



ACM-ICPC程序设计系列

组合数学及应用

● 主编 周治国



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



ACM-ICPC程序设计系列

组合数学及应用

- 主 编 周治国
- 副主编 殷明浩 孟繁军



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书属于 ACM-ICPC 程序设计竞赛数学基础丛书。本书以程序设计思想和方法为主线,由浅入深地介绍组合数学的基础知识,并以经典的 ACM-ICPC 竞赛题目为例讲解组合数学在竞赛中的具体应用问题。

全书共分 6 章,分别介绍了排列组合、母函数、容斥原理与鸽巢原理、群和 Pólya 定理、组合计数与编码、线性规划的基本知识及其应用。

本书既可以作为组合数学的入门教程,也可作为参加 ACM-ICPC 程序设计竞赛的培训教材,还可供 ACM-ICPC 程序设计竞赛培训教师或相关专业研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学及应用/周治国主编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.3

(ACM-ICPC 程序设计系列)

ISBN 978-7-5603-3288-8

I. ①组… II. ①周… III. ①组合数学 IV. ①O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 093067 号

策划编辑 赵文斌 杜 燕

责任编辑 费佳明

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 13.25 字数 265 千字

版 次 2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3288-8

定 价 26.80 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

《ACM - ICPC 程序设计系列》编委会

主 任 俞经善

副主任 金 博 陈 宇 孙大烈 孟繁军
殷明浩 朴秀峰

委 员 (按姓氏笔画排序)

丁 雨	马占飞	王 平	王 斌
王翠青	乔 付	邢海峰	刘丕娥
纪洪波	李 军	李 敏	杨明莉
迟呈英	周李涌	周治国	钟 辉
龚 丹	鲁静轩	滕国库	

序 言

ACM - ICPC(ACM 国际大学生程序设计竞赛)被称为计算机领域的奥林匹克,是计算机领域高水平的智力角斗场。ACM - ICPC 于 1970 年起源于北美,由于涉及知识面广、注重实践,并有着公正的竞赛机制和颇有意思的比赛过程,因此在全球范围内迅速流行。其命题的考查范围除了程序设计、算法、数据结构、操作系统、计算机网络,编译原理等计算机专业相关学科知识外,离散数学、初等数论、组合数学、图论、计算几何等相关的数学知识也均包括在内,而且考查的知识范围还在持续扩大之中。

ACM - ICPC 程序设计系列是编者们在多年参与 ACM - ICPC 的过程中,对竞赛、训练的内容进行总结,从学科专题的角度集结而成。本套丛书包含组合数学、初等数论、计算几何、图论和程序设计训练题解等内容,从竞赛的角度出发,介绍其中的基本概念和研究方法,主要以应用为目的。

组合数学源远流长,古代的数学游戏和美学消遣,以无穷的魅力激发人们的聪明才智和数学兴趣。组合数学涉及内容广泛,知识点庞杂,与很多数学分支相交叉,主要研究将一些元素安排成种种集合的问题。组合数学被广泛应用在计算机科学、编码和密码学、物理、生物等学科以及交通管理、城市规划、企业管理等领域。初等数论是研究数的规律,特别是整数的性质的数学分支。初等数论就是用初等、朴素的方法去研究数论,是数论的一个最古老的分支。数论在计算机科学和应用数学的发展中得到了广泛的应用。比如,在计算方法、代数编码、组合论等方面都广泛使用了初等数论范围内的许多研究成果。计算几何于 20 世纪 70 年代末从算法设计与分析中分化而来,主要研究“几何图形信息(曲面和三维实体)的计算机表示、分析、修改和综合”。计算几何已经成长为一个被广泛认同的学科。在众多的应用领域(如计算机图形学、地理信息系统和机器人学等)都发挥着重要的作用。图论作为一个数学分支,有一套完整的体系和广泛的内容。它以图为研究对象,其应用范围非常广泛。不但应用于自然科学,且在社会科学中也有应用。当用图论来解决实际问题时,几乎都能引出复杂的图论模型,而这些模型一般情况下如果没有计算机的帮助很难分析出来,因此图论的快速发展和推广与计算机科学和信息科学的快速发展是分不开的。

