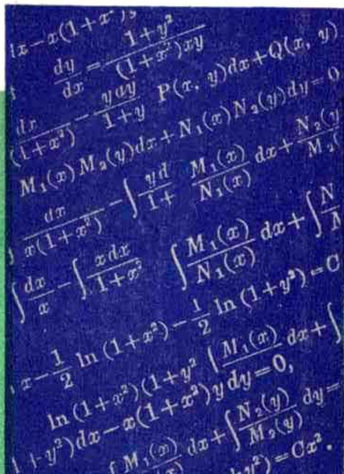
WEIJIFENXUEYINLUN WEIJIFENXUEYINLUN

微积分学引论

上册



姚天行　陈　仲

南京大学出版社

微积分学引论

·上册·

姚天行　陈　仲

南京大学出版社

1991·南京

内 容 简 介

本书根据国家教委1989年审定的“综合大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求”与南京大学教学实际情况编写。全书分上下两册，上册包括函数与极限、导数与微分、一元函数积分学、级数等，下册包括空间解析几何、偏微分学、重积分、线积分、面积分、场论、广义积分等内容。

本书基础厚实，文字通顺，许多内容的处理采用了与众不同的方法，使证明更加简捷、严密，有些定理的证明是作者自己得到的最新方法。例题和习题丰富，有利于提高读者的分析能力。书末附有习题答案与提示。

本书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材。也可供工程技术人员阅读。其中小号字可略去不讲，仍保持完整的系统性。

微 积 分 学 引 论

·上 册·

姚天行 陈 仲

南京大学出版社出版
(南京大学校内)
江苏省新华书店发行　　江苏丹阳新华印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32　印张 11.25　字数 291 千
1991年8月第1版　1991年8月第1次印刷
印数 1—3000
ISBN 7-305-01048-0/O·61
定价 3.70 元

编者的话

本书是根据国家教委1989年审订的“综合大学本科物理类专业高等数学课程教学基本要求”与南京大学教学实际情况编写的教材。

众所周知，微积分学是理工科教学中十分重要的一门基础课。自从17世纪牛顿和莱布尼兹创立微积分以来的300多年中，这门学科的理论与方法不断发展与完善，它的基本概念与方法已广泛渗透到现代科学技术各个领域之中。我们编写本教材的主旨是使学生在获得微积分的基本概念、基本原理和基本解题技巧的同时能受到数学逻辑思维的严格训练。因此，我们在编写过程中力求做到基本理论的系统性与叙述的严密性，努力避免不少教材中存在的疏漏之处，并在内容的处理上使之有其特色。学生在学完初等数学，具备初等代数、三角与平面解析几何知识便可学习本教材。本书中除了极少数与大纲相距甚远的概念与定理（如实数的严格定义、傅里叶积分、函数行列式等）未能涉及，其余定理均尽量给出简洁、严格的证明。教材中对极限$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$、定积分中值定理、一般形式的弧长公式、曲线积分、正交曲线坐标下的三度、广义积分的级数判别法等许多内容的处理采用了与众不同的方法，使证明更加简捷或使理论更加严密，更加系统化。

本教材十分注意对学生解题技巧与演算能力的培养。在教材中选配了不少难易程度不同的例题与习题。习题分为A、B两组。A组题是学生必须掌握的基本内容。B组题是较高要求，其中某些习题超出大纲范围，但对有志于攻读硕士研究生的读者来说是有所裨益的。书末附有习题解答与提示。对难度较大的习题均可

从中找到解题的主要途径。

全书分上下两册。上册包括函数与极限、导数与微分、一元函数积分学、级数等内容，下册包括空间解析几何、偏微分学、重积分、线积分、面积分、场论、广义积分等内容。全书可在140学时内(不包括习题课)教完。

