中学生数学思路开拓丛书

ZHONG XUE SHENG SHU XUE
SI LU KAI TUO CONG SHU

平面几何命题的三角证法

熊曾润 著

河南教育出版社

中学生数学思路开拓丛书

平面几何命题的三角证法

熊曾润 著

河南教育出版社

中学生数学思路开拓丛书
平面几何命题的三角证法
熊曾润　著
责任编辑　张国旺
河 南 教 育 出 版 社 出 版
郑 州 市 中 华 印 刷 厂 印 刷
河 南 省 新 华 书 店 发 行
787×1092毫米　32开本　5.875印张　121千字
1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷
印数1－6,026册
ISBN 7－5347－0917－2／G.764
定价　1.65元

前　言

现时在中学里，证明平面几何命题多采用纯几何法。采用这种方法证题，很难掌握证明的规律，人们常常不得不为寻求一条神奇、奥秘的辅助线而瞑思苦索，耗费大量的时间和精力。

采用三角证法来证明平面几何命题，思路简单，有一定规律可循，一般都不必添作辅助线，个别情况下即使需要添作辅助线，该辅助线也比较简单而容易想出。

本书比较详细地介绍了平面几何命题的三角证法。它是作者多年教学研究的心得体会，可供中学生学习研究，也可供中学数学教师及师范院校数学系学生参考。为了帮助读者掌握证明的规律和技巧，本书将平面几何证明题按其求证的事项进行分类，阐述了常见的各类几何题的证明方法和步骤，并以范例加以说明，书中还选编了一定数量的习题，供读者练习。

本书第二节“常用的三角公式”，是专为只具有初中水平的读者而编写的，这些公式是运用三角证法证题时必备的工具。对于具有高中一年级水平的读者来说，这一节可以略而不读。

本书原稿承蒙挚友冯长彬副教授进行校阅，并提出宝贵意见，作者在此表示深切的谢意，

由于作者水平有限，书中不免有失误和不妥之处，敬请读者批评指正。

作　者

1989年3月于赣南师院

目　录

一　什么叫平面几何命题的三角证法？

平面几何是研究平面图形性质的科学．两千多年前，希腊数学家欧几里德（Euclid，约公元前330—275年）总结前人的研究成果，编成《几何原本》十三卷．它从一些特别提出的公理、公设、定义出发，按一定的逻辑顺序，有计划地来论证其他几何命题，第一次把前人丰富而零散的几何材料，整理成了一个逻辑严明的体系——通常称为欧氏几何体系．这是人类历史上的一部科学杰作，一直为后世所推崇．现在中学生学习的平面几何，基本上还是欧几里德的几何体系．长期的实践证明，按照欧氏体系来学习平面几何，对于培养逻辑思维能力，确实具有重要的作用．

但是，事物都有两重性．欧氏几何的构思之难，往往使学习者望而生畏．按欧氏体系来证明平面几何命题，需要较高的技巧，很难掌握证明的一般规律，人们常常不得不为寻求一条神奇奥秘的辅助线而瞑思苦索，耗费大量的时间和精力．因此，开辟新的证明途径，已是势在必行．于是，平面几何命题的解析证法、向量证法、复数证法、三角证法应运而生了．近年来，这些证法已为越来越多的数学工作者所重视，引起了数学教育界的普遍关注．

那么，什么叫平面几何命题的三角证法呢？让我们先来看几个实例吧．

例1　已知圆内接四边形$ABCD$两对角线相交于M．

求证：$\dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}=\dfrac{AM}{CM}$.

证明 如图1—1，由正弦定理可知，在$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ABM$和$\triangle BCM$中，有

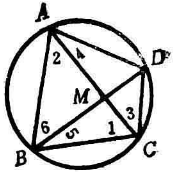

图1—1

$$\frac{AB}{CB}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2},$$

$$\frac{AD}{CD}=\frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 4},$$

$$AM=\frac{BM\sin\angle 6}{\sin\angle 2},\quad CM=\frac{BM\sin\angle 5}{\sin\angle 1}.$$

于是，$$\frac{AB\cdot AD\cdot CM}{CB\cdot CD\cdot AM}=\frac{\sin\angle 3\sin\angle 5}{\sin\angle 4\sin\angle 6}.$$

但由圆周角定理，知$\angle 3=\angle 6$，$\angle 5=\angle 4$，所以，

$$\frac{\sin\angle 3\sin\angle 5}{\sin\angle 4\sin\angle 6}=1.$$

从而，$\dfrac{AB\cdot AD\cdot CM}{CB\cdot CD\cdot AM}=1$，即 $\dfrac{AB\cdot AD}{CB\cdot CD}=\dfrac{AM}{CM}$.