本系列以介绍这些专题学科的基本概念和方法为基准,目的是使读者能在短时间内了

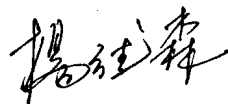
解专题的主要内容。整套书适用于 ACM - ICPC 和信息学竞赛的初级、中级水平的学生,对计算机程序设计和算法感兴趣的读者同样有指导意义,同时对在该方向上有所研究的人士也有一定的参考意义,可作为竞赛代表队的培训教材,也可作为相关课程实践教学的教学教材。

本系列是由 ACM - ICPC 中国·东北地区组织委员会组织策划,由哈尔滨工程大学、大连理工大学、东北大学、东北林业大学、东北师范大学等学校的老师(教练)群策群力共同完成。ACM - ICPC 中国·东北地区组织委员会一直关注着竞赛与实践教学的结合,使大学生们通过这个活动掌握更多的学科知识和提高分析问题、解决问题的能力。本系列书的出版能够将一些有实际意义的专题学科知识以简洁而清晰的方式最快地介绍给大学生们,可以引起更多程序设计爱好者的兴趣,可以成为 ACM - ICPC 参赛队员道路上的一块垫脚石,可以成为相关课程实践教学的教学教材。

ACM - ICPC 中国·东北地区组织委员会主席

第 34 届 ACM - ICPC 全球总决赛执行主席

哈尔滨工程大学副校长

A handwritten signature in black ink, appearing to read '杨震霖' (Yang Zhenlin), written in a cursive style.

2012 年 1 月

前 言

组合数学(Combinatorial Mathematics),又称为离散数学,它是一门研究离散对象的科学。有时人们也把组合数学和图论一起称为离散数学。

组合数学具有悠久的历史,起源于17世纪左右,当时主要研究的是概率论中的相关问题。但一直发展缓慢,直到20世纪计算机出现以后才迅速发展起来,并成为发展最为迅速的一个数学分支。

随着计算机科学的日益发展,组合数学的重要性也日渐凸显,因为计算机科学的核心内容是使用算法处理离散数据。计算机的问世以及其广泛应用,促进了组合数学的蓬勃发展;反过来,由于组合数学的发展,又进一步推动了计算机科学的进步。在这其中,组合数学与ACM国际大学生程序设计竞赛结合得最为紧密。

ACM国际大学生程序设计竞赛(简称ACM-ICPC)是由国际计算机界具有悠久历史的权威性组织ACM学会(Association for Computing Machinery)主办,是世界上公认的规模最大、水平最高、参与人数最多的大学生程序设计竞赛,其宗旨是使大学生能通过计算机充分展示自己分析问题和解决问题的能力。

ACM-ICPC赛事是目前国内高校承办的唯一一项具有国际影响的计算机竞赛。中国内地高校从1996年开始承办ACM-ICPC亚洲区预选赛。这几年来在组织学生参加ACM-ICPC竞赛中,不难发现竞赛题目中大部分都是经典算法,例如枚举算法、模拟算法、递归算法及搜索算法、贪心算法、分治算法、动态规划算法等,但其中也不乏有组合数学领域的算法,而这一部分往往是很多选手的薄弱之处。在每次比赛中,组合数学方面的题目都是只有很少一部分人能够做出来。究其原因,主要有两个方面:一是一些院校没有开设组合数学类课程,学生只能靠ACM的培训和自学掌握一部分组合数学的基础理论,但广度和深度都是远远不够的;二是即使开设了组合数学课程,但教材和讲授的重点都是组合数学中的理论知识和一些公理定理的证明或推导,与程序设计关系很小。

