的误差模型，根据数学模型对惯导系统实施有效补偿，是提高现役惯导系统使用精度的简便而有效的途径。数学模型在这里也起着重要的作用。

测发控系统故障预报、可靠性预测分析、仿真分析评估，都要用到数学模型，这些模型基本都要通过实验或测试来建立。

我们把由测试数据建立动态数学模型的过程所涉及的方法称为动态数学模型测试建模方法。研究动态数学模型测试建模方法是一项非常有意义的工作。

对测试数据建立数学模型，可以起到这样几个方面的作用：

（1）它可以准确地描述被测对象的主要特性，例如用线性方程或非线性方程来描述仪器仪表的特性曲线，从方程式便可很容易地看出系统的输入、输出关系；

（2）从系统的数学模型很容易看出被测对象的功能和特点，例如用线性方程来描述放大器的特性，用多项式来描述陀螺仪漂移的特性等；

（3）有了系统的数学模型，就便于研究系统的运动规律和进行特性分析，例如描述系统动态特性的数学模型，便可以定量地说明它的运动规律和各种动态特性；

（4）有了系统的数学模型，就便于研究它的仿真和设计的方法等；

（5）从系统的数学模型中可以方便地计算系统的静态与动态性能指标。

1.2 数学模型及其种类

数学模型是描述物理系统的运动规律、特性和输入与输出关系的一个或一组方程式。物理系统的特性分静态特性和动态特性两类。描述系统静态(工作状态不变或慢变过程)特性的模型称为静态数学模型。例如对各种放大器与回路做静态检查时，所求出的都是静态数学模型。描述系统动态或瞬态与过渡态特性的模型称为动态数学模型。例如对各种仪器和控制系统进行动态测试时，所求出的便是动态数学模型。静态特性和动态特性有显著的区别，因而静态与动态数学模型也有很大的差异，它们的建模方法也完全不同。本书重点讨论动态数学模型的建模方法及其应用。

对于模拟信号与连续系统需用连续数学模型来描述，例如微分方程、传递函数、状态空间等都是连续数学模型。对于离散信号与离散系统需用离散数学模型来描述，例如差分方程、离散传递函数、离散状态空间等都是离散数学模型。连续与离散数学模型的建模方法是本书讨论的重点。

信号与系统是确定性的，便可用确定性数学模型来描述其特性，例如做变换放大器传递系数检查时，所加的输入电压是确定性的，所建立的数学模型也是确定性的静态数学模型。描述随机信号或系统对随机信号响应的数学模型称为随机数学模型，例如陀螺仪的漂移、遥测速变信号以及干扰噪声信号的性质是随机的，要研究陀螺仪漂移、遥测信号，或要研究系统对干扰噪声的响应，都需要建立随机数学模型。随机数学模型也有连续的和离散的两种模型。本书主要讨论确定性数学模型的建模方法，其中有些建模方法也适用于建立随机模型。

可以用线性方程式(或组)来描述其特性的模型称为线性模型，例如许多放大器具有线性特性，便可用线性模型来描述其特性。用非线性方程式(或组)来描述其特性的模型称为非线性模型，例如加速度计具有明显的非线性特性，便需要用非线性模型来描述其特性。有的非线性系统在一定范围内可以用线性方程组来描述其特性，例如有的旋转变压器在小角度范围内具有线性特性，在大角度范围内则具有明显的非线性特性。

静态数学模型与动态数学模型，连续数学模型与离散数学模型，确定性数学模型与随机数学模型都有线性的和非线性的数学模型，所以线性与非线性是数学模型在数学上的主要特征。

从描述方式上来看，数学模型分参数模型和非参数模型两大类。如传递函数、差分方程、状态方程等称为参数模型，瞬态响应(脉冲响应曲线与阶跃响应曲线)和频率响应(幅频响应曲线、相频响应曲线、幅相频率特性曲线等)称为非参数模型。其实瞬态响应和频率响应都是由曲线或数据表格表示的，所以称它们为非参数模型。