例2 求证：如果一个四边形的两组对边的平方和相等，那么这个四边形的两条对角线互相垂直。

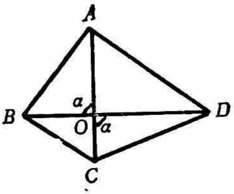

图1—2

证明 如图1—2，设AC、BD相交于O，$\angle AOB=\alpha$，则$\angle COD=\alpha$，$\angle BOC=\angle AOD=180^\circ-\alpha$. 由余弦定理可知，在$\triangle BOA$、$\triangle DOC$、$\triangle COB$

和$\triangle AOD$中，有

$$AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\alpha, \tag{1}$$

$$CD^2=CO^2+DO^2-2CO\cdot DO\cos\alpha, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}BC^2&=BO^2+CO^2-2BO\cdot CO\cos(180^\circ-\alpha)\\&=BO^2+CO^2+2BO\cdot CO\cos\alpha,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}DA^2&=DO^2+AO^2-2DO\cdot AO\cos(180^\circ-\alpha)\\&=DO^2+AO^2+2DO\cdot AO\cos\alpha.\end{aligned} \tag{4}$$

又依题设，有

$$AB^2+CD^2=BC^2+DA^2. \tag{5}$$

将(1)、(2)、(3)、(4)代入(5)，经整理，得

$$(AO\cdot BO+BO\cdot CO+CO\cdot DO+DO\cdot AO)\cos\alpha=0.$$

但$AO\cdot BO+BO\cdot CO+CO\cdot DO+DO\cdot AO>O$，所以，

由上式，得$\cos\alpha=0$．　　(6)

注意$0^\circ<\alpha<180^\circ$，由(6)可知，$\alpha=90^\circ$，即$AC\perp BD$.

例3　两定圆$\odot O$和$\odot O'$相交于A、A'两点，任作一直线与两圆顺次相交于B、D、C、E．求证：$\dfrac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}$为定值.

证明　如图1—3，设$\odot O$与$\odot O'$的半径分别为R与r．由正弦定理，得

$$AB=2r\sin\angle 3,$$

$$AC=2r\sin\angle 1,$$

$$AD=2R\sin\angle 4,$$

$$AE=2R\sin\angle 2.$$

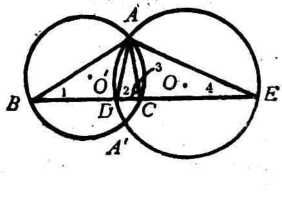

图1—3

于是，

$$\frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}=\frac{r^2\sin\angle 1\sin\angle 3}{R^2\sin\angle 4\sin\angle 2}. \qquad (1)$$

又根据正弦定理，在$\triangle ABE$和$\triangle ADC$中，有

$$\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 4}=\frac{AE}{AB},\quad \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle 2}=\frac{AD}{AC}. \qquad (2)$$

将(2)代入(1)，就得

$$\frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}=\frac{r^2\cdot AE\cdot AD}{R^2\cdot AB\cdot AC}.$$

即 $$\left(\frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}\right)^2=\frac{r^2}{R^2},\qquad \therefore\ \frac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}=\frac{r}{R}.$$

因为r与R都是定值，所以，$\dfrac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}$为定值.