为了更好地辅导和培训学生们在组合数学方面的基础知识,提升学生在组合数学方面的编程能力,编者在丛书组委会的指导下,编写了这本组合数学教材。

本书结合一些ACM-ICPC竞赛的经典试题,以程序设计思想和方法为主线,介绍了ACM-ICPC中所需要的组合数学基础知识和基本理论,重点地、系统地介绍和ACM-ICPC竞赛密切相关的概念、定理以及算法,对于众多的定理和公理,没有给出相关的证明和推导

过程,如果想深入学习和研究,需要查考其他的组合数学的资料。

全书共分为 6 章。

第 1 章主要围绕着排列组合的基本理论展开,介绍了加法和乘法两个基本的计数原理、几种特殊的排列组合、排列的生成算法以及组合的生成算法。

第 2 章介绍了母函数的基本概念、整数的拆分、Ferrers 图像、指数型母函数、递推关系及其应用。

第 3 章主要介绍组合数学中的两个基本原理(容斥原理和鸽巢原理),并给出了这两个原理在实际问题中的经典应用。

第 4 章主要介绍群和 Pólya 定理的基本知识,并结合实例给出了具体的应用。

第 5 章主要介绍区组设计与编码理论的基础及其应用。

第 6 章主要介绍线性规划问题及其表示以及线性规划中的单纯性算法。

其中第 1 章、第 2 章由东北师范大学周治国编写,第 3 章、第 4 章由东北师范大学殷明浩编写,第 5 章、第 6 章由内蒙古师范大学孟繁军编写,周治国任主编。在本书的编写过程中,得到了东北师范大学 ACM 队员们的大力帮助,徐欣、张亚琼、崔鑫、洪嘉毅、姜梅丹、梁玉林等同学分别参与了各章内容的收集与整理、ACM - ICPC 题目的收集、参考程序的编写以及算法的验证。

本书收录了多道 ACM - ICPC 的竞赛原题,这些题目很好地运用了组合数学的基础知识,突出了其实际应用价值。在此,编者对这些题目的原创作者表示衷心的感谢。

在本书的编写过程中,得到了张子忠、唐荣、寿浙威、陈思、张文艺、张灵雪等同学的鼎力协助,在此,编者对他们的辛勤工作表示诚挚的谢意。

由于我们水平有限,虽几经修改,但书中难免会有疏漏或错误之处,欢迎读者批评指正,不胜感激!

我们的联系方式:zhouzg281@nenu.edu.cn

编者

2012 年 1 月

目 录

第 1 章 排列组合	1
1.1 排列与组合	1
1.2 两个基本计数原理	3
1.2.1 加法原理	3
1.2.2 乘法原理	5
1.3 特殊排列组合	7
1.3.1 重复排列	7
1.3.2 重复组合	7
1.3.3 不全相异的全排列	8
1.3.4 圆周排列	8
1.4 排列的生成算法	9
1.4.1 序数法	10
1.4.2 字典序法	13
1.4.3 邻位互换法	14
1.5 组合的生成	16
1.6 练习题	17
第 2 章 母函数	21
2.1 普通母函数	21
2.2 整数的拆分	26
2.3 Ferrers 图像	29
2.4 指数型母函数	30
2.5 递推关系	31
2.6 斐波那契数列	35
2.7 Stirling 数	41
2.8 Catalan 数	42
2.9 练习题	46