书中用“*”标出的内容及小字印刷部分供教师选用或留给学生课外阅读。

本书是我们多年从事这门课程教学的产物。上下册分别由姚天行与陈仲执笔编写。由于水平有限，疏漏之处在所难免，热切欢迎同行及读者批评指正。

南京大学物理系范北宸先生曾根据后继课的要求对本书内容提出了详尽的建议。南京大学数学系许绍溥、姜东平、张天岑审阅了本书上下册，提出了许多宝贵的修改意见。黄骏敏、王绳俊、滕利邦、江惠坤、范克新、郑德传、孙慧澄以及南京师范大学方锦暄、李君华、沈兴钧等老师曾使用过本教材，并提出了十分有益的建议。本书在筹备、出版过程中得到南京大学校领导、教务处与数学系的关怀与支持，得到系副主任朱乃谦及南京大学出版社的大力帮助。编者在此一并表示衷心的感谢。

目　录

第一章　函数与极限

第二章　导数与微分

第三章　一元函数积分学

第四章 级 数

第一章　函数与极限

第一节　实　数　集

§1.1.1　集合与映射

人们在认识客观世界的过程中，常常根据研究对象的不同特性，将它们分门别类地进行研究．例如，“物理系一年级全体学生”，“所有的有理数”，“某平面上全部三角形”等等．我们把具有某种性质的研究对象的全体称为具有该性质的**集合**．上述三个例子可叙述为“物理系一年级学生的集合”，“有理数集合”，“某平面上三角形集合”等等．

集合通常用大写字母 A, B, S, S_1 等表示．集合中的每一个个别的对象称为集合的**元素**，通常用小写字母 a, b, x 等表示．a 是集合 A 的元素，记为 $a\in A$，读作“a 属于 A”．b 不是的 A 元素，记为 $b\notin A$ 或 $b\overline{\in} A$，读作“b 不属于 A”．在我们的研究对象中，当明确了哪些元素属于 A，哪些元素不属于 A，那么集合 A 就确定了．因此集合是用 $\in$ 与 $\notin$ 来表达的概念．

只含有限多个元素的集合称为**有限集**．含无穷多个元素的集合称为**无限集**．

表示集合的方法主要有列举法和描述法两种．

用把集合中所有的元素一一列举出来表示集合的方法称为**列举法**．例如要给出“物理系一年级学生的集合”可以用学生登记册表示出来．又如集合 A 是由 1 与 5 这两个自然数组成的集合，可以写成

$$A=\{1, 5\}.$$

用描述集合中元素特征而给出集合的方法称为**描述法**。例如，B 是偶数集合，可记为

$$B=\{2n|n\text{是整数}\}\text{ 或 }B=\{2n:n\text{是整数}\}.$$

大括号内前半段 $2n$ 表示所有具有 $2n$ 形式的数，后半段指出 n 的取值范围。一般说来，若集合 S 是由具有性质 P 的元素 x 组成，则记为

$$S=\{x|x\text{ 具有性质 }P\}\text{ 或 }S=\{x:x\text{ 具有性质 }P\}.$$

不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$。但集合 $\{0\}$ 并不是空集，它是由一个数"零"组成的集合。例如二次方程 $x^2+1=0$ 的实根所构成的集合是 $\varnothing$，而方程 $x^2=0$ 的实根构成的集合是 $\{0\}$，它们是不相同的。

集合中的元素是不考虑它们出现的顺序的。在用列举法表示集合时，重复出现的元素只算一个。若 A 与 B 是由完全相同的元素所组成的集合，则称 A 与 B 是**相等的集合**，记为 $A=B$。例如，我们有

$$\{1,5\}=\{5,1\}=\{5,1,5\}.$$

如果 A 与 B 不是相等的集合，称之为**不相等集合**，记为 $A\neq B$。例如，$\{0\}\neq\varnothing$。

若 $A\neq B$，则至少有一个元素 $a\in A$ 但 $a\notin B$，或至少有一个元素 $b\in B$ 但 $b\notin A$。

我们用符号"$\forall$"表示"对任意一个"或表示"对所有的"意思。例如，"$\forall x\in A$"读作"对 A 中任意一个元素 x"，也可读作"对 A 中所有的元素 x"。

若 $\forall x\in A$，必有 $x\in B$，则称 A 为 B 的**子集**，也称 A **包含于** B 或 B **包含** A，记为 $A\subseteq B$。

若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，也称 A **真包含于** B，记为 $A\subset B$。我们约定 $\varnothing\subseteq A$，这里 A 为任一集合。换句话说，空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集。我们在说到子集时，习惯上也用"某一个集合"来代替。例如，我们说"有理数的某一个集合 A"，是说