以上三例的证明方法，就是所谓三角证法，其特点是以三角函数式为媒介来证明几何结论．一般地说，平面几何命题的三角证法，就是以三角函数式为媒介来证明几何结论的方法．

现在要问：用三角证法来证明平面几何命题，是否普遍可行呢？回答是肯定的．

事实上，所有平面几何命题，一般可按其结论分为两大类：一类是刻划几何元素之间的数量关系的，如求证线段、角、面积的数量关系等；另一类是刻划几何元素之间的位置关系的，如求证两直线垂直或平行、诸点共线、诸线共点等．而几何元素之间的位置关系，往往都可以转化为几何元素之间的数量关系来讨论．因此在平面几何中，求证几何元素之间的数量关系的命题是基本的、普遍的．注意到平面几

何所研究的图形都是直线形和圆，这些图形中的几何元素之间的数量关系，一般都可以用三角函数式表示出来，这就使得用三角证法来证明平面几何命题成为普遍可行的了。

二　常用的三角公式

下列诸命题给出的三角函数公式，是运用三角证法证明几何命题时常用的工具．我们仅就α与β为锐角的情况来证明这些公式．当引入任意角的三角函数定义及诱导公式以后，不难证明，α与β为任意角时这些命题的结论仍然成立．

命题1　如果α与β都是锐角，那么

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{\alpha+\beta})$$

证明　如图2－1，设$\angle AOC=\alpha$，$\angle COB=\beta$，则$\angle AOB=\alpha+\beta$．过C作OC的垂线分别与OA、OB相交于A、B．于是，显然有

$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle COB}.\text{（注）}$$

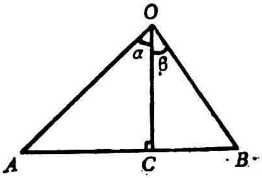

图2—1

即
$$\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin\alpha+\frac{1}{2}OC\cdot OB\sin\beta.$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\frac{OC}{OB}+\frac{OC}{OA}\sin\beta$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

这就证明了公式$(S_{\alpha+\beta})$．

（注）符号$S_{\triangle PQR}$表示$\triangle PQR$的面积

在命题 1 中 令$\beta=\alpha$，就得

推论　如果α是锐角，那么

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \qquad (S_{2\alpha})$$

命题2　如果$0°<\beta\leqslant\alpha<90°$，那么

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (S_{\alpha-\beta})$$

证明　如图 2—2，设$\angle AOC=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，则$\angle AOB=\alpha-\beta$．过C作OC的垂线分别与OA、OB相交于A、B．于是，显然有

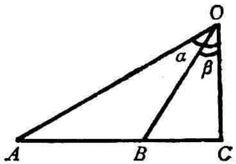

图 2—2

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOC}-S_{\Delta BOC}.$$

即
$$\frac{1}{2}OA\cdot BO\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin\alpha-\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\beta.$$

$$\therefore\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\frac{OC}{OB}-\frac{OC}{OA}\cdot\sin\beta$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

这就证明了公式($S_{\alpha-\beta}$)．

命题3　如果α和β都是锐角，那么

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{\alpha+\beta})$$

证明　如图 1—1，根据余弦定理，在$\triangle OAB$中，有

$$2\cdot OA\cdot OB\cos(\alpha+\beta)=OA^2+OB^2-(AC+CB)^2$$
$$=(OA^2-AC^2)+(OB^2-CB^2)-2AC\cdot CB$$
$$=2\cdot OC^2-2AC\cdot CB.$$

$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\frac{OC}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}-\frac{AC}{OA}\cdot\frac{CB}{OB}$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

这就证明了公式($C_{\alpha+\beta}$).

在命题3中令$\beta=\alpha$，就得

推论　如果α是锐角，那么

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \qquad (C_{2\alpha})$$

命题4　如果$0^\circ<\beta\leqslant\alpha<90^\circ$，那么

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \qquad (C_{\alpha-\beta})$$

这个命题可以利用图2—2，仿照命题3的证法给予证明，请读者证明之.

命题5　如果α和β都是锐角，那么

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (T_{\alpha+\beta})$$

证明　由公式($S_{\alpha+\beta}$)和公式($C_{\alpha+\beta}$)可得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

此式右边的分子、分母同除以$\cos\alpha\cos\beta$，就可以得到公式($T_{\alpha+\beta}$).