第 3 章 容斥原理与鸽巢原理	48
3.1 容斥原理	48
3.1.1 De Morgan 定理	48
3.1.2 容斥原理的定义	49
3.2 容斥原理的应用	53
3.2.1 错排问题	53
3.2.2 棋盘多项式与有禁区的排列	57
3.3 Möbius 反演定理	64
3.4 鸽巢原理	66
3.5 Ramsey 数	71
3.5.1 Ramsey 问题	71
3.5.2 Ramsey 数	72
3.6 应用实例	74
3.7 练习题	81
第 4 章 群和 Pólya 定理	86
4.1 等价关系、群与置换群	86
4.1.1 等价关系	86
4.1.2 群和置换群	87
4.2 循环与对换	89
4.3 Burnside 引理	91
4.3.1 共轭类	91
4.3.2 k 不动置换类和等价类	92
4.3.3 Burnside 引理	93
4.4 Pólya 定理	95
4.5 Pólya 定理应用举例	96
4.6 练习题	101
第 5 章 组合计数与编码	103
5.1 均衡不完全区组设计	103
5.1.1 均衡不完全区组设计	104
5.1.2 基本性质	105
5.1.3 由对称 BIBD 构造 BIBD	105

5.2 拉丁方	106
5.2.1 拉丁方的定义	106
5.2.2 拉丁方的构造	107
5.2.3 正交拉丁方	108
5.3 Hadamard 矩阵	110
5.3.1 Hadamard 矩阵	110
5.3.2 由 Hadamard 矩阵构造 SBIBD($4t-1, 2t-1, t-1$)	111
5.4 编码理论基础	111
5.4.1 基本概念	111
5.4.2 Hamming 码	112
5.5 应用实例	113
5.6 练习题	126
第 6 章 线性规划	130
6.1 线性规划问题及其表示	130
6.1.1 线性规划问题	130
6.1.2 线性规划问题的一般形式	131
6.1.3 线性规划问题的标准形式	132
6.1.4 一般形式向标准形式的转化	133
6.2 单纯性算法	134
6.2.1 松弛变量技术	134
6.2.2 线性规划定理	135
6.2.3 单纯性算法	136
6.2.4 特殊情况的处理	140
6.2.5 算法流程	141
6.2.6 算法实现	142
6.3 练习题	146
附录:参考程序	148
参考文献	199

第1章 排列组合

本章要点

本章介绍了排列组合的相关内容,对两种基本计数原理进行了介绍,在学习几种特殊排列之后,学习排列与组合的生成算法。

1.1 排列与组合

排列组合是组合学最基本的概念。所谓排列,就是指从给定个数的元素中取出指定个数的元素进行排序。组合则是指从给定个数的元素中仅仅取出指定个数的元素,不考虑排序。排列组合的中心问题是研究给定要求的排列和组合可能出现的情况总数。排列组合与古典概率论关系密切。

排列数: n 个不同物体不重复地取出 r 个做排列的方法数 $A(n, r) = P(n, r)$ (或 A_n^r) (在其他教材中,有用 $P()$ 来表示排列数的)。

组合数: n 个不同物体不重复地取出 r 个做组合的方法数 $C(n, r)$ (或 C_n^r)。

若干排列组合的公式:

$$(1) A_n^r = n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

$$(2) C(n, r) = C(n, n-r)$$

$$C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$$

$$(3) C(n+r+1, r) = C(n+r, r) + C(n+r-1, r-1) + C(n+r-2, r-2) + \cdots + C(n+1, 1) + C(n, 0)$$

$$(4) C(n, k)C(k, r) = C(n, r)C(n-r, k-r), (k \geq r)$$

例 1.1 编写一个函数返回组合数 $C(n, r)$ ($0 \leq r, n \leq 10$)

```
int myc(int n, intr)
{
    int sum = 1;
    for(int i = 1; i <= r; i++)
        sum = sum * (n + 1 - i) / i;
    return sum;
}
```

例 1.2 编写一个函数返回排列数 $A(n, r)$ ($0 \leq r, n \leq 10$)

```
int mya(int n, int r)
{
    int sum = 1;
    for(int i = 0; i < r; i++)
        sum = sum * (n - i);
    return sum;
}
```

例 1.3 从 1 到 300 中随便选出 3 个数,使这 3 个数的和恰好能被 3 整除。试问有多少

种方案?