1.3 建模方法

建立数学模型的方法有两大类：一类是分析法；另一类是系统辨识法。

分析法是根据系统的工作原理，运用各种物理定理(如能量守恒、动量矩定理、各种电

路定理等）推导出描述系统的数学模型（例如代数方程与微分方程等），这类方法是各门学科大量采用的。但是，它只能用于比较简单的系统（例如测试系统、过程检测、动力学系统、过程控制、飞行控制系统等），而且在建立数学模型的过程中必须做一些假设与简化，否则所建立的数学模型就会过于复杂，不易求解。例如对过程控制系统进行初步分析时，常用小干扰线性化方法列出各个环节的方程式及其参数，绘出系统方块图，求出整个控制系统的方程式。根据这种线性方程式容易进行系统的静、动态特性的分析研究。假如不应用小干扰线性化方法，将各个环节的非线性因素都予以考虑，最后求得的系统方程式就比较复杂，不易于进行分析研究。

系统辨识法是利用系统输入、输出的观测数据来建立数学模型的。例如对于一个复杂的测控系统，进行静态测试时，给系统输入一系列的标准量，并测出在该输入数据下的输出数据，根据这些数据就可以建立描述该系统输入、输出关系的静态数学模型和静态性能指标。给复杂系统输入一定的动态激励信号，记录下系统对该信号的瞬态响应，便可求出系统的动态数学模型。这类方法更适用于较复杂的系统，例如研究较复杂的控制对象的等效动态特性，稳定回路的稳定裕度、刚度，速率陀螺仪的相对阻尼系数等。在这些情况下，运用系统辨识的方法建立系统的动态数学模型均较为方便易行。

在某些情况下可以将两种方法结合起来，亦即运用分析法列出系统的理论数学模型，运用系统辨识法来确定模型中的参数，例如有些控制系统的运动方程式可以用动力学分析法求出，方程式中的参数可以用系统辨识法，通过动态测试实验求得。这两种方法结合起来，往往可以得到较好的效果，而且所求的数学模型的物理意义也比较明确。本书讨论的测试建模方法基本上属于系统辨识类方法，但也需要结合分析法进行模型阶次判定和模型验证。

1.4　建模中应注意的问题

1. 建模前的先验知识

虽然测试建模往往是在对被测对象完全不了解（黑箱）或了解不多（灰箱）的情况下进行的，但是人们总是希望在进行建模前尽可能多地获得有关对象的知识（先验知识），因为若对某些重要知识不了解，将会在建模过程中遇到很多困难，甚至造成错误。

根据获得的途径，先验知识可分为两类：一类是通过粗略理论分析得到的先验知识，另一类是通过简单预备实验获得的先验知识。

2. 输入测试信号的选择

在进行测试和建模实验时，必须确定系统的输入信号。输入信号可以利用系统正常工作时的信号，或是正常工作时系统内部的扰动信号，亦可以是外加的测试信号。对于在线测试，外加的测试信号不应对系统正常工作有明显的影响。

为了使系统是可辨识的，输入信号必须满足一定的条件，即：在辨识期间内系统必须能被输入信号持续激励，输入信号必须有足够多的谐波分量，使被辨识系统所有有用的模态都被激励起来。

3. 模型类及辨识方法的选择

建模时要选择合适的模型，通常要考虑以下几个因素：

（1）可辨识性：模型结构合理，输入信号持续激励，数据量充足。

（2）灵活性：能比较灵活地描述系统的动态特性，通常与模型的参数个数及其在模型中出现的方式有关。

（3）悭吝性：要本着节省原理，用尽可能少的参数模型来描述待辨识的系统。

（4）算法的复杂性：辨识算法不宜过于复杂，特别是对于有在线辨识要求的场合，算法尽可能简单。

（5）准则函数性质：任何一种建模算法都是通过极小化（或极大化）准则函数导出来的，因此算法收敛性质直接与准则函数的性质有关。

比较各种建模方法，一般可就下列三方面考虑：

（1）性能方面：估计精度及其与收敛性的关系。

（2）计算工作量：计算机容量和计算时间。

（3）所需的先验假设和条件。

第 2 章　建模方法基础知识

动态系统测试建模过程一般包括观测数据获取、数据检验、模型类型选择、模型参数辨识与估计、模型适用性检验等步骤，而建立一个准确的数学模型是解决实际问题的关键。要完成这些工作，建模者通常需要具有比较全面的应用数学基础知识。为此，在介绍各种测试建模方法之前，本章先简要介绍本书用到的主要建模基础知识。