A 是有理数集合的子集。

集合 $\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 称为 A 与 B 的**并集**(或**和集**),记为 $A\cup B$。

集合$\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$称为 A 与 B 的**交集**,记为 $A\cap B$。

集合$\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$称为 A 与 B 的**差集**,记为 $A-B$,也可记为 $A\backslash B$。

例如,设 $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$,则 $A\cup B=\{1, 2, 3\}$; $A\cap B=\{2\}$; $A-B=\{1\}$; $B-A=\{3\}$。

下面我们介绍关于"映射"的概念。

定义 1.1 设A, B为两个集合. 若对A中每一个元素 x, 按照某一个法则 φ, 都有 B 中唯一的元素 y 与之对应, 则称 φ 是 A 到 B 的**映射**,记成

$$\varphi: A\to B, \quad 或 \quad y=\varphi(x), \quad x\in A.$$

称 y 为 x 关于映射 φ 的**像**,称 x 为 y 的**原像**. A 称为 φ 的**定义域**. A 中元素像的集合称为 φ 的**值域**, 记成 $\varphi(A)$. 若 $B=\varphi(A)$, 称 φ 为 A 到 B 的**满映射**. 若 $\forall x_1, x_2\in A$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 有 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$, 则称 φ 为**单映射**. 若 φ 既是满映射又是单映射, 称 φ 为**双映射**, 也称 φ 建立了 A 与 B 之间**一一对应关系**. 双映射又称为 **1-1 映射**.

例 1 设 S 为某平面上多边形的集合. N 为正整数集合. $\varphi(x)$表示该平面上多边形 x 的顶点个数. 则 φ: $S\to$N. 因没有顶点个数为 1 与 2 的多边形, 故 φ 不是满映射. 又因平面上有无穷多个三角形,故 φ 也不是单映射.

例 2 设 A 为今年 9 月份中 30 天构成的集合, B 为一周中的七个日期(即星期日、星期一、……、星期六)的集合. 当 $x\in A$ 时, $\varphi(x)$表示这一天是星期几. 易见 φ 是 A 到 B 的满映射, 即 $\varphi(A)=B$. 但 φ 不是单映射.

例 3 设 S 表示某班级学生的集合, Z 为整数集合. $\varphi(x)$ 表示该班学生 x 的学号数. 则 φ: $S\to$Z. 因为没有两个学生有相同

的学号，故 φ 是单映射。但 φ 不是满映射。

例 4 设 A 为某三角形三条边的集合，B为该三角形三个角的集合。$\varphi(x)$表示该三角形的边 x 所对的角。显然，φ 是 A 到 B 的双映射。

设 φ 是集合 A 到集合 B 的双映射。于是 $\forall b\in B$，存在唯一的 $a\in A$，使得 $\varphi(a)=b$。这样，我们得到由 B 到 A 的映射 ψ，使得 $\psi(b)=a$。我们把 ψ 称为 φ 的**逆映射**，记为 $\psi=\varphi^{-1}$。由对称性，也可以把 φ 称为 ψ 的逆映射。于是有 $\varphi=\psi^{-1}=(\varphi^{-1})^{-1}$。

§1.1.2 实数概念

在中学课程里我们学过数轴。取一条有向直线，习惯上取向右为正，在其上取一定点称为**原点** O，选择一线段 l 作为单位，那么这条有向直线就是**数轴**，常称为 x **轴**。见图 1.1。设 A 为 x 轴上一点，使得线段 OA 的 $\frac{1}{p}$恰好等于单位长 l 的 $\frac{1}{q}$，这里 p 与 q 都是正整数，那么我们称 OA 的**长度**为 $\frac{p}{q}$。如果 OA 的方向与数轴方向一致，称 A 点的**坐标**为 $\frac{p}{q}$；如果方向相反，称 A 点的**坐标** $-\frac{p}{q}$。

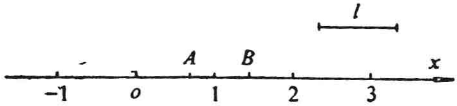


图 1.1

我们知道，凡能表示成两个整数之商(除数不为零)的数称为**有理数**。容易看出，每一个有理数 a 都可以在数轴上找到唯一的点 A，以 a 作为它的坐标。这时我们说 A 是有理数 a 在数轴上的对应点，也说 A 为**有理点**。