分析:可以把 $1 \cdots 300$ 分成 3 组,即

$$A = \{1, 4, 7, \cdots, 298\}$$

$$B = \{2, 5, 8, \cdots, 299\}$$

$$C = \{3, 6, 9, \cdots, 300\}$$

情况 1:3 个数都从一个集合中选出,可以被 3 整除。

情况 2:从 A, B, C 中各选出一个也可以被 3 整除。

$$\text{解: } S = 3 \times C(100, 3) + 100^3 = 1\,485\,100$$

答:一共有 1 485 100 种方案。

1.2 两个基本计数原理

1.2.1 加法原理

设事件 A 有 n 类方式, $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$, 每一类方式 A_i 中都有 m_i 种方法,而在 A_i, A_j 中任何两种方法都不相同,则完成事件 A 的方法共有

$$\sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

使用这条加法规则,事件发生必须是彼此独立的。

例 1.4 Lolihunter 要从龙骨荒野的龙眼神殿到天谴之门,他可以有 M ($M < 10$) 条路可以走,第 M_i 条路有 N_i ($N_i < 10$) 种坐骑可供选择,每条路上的坐骑都不相同。他在龙眼神殿随机得到一种坐骑,得到每种坐骑的概率都是相等的,他能骑着他那帅气的骨龙到天谴之门的概率是多少? 保留 2 位小数。

☞输入

第一行是一个正整数 m , 表示有多少条路, 下面是 m 组数据, 每组数据表示这条路有多少种坐骑可以坐。

☞输出

对于输入数据, 输出一个数, 表示能骑到骨龙的概率。保留 2 位小数。

☞输入样例

```
3
5 6 9
```

☞输出样例

```
0.05
```

☞来源

Lolihunter@nenu

☞代码

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int m, sum;
    while( scanf( "%d" , &m) != EOF )
    {
        sum = 0;
        for( int i = 0; i < m; i++ )
        {
            int j;
            scanf( "%d" , &j);
```

```

    sum += j;
}
printf("%.2lf\n", 1.0/sum);
}
return 0;
}

```

1.2.2 乘法原理

设事件 A 需要分 n 个步骤做完, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, 每一类方式 A_i 中都有 m_i 种方法, 则完成事件 A 的方法共有

$$\prod_{i=1}^n m_i = m_1 \times m_2 \times \dots \times m_n$$

例 1.5 网络游戏和《西游记》一样, 就是一路上打打妖怪升升级, 如何升级就至关重要了, Lolihunter 要从 1 级练到 30 级。其中 1 ~ 13 级可以去 n 个地方, 13 ~ 25 可以去 p 个地方, 25 ~ 30 可以去 q 个地方。现在 Lolihunter 想请你帮忙算算他一共有多少种方案升到 30 级。

☞ 输入

多组输入数据, 每组数据占一行, 每行 3 个数 n, p, q ($\leq 10\,000$) 意义如上描述。

☞ 输出

对于每组输入数据, 输出一行, 表示有多少种方案升到 30 级。

☞ 输入样例

```
1 1 1
```

☞ 输出样例

```
1
```


来源

Lolihunter@nenu

代码

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    long long n,p,q;
    while(cin > > n > > p > > q)
    {
        cout << n * p * q << endl;
    }
    return 0;
}
```

考虑这样一个问题,在舞会上有 n 个人,性别相同的两个人用黑绳子连起来,性别不同的两个人用红绳子连起来。每 3 个人可组成一个三角,如果 3 条绳子的颜色相同,就称为稳定三角,反之称为不稳定三角。如果给出黑绳子的列表,请找出稳定三角的个数。

如果直接去找稳定三角,会发现很难找到一个合理的计数方法。换一个角度,用所有的三角数减去不稳定的三角数就是所求。所有的三角数是 $C(n,3)$,对于每一个不稳定三角恰好有两个人的绳子颜色不一样。所以不稳定三角个数等于由一个点连接两条非同色线段的情况数的一半。