2.1　变换域分析基础

对于一个给定的信号或动态过程，可以直接在时域中进行分析研究，也可以在频域等变换域中进行分析。傅立叶变换、拉普拉斯变换、Z 变换等都是常用的变换分析工具。本节重点介绍傅立叶变换基本概念、性质以及傅立叶变换、拉普拉斯变换和 Z 变换之间的内在联系，在此基础上介绍数学模型的时域、频域转换方法。

2.1.1　傅立叶变换

1. 傅立叶变换的概念

如果函数 $f(t)$ 满足傅立叶积分定理，由傅立叶积分公式

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2-1-1}$$

设

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{2-1-2}$$

则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2-1-3}$$

从上面两式可以看出，$f(t)$ 和 $F(\omega)$ 通过确定的积分运算可以互相转换。式(2－1－2)称为 $f(t)$ 的傅立叶变换式。式(2－1－3)称为 $F(\omega)$ 的傅立叶逆变换式。

2. 傅立叶变换的性质

(1) 线性。令 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 的傅立叶变换分别是 $F[f_1(t)]$、$F[f_2(t)]$，并令 $f(t)=a f_1(t)+b f_2(t)$，则

$$F[f(t)]=aF[f_1(t)]+bF[f_2(t)] \tag{2-1-4}$$

(2) 时移特性。令 $y(n)=x(n-n_0)$，则

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-n_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(l+n_0)} \tag{2-1-5}$$

即

$$Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{2-1-6}$$

(3) 对称性。令 $f(t)$的傅立叶变换为 $F(\omega)$，则

$$F[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \tag{2-1-7}$$

(4) 奇偶虚实性。无论 $f(t)$是实函数还是复函数，下面公式均成立：

$$F[f(t)] = F(\omega) \tag{2-1-8}$$

$$F[f(-t)] = F(-\omega) \tag{2-1-9}$$

$$F[f^*(t)] = F^*(-\omega) \tag{2-1-10}$$

$$F[f^*(-t)] = F^*(\omega) \tag{2-1-11}$$

(5) 尺度变换特性。若 $F[f(t)] = F(\omega)$，则

$$F[f(at)] = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad a>0 \tag{2-1-12}$$

$$F[f(at)] = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\frac{x}{a}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\quad a<0 \tag{2-1-13}$$

(6) 频移特性。若 $F[f(t)] = F(\omega)$，则

$$F[f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = F(\omega-\omega_0) \tag{2-1-14}$$

同理

$$F[f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}] = F(\omega+\omega_0) \tag{2-1-15}$$

(7) 微分特性。若 $F[f(t)] = F(\omega)$，则

$$F\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{j}\omega F(\omega) \tag{2-1-16}$$

$$F\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega) \tag{2-1-17}$$

(8) 积分特性。若 $F[f(t)] = F(\omega)$，$F[0] = 0$，则

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega} \tag{2-1-18}$$

若 $F[0] \neq 0$，则

$$F\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \frac{F(\omega)}{\mathrm{j}\omega} + \pi F(0)\delta(\omega) \tag{2-1-19}$$

3. 离散傅立叶变换(DFT)

1) 离散傅立叶变换定义

周期序列实际上只有有限个序列值有意义，因此它的许多特性可推广到有限长序列上。

设一个长为 N 的有限长序列 $x(n)$为

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

为了引用周期序列的概念，假定一个周期序列 $\tilde{x}(n)$由长度为 N 的有限长序列 $x(n)$延拓而成，它们的关系是

$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) \\ x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n), & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0, & 其它 \end{cases} \end{cases} \tag{2-1-20}$$

2）周期序列的主值区间与主值序列

对于周期序列 $\tilde{x}(n)$，定义其第一个周期 $n=0 \sim N-1$，为 $\tilde{x}(n)$的“主值区间”，主值区间上的序列为主值序列 $x(n)$。

$x(n)$与 $\tilde{x}(n)$的关系可描述为：$\tilde{x}(n)$是 $x(n)$的周期延拓，$x(n)$是 $\tilde{x}(n)$的“主值序列”。

数学表示为

$$\begin{cases} \tilde{x}(n) = x((n))_N \\ x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = x((n))_N R_N(n) \end{cases} \tag{2-1-21}$$

其中，$R_N(n)$为矩形序列；符号$((n))_N$是余数运算表达式，表示 n 对 N 求余数。

3）频域上的主值区间与主值序列

周期序列 $\tilde{x}(n)$的离散傅氏级数 $\tilde{X}(k)$也是一个周期序列，也可给它定义一个主值区间 $0 \leqslant k \leqslant N-1$ 以及主值序列 $X(k)$。