设 a, b 为不相等的有理数，它们在数轴上的对应点分别为 A 与 B。那么 A 与 B 之间至少有一个有理点。例如有理数 $\frac{1}{2}(a+b)$ 的对应点必界于 A 与 B 之间。由此不难推知数轴上任意两个有理

点之间都有无穷多个有理点,这就是说有理数是处处稠密的。

尽管有理点(或有理数)处处稠密,但在数轴上还有其它点,它们不是有理点。例如在数轴右半轴上取一点 B,使 OB 的长恰为单位正方形的对角线长,那么 B 点就不是有理点。

事实上,若不然,设 B 点的坐标为 $\frac{p}{q}$,这里 p,q 为互素的正整数。由勾股定理知 $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$,则 $p^2=2q^2$。于是 p 为偶数。设 $p=2n$, n 为整数,则有 $(2n)^2=2q^2$ 即 $q^2=2n^2$。于是 q 也是偶数。与假设矛盾。这一矛盾说明 B 不是有理点。

上述讨论说明单位正方形对角线在有理数范围内没有长度。因此有理数还不能满足实际需要。为了使任何线段都有长度,或者说数轴上每一点都有坐标,必须引进新的数。我们把新引进的数称为无理数。例如引进无理数 $\sqrt{2}$ 作为单位正方形对角线的长度。

数轴上对应于无理数的点称为**无理点**。

在中学里,我们知道有理数总可以用有限小数或无限循环小数表示,无理数可用无限不循环小数表示。

有理数与无理数统称**实数**。实数集合具有下述重要性质:

定理 1.1 若把实数集分成任意两个非空子集 U 和 V,满足两个条件:

i) 每个实数恰在 U 和 V 的一个之中;

ii) $\forall x\in U$, $\forall y\in V$, 必有 $x<y$,

则存在唯一的实数 α, α 是 U 中最大数或者是 V 中最小数。

该定理称为**实数的连续性定理**。实数连续性的证明依赖于实数严格的数学定义。它超出我们大纲的要求,故从略。

由于数轴上的点可以与实数建立一一对应关系,我们可以把"数 x"说成"点 x",对这两个术语不加区别。正是由实数的连续性,使得今后我们说"变量 x(或动点 x)从 a 连续变化到 b"有可靠的理论依据。

实数概念的引进有多种不同的形式。不管采用什么方法定义

实数，都必须给出实数的加法运算、乘法运算、指数函数运算、三角函数运算及它们的逆运算的定义(逆运算分别指减法、除法、对数和反三角函数运算)，必须建立这些运算的规律，这些规律在有理数范围内应当保持成立。

完成这一任务是一件很繁琐的工作。这里我们给出实数的一些基本运算性质。

(1) 交换律：

$$a+b=b+a,\quad ab=ba.$$

(2) 结合律：

$$(a+b)+c=a+(b+c),\quad (ab)c=a(bc).$$

(3) 分配律：

$$a(b+c)=ab+ac.$$

(4) 指数律：

$$a^x a^y=a^{x+y},\quad (a^x)^y=a^{xy},\quad (ab)^x=a^x b^x,$$

这里 $a, b>0$，x, y 为实数。

下面我们介绍关于“数域”的概念。

设 S 为某数集，满足下述两个条件：

i) S 中至少含一个非零元素，

ii) S 对加减乘除四则运算(除数不为零)封闭①，

则称 S 为**数域**。

有理数的全体构成一个数域，称为**有理数域**。实数的全体也构成一个数域，称为**实数域**。

今后凡实数集合用 R 表示，有理数集合用 Q 表示，整数集合用 Z 表示，正整数集合用 N 表示。

§1.1.3 实数的序·不等式

在中学里我们知道实数是可以比较大小的。所谓比较大小，

① 数集 S 对加法运算封闭意即“若 $a, b\in S$，则 $a+b\in S$”。余类推。

就是排序。现在我们来建立实数中关于“序”的概念。

我们把 $-a$ 称为 a 的**相反数**。实数可以分成正数、负数和零三部分。实数的这种划分具有两条基本性质①：

(i) 正数的相反数是负数，负数的相反数是正数；

(ii) 正数集合关于加、乘运算封闭。

设 $a,b\in\mathrm{R}, a\neq b$。当 $a-b$ 为正数时，称 a **大于** b，记成 $a>b$；当 $a-b$ 为负数时，称 a **小于** b，记成 $a<b$。