在命题5中令$\beta=\alpha$，就得

推论　如果α是锐角，那么

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (T_{2\alpha})$$

命题6　如果$0^\circ<\beta<\alpha$且$\alpha+\beta<180^\circ$，那么，

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (S_\alpha+S_\beta)$$

证明 如图2—3，设$\angle AOC=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，截取$OA=OB$，连结AB，再作$OD\perp AB$交AB于D，则有

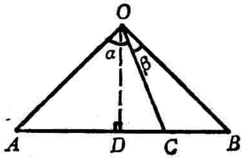

图2—3

$$\angle AOD=\angle DOB$$

$$=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\angle COD=\angle DOB-\angle COB=\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因为 $S_{\triangle AOC}+S_{\triangle COB}=S_{\triangle AOB}$，所以，

$$\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin\alpha+\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\beta=\frac{1}{2}AB\cdot OD$$

$$=AD\cdot OD=OA\sin\angle AOD\cdot OC\cos\angle COD$$

$$=OA\cdot OC\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

注意$OB=OA$，上式两边同除以$\frac{1}{2}OA\cdot OC$，就可以得到公式$(S_\alpha+S_\beta)$。

命题7 如果$0°<\beta<\alpha$且$\alpha+\beta<180°$，那么，

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\ (S_\alpha-S_\beta)$$

这个命题可以仿照命题6的证法给予证明，请读者证明之。

三　证线段相等

运用三角证法来证明平面几何命题，思路比较简单，有一定规律可循，一般可以不必添作辅助线．有时即使需要添作辅助线，需作的辅助线也比较简单而容易想出．为了帮助读者掌握三角证法的证明技巧和证题规律，我们将平面几何证明题按其欲证的事项进行分类，分别介绍各类几何证明题的具体证法．

本节介绍证明线段相等的方法．在往后的各节中，将分别介绍其他各类几何证明题的证明方法．

证明已知图形中的两条线段a与b相等，主要利用正弦定理来引入三角函数式，作为证题的媒介．证明的方法和步骤是：

第一步，运用正弦定理考察已知图形中有关的边和角之间的关系，写出$\frac{a}{b}$（或$\frac{a^2}{b^2}$）的三角表达式；

第二步，根据已知条件，将这个三角表达式化简，证明它的值等于1，就可得到欲证的几何结论．

例1　在$\triangle ABC$中，已知$AB=AC$，在AB上取一点D，在AC的延长线上取一点E，使$BD=CE$，连结DE交BC于F．求证：$DF=FE$．

证明　如图3—1，由正弦定理可知，在$\triangle DBF$和$\triangle CFE$中，有

$$DF=\frac{BD\sin\angle B}{\sin\angle 1},$$

$$FE=\frac{CE\sin\angle 3}{\sin\angle 2}.$$

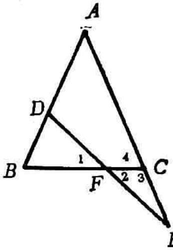

图 3—1

于是，
$$\frac{DF}{FE}=\frac{BD\sin\angle B\sin\angle 2}{CE\sin\angle 1\sin\angle 3}$$

$$=\frac{\sin\angle B}{\sin\angle 3}$$

（$\because BD=CE$，$\angle 1=\angle 2$）

$=1.$（$\because AB=AC$，$\therefore\angle B=\angle 4=180°-\angle 3$）

所以，$DF=FE$.

例2 一直线与$\triangle ABC$的边AB、AC及BC的延长线分别交于D、E、F，且$AE:EC=BF:CF$. 求证：D是AB的中点.

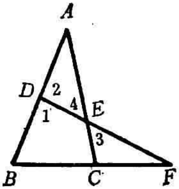

图 3—2

证明 如图3—2，由正弦定理可知，在$\triangle ADE$和$\triangle DBF$中，有

$$AD=\frac{AE\sin\angle 4}{\sin\angle 2},$$

$$DB=\frac{BF\sin\angle F}{\sin\angle 1}.$$

于是，
$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE\sin\angle 4\sin\angle 1}{BF\sin\angle 2\sin\angle F}$$

$$=\frac{AE\sin\angle 3}{BF\sin\angle F}$$（$\because\angle 1+\angle 2=180°$，

$\angle 4=\angle 3$）