数学表示为

$$\begin{cases} X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \\ \tilde{X}(k) = X((k))_N \end{cases} \tag{2-1-22}$$

长度为 N 的有限长序列 $x(n)$，其离散傅立叶变换 $X(k)$仍是一个长度为 N 的有限长序列，它们的关系为

$$X(k) = \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1 \tag{2-1-23}$$

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{2-1-24}$$

$x(n)$与 $X(k)$是一个有限长序列离散傅立叶变换对，已知 $x(n)$就能唯一地确定 $X(k)$，同样已知 $X(k)$也就唯一地确定 $x(n)$，实际上 $x(n)$与 $X(k)$都是长度为 N 的序列（复序列），都有 N 个独立值，因而具有等量的信息。

2.1.2　傅立叶变换与拉氏变换、Z 变换之间的关系

1. 傅立叶变换与拉氏变换的关系

考虑一个时间函数 $x(t)$，其性能要求足够的好，以至于当 σ 充分大时 $e^{-\sigma t}x(t)$ 满足绝对可积条件。现在来计算 $e^{-\sigma t}x(t)$的傅立叶变换：

$$F[e^{-\sigma t}x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}\,dt = X\left(\frac{\sigma+j\omega}{j}\right) = X_1(\sigma+j\omega) \tag{2-1-25}$$

式中，$X_1(a) = X_1\left(\frac{a}{j}\right)$，对应的反变换是

$$e^{-\sigma t}x(t) = F^{-1}[X_1(\sigma+j\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\sigma+j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega \tag{2-1-26}$$

将收敛因子移到上式右侧，得到

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\sigma+\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}\,\mathrm{d}\omega \tag{2-1-27}$$

由于 σ 与 $\mathrm{j}\omega$ 总是一起出现，我们定义新变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，于是得到 $\mathrm{d}\omega=-\mathrm{j}\mathrm{d}s$，并且可以把上述变换对写为

$$\begin{aligned}X_1(s)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\\ x(t)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{\sigma-\infty}^{\sigma+\infty}X_1(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2-1-28}$$

式(2-1-28)就是著名的拉普拉斯变换和拉普拉斯反变换，通常简称为拉氏变换和拉氏反变换。

上述过程描述了傅立叶变换与拉氏变换之间的关系。当要求用频域观点解释拉氏变换的结果时，理解这个关系特别有用。换句话说，傅立叶变换是当 $\sigma=0$ 时拉氏变换的特例。

2. Z 变换与拉氏变换的关系

1) z 平面与 s 平面的映射关系

理想采样序列 $x_s(t)$的拉氏变换是 $X_s(s)$，序列 $X[n]$的 Z 变换是 $X(z)$，由 Z 变换的定义可知，两者是由复变量 s 平面到复变量 z 平面的映射变换，映射关系为 $z=\mathrm{e}^{sT}$。因为 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，故 $z=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)T}=\mathrm{e}^{\sigma T}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}$。显然，这是复平面上的一个旋转矢量，其矢径 r、矢角 θ 分别为

$$r=\mathrm{e}^{\sigma T},\quad \theta=\omega T$$

由此表明，复变量 z 的模 r 对应 s 的实部 σ，z 的辐角 θ 对应 s 的虚部 ω。z 平面与 s 平面的映射关系见表 2-1-1。s 平面上的虚轴($\sigma=0$，$s=\mathrm{j}\omega$) 映射到 z 平面是单位圆；其左半平面映射到 z 平面的单位圆内($\sigma<0$，$r<1$)；右半平面映射到 z 平面的单位圆外($\sigma>0$，$r>1$)；平行于虚轴的直线(σ 为常数)映射到 z 平面上是圆；s 平面上的实轴($s=\sigma$，$\omega=0$)映射到 z 平面是正实轴；s 平面上通过 $\pm\frac{\mathrm{j}k\omega_s}{2}$($k=1$，3，…)而平行于实轴的直线映射到 z 平面是负实轴($\theta=\pm\pi$)。