在上述定义中取 $b=0$，即知正数大于零，负数小于零。

由上规定知，$\forall a, b\in\mathrm{R}$，下述三种关系：

$$a>b,\ a<b,\ a=b$$

恰有一种成立。这就给出了实数的**序**。

由实数的两条基本性质及关于序的定义，我们能够证明下列性质：

1) 若 $a>b, b>c$，则 $a>c$。

2) 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$。

3) 设 $a>b$。当 $c>0$ 时 $ac>bc$；当 $c<0$ 时 $ac<bc$。

4) 若 $a>b$，且 ab 为正数，则 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$。

我们只证性质 3)，其余留给读者完成。

由 $a>b$ 知 $a-b>0$。当 $c>0$ 时，由性质(ii) 正数的积仍为正数知 $(a-b)\cdot c>0$，即 $ac-bc>0$。故 $ac>bc$。当 $c<0$ 时，由性质(i)知 $-c>0$。于是 $(a-b)\cdot(-c)>0$，即 $bc-ac>0$，故 $ac<bc$。

实数的序可由数轴上对应点的位置关系反映出来。原点右边点的坐标为正实数，左边点的坐标为负实数，数轴上任何一点的坐标总大于它左边点的坐标，小于它右边点的坐标。

$a>b$ 或 $a=b$ 可记为 $a\geqslant b$，$a<b$ 或 $a=b$ 可记为 $a\leqslant b$。上述关于实数的四条性质，若将 $>$ 换成 $\geqslant$，将 $<$ 换成 $\leqslant$，仍然能成立。

---

① 不难证明具有这两条性质的实数划分是唯一的。因此可以利用这种划分来定义正数和负数。参见习题 1.1 B 9.

不等式在微积分中占有很重要的地位，很多定理是用等式表达的，却是通过不等式加以证明的。熟悉基本不等式和掌握证明不等式的基本方法，对今后学习是十分重要的。

例 1 设 n 为自然数，求证当 $x\geqslant -1$ 时

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx. \qquad (1.1)_n$$

证 为叙述简便，"(1.1)"的右下角添了下标 n，表示(1.1)式是对自然数 n 而言。读者不难推知 $(1.1)_{n+1}$ 表示不等式

$$(1+x)^{n+1}\geqslant 1+(n+1)x.$$

显然 $(1.1)_1$ 成立。设 $(1.1)_n$ 成立，则

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1}&=(1+x)^n(1+x)\geqslant(1+nx)(1+x)\\&=1+(n+1)x+nx^2\geqslant 1+(n+1)x,\end{aligned}$$

即 $(1.1)_{n+1}$ 成立。故 $(1.1)_n$ 对任意自然数成立。证毕。

例 2 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n>0$。求证

$$A=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \qquad (1.2)_n$$

证 我们用数学归纳法证之。显然 $(1.2)_1$ 成立。设 $(1.2)_{n-1}$ 成立，这里 $n>1$。不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，若不然，调换位置，重新编号即可做到。于是有

$$a_1\leqslant A\leqslant a_n, \qquad (1.3)$$

从而得到

$$A(a_1+a_n-A)=a_1a_n+(a_n-A)(A-a_1)\geqslant a_1a_n. \qquad (1.4)$$

由归纳假设，对于 $a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, (a_1+a_n-A)$ 这 $n-1$ 个正数有

$$\begin{aligned}A=\frac{nA-A}{n-1}&=\frac{1}{n-1}(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-A))\\&\geqslant\sqrt[n-1]{a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A)}.\end{aligned}$$

于是有

$$A^{n-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A).$$

两边同乘 A，由(1.4)式便得

$$A^n\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A)A\geqslant a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n.$$

所以 $(1.2)_n$ 成立。证毕。