表 2-1-1　z 平面与 s 平面的映射关系

z 平面($z=r\angle\theta$)			s 平面($s=\sigma+\mathrm{j}\omega$)		
几何位置	$r=\mathrm{e}^{\sigma T}$	$\theta=\omega T$	几何位置	σ	ω
单位圆	$=1$	任意值	虚轴	$=0$	任意值
单位圆内	<1	任意值	左半平面	<0	任意值
单位圆外	>1	任意值	右半平面	>0	任意值

2) 离散序列拉氏变换与 Z 变换的周期性

我们知道，离散时间序列的拉氏变换为

$$X_s(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}x(nT)\mathrm{e}^{-nTs}$$

类似地，对于 $X_s\left[s+\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right]$$\left(\text{即在 } s \text{ 平面上沿虚轴平移}\frac{2\pi}{T}\right)$，有

$$X_s\left[s+\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right]=\sum_{n=0}^{+\infty}x(nT)\mathrm{e}^{-nT\left[s+\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{T}\right)\right]}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}x(nT)\mathrm{e}^{-nTs}=X_s(s) \qquad (2-1-29)$$

这样，$X_s(s)$在 s 平面内沿虚轴方向具有周期性，其周期大小 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$。根据 $z-s$ 的映射关系，在 s 平面上虚轴上的周期移动，对应 z 平面上为沿单位圆的周期旋转，且旋转周期为 ω_s。换句话说，在 s 平面上沿虚轴每移动 ω_s，则对应在 z 平面上为沿单位圆旋转一周。上述事实表明，$z-s$ 映射并不是单值的。为了形象地理解上述关系，不妨把 z 平面想象成以原点为中心的无穷多层叠在一起的螺旋面(螺距为 0 或无穷小)。当 s 平面沿虚轴变化时，映射到 z 平面上则是矢径不变，仅辐角 θ 增加，当 ω 每增加一个采样频率 ω_s 时，对应 z 平面上辐角增加 2π，即螺旋面旋转一周。

3. Z 变换与傅立叶变换的关系

傅立叶变换是拉氏变换在 s 平面虚轴上的特例，即 $s=\mathrm{j}\omega$。而理想采样序列的 FT($X_s(\omega)$)是连续函数 FT($X(\omega)$)沿虚轴的周期延拓。由于 s 平面的虚轴映射到 z 平面上是单位圆 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega T}$，因此，采样序列在单位圆上的 Z 变换就等于理想采样函数的傅立叶变换(频谱)。而采样序列频谱的周期性延拓，表现在 z 域中即为单位圆上的重复循环，亦可想象为直径等于 1 而螺距为无穷小的螺旋线。总结为一句话，就是采样序列在单位圆上的 Z 变换，就等于其理想采样信号的傅立叶变换。

2.1.3 时域与频域非参数模型的转换

对于一个给定的信号或动态过程，我们既可以直接在时域内进行分析，也可以在频域等变换域中进行分析，甚至有些系统需要在时域、频域同时进行分析。不同的系统有不同的分析方法，比如许多线性自动控制系统(或其它线性系统如测量系统等)及其元件不便于做频率特性实验，而便于进行时域瞬态响应(过渡过程)实验，其测试结果是动态系统的脉冲响应，是时域的非参数模型。而有一些系统，例如放大器、电气与电子元器件与系统等，便于做频域的动态特性测试，在这种情况下，欲了解这些元件与系统相应的时域动态特性，便需要应用由频域非参数模型换算成时域非参数模型的方法。因此，需要研究换算时域与频域动态特性的方法。

傅氏变换建立了时域和频域之间的联系。而傅氏变换对于一些有限长序列的计算量太大，很难实时实现。因此，需要用快速傅氏变换算法(FFT)来处理。对于连续信号的傅氏变换来说，当采样频率不够高时，用 FFT 算法有混叠效应。为了解决这种混叠效应，这里介绍一种无混叠效应快速傅氏变换算法(简记为 WFFT)。下面简要介绍这种方法的主要思路以及它同现有 FFT 算法的不同点。

1. 傅立叶变换的近似算法(WFFT)

对非带限信号 $x(t)$以等间隔 Δt 采样得 N 个采样点值 $x(n)$；在 Δt 内分别用分段光滑函数来逼近 $x(t)$，进行数值积分，即用数值积分法计算傅氏积分。采用的光滑函数有阶梯线、直线和抛物线，从而形成了 WFFT 的三种算法，即阶梯线法、梯形法和辛普生法。下