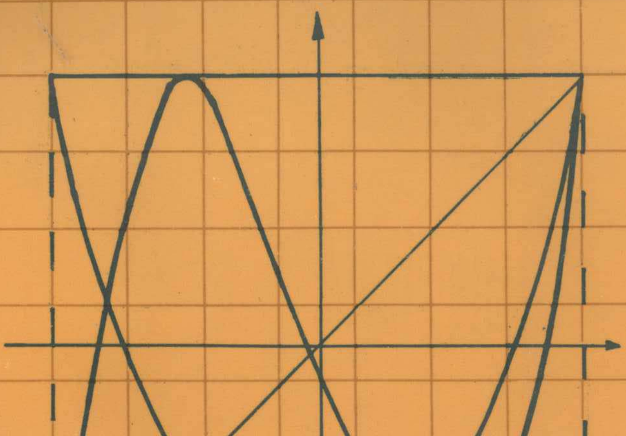
战同胜　编

数值分析与计算



大连理工大学出版社

电子计算机应用数学

数 值 分 析 与 计 算

战 同 胜　　编

大连理工大学出版社

内 容 提 要

本书是数值分析与计算的简明教程。重点介绍用电子计算机解题的数值理论和最先进有效的算法。全书分十一章，主要内容有：线性方程组的直接法和迭代法；矩阵特征值问题；插值法；数值积分；函数逼近与数据拟合；非线性方程的解法；常微分方程的初值问题和边值问题；偏微分方程的解法等。每章之后附有不少习题，习题有提示与答案。

本书适用于工科院校各专业、业余大学和电视大学有关专业的大学生、研究生和教师以及从事科学和工程计算的科技人员和计算工作者。可作为教材，也可作为编制算法、程序设计和上机电算的参考书。

数 值 分 析 与 计 算

Shuzhi Fenxi yu Jisuan

战同胜　编

大连理工大学出版社出版发行　(邮政编码：116024)

(出版社登记证号〔辽〕第16号)　大连理工大学印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11.5　字数：248　千字

1991年7月　第1版　1991年7月第1次印刷

印数：0001—2060册

责任编辑：张亚军　封面设计：姜严军

责任校对：宋玉珠

ISBN 7-5611-0390-5/O・64　定价：5.00元

前　　言

自从人类跨入电子计算机时代以来，数学软件有了飞快的发展。为面向科学与工程计算所需要的数学软件，本书重点介绍了数值分析与计算的基本原理和有效算法。目的在于使读者了解数值分析与计算领域中可供应用的成就，了解各种方法的针对性和局限性，使企图解决实际问题的读者，在面临庞大实用程序的软件库时，能结合问题本身的特点，对方法做出取舍，进行认真的数值分析和富有成效的计算，以达到通向享用高质量数学软件的自由。基于上述目的，本书在编写过程中注意以下几个特点：第一，注重数值分析的基本原理、思想、和方法的阐明。只有有了良好数值分析的理论基础，才能设计出新的优化算法和进行有效的数值计算。第二，本书也注重数值计算，重视离散化、算法化和程序化方法。为此，选编了一些内容较新并且实用的方法，凡常用的数值方法，都用接近于语句形式编出上机算法，并配有数值例题。第三，本书注意将理论、算法、例题和正文后的习题有机的密切配合，便于教学、学习和使用。

本书按照 68～72 学时组织内容的，若去掉书中 * 号部分在 51～54 学时即可讲授完毕。

本书在编写过程中曾得熊西文教授的关心和帮助，听课的研究生们也对本书内容进行了认真的校对。在此表示衷心的谢意。

编　者

1991 年 4 月于大连

目　　录

第一章 预 篇

§1.1 数值分析与计算研究的对象和特点

（一） 数值分析与计算研究的对象

数值分析与计算研究的对象是：各种数学问题的数值分析和计算方法（近似解法），其中包括方法的推导和求解过程的理论分析。

学习数值分析与计算的重要性，可以从下面计算机解算实际问题的全过程看出：

实际问题 → 构造数学模型 → 选择计算方法 → 程序设计 → 电算并打印结果

有了符合实际的数学模型，还必须进行认真的数值分析和选择好的计算方法，才能又快又好地计算出数值结果来。数值分析与计算将提供许多常用的、有价值的计算方法。

本书通过数值分析，将介绍各种数学问题常用的数值计算方法。

（二） 数值分析与计算的特点

数值分析与计算有以下几个基本特点：

1. 数值分析与计算紧密结合电算

本书通过数值分析，提出许多具体数学问题的算法，学了算法就要编制程序上机解题。因此，数值分析与计算是实践性很强的数学学科。

2. 强调构造性

数值分析中许多问题的存在性的证明，多采用构造性的方法把它的计算公式构造出来。这不但证明了存在性，而且有了具体计算公式便于编制程序上机计算。

例 1.1 对命题“每一个二次代数方程至多有两个不同的实根”给出构造性与非构造性的证明。

证明：(1) 构造性证明：设

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1.1}$$

为给定的二次方程，其中 a, b, c 为实数且 $a\neq0$。由初等代数知道，当 $b^2-4ac>0$ 时，方程(1.1)有两个不同实根：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{1.2}$$

当 $b^2-4ac=0$ 时，方程(1.1)有两个相同的实根：

$$x=-\frac{b}{2a} \tag{1.3}$$

当 $b^2-4ac<0$ 时，方程没有实根。

(2) 非构造性证明：用反证法。假设(1.1)有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3，代入(1.1)得

$$\begin{cases} ax_1^2+bx_1+c=0 \\ ax_2^2+bx_2+c=0 \\ ax_3^2+bx_3+c=0 \end{cases} \tag{1.4}$$

由于行列式

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3) \neq 0$$

根据线性代数的基本理论，方程(1.4)只能有零解，即 $a=b=c=0$，这与题设 $a\neq 0$ 矛盾。 ■

从例 1.1 可以看到非构造性证明并未给出求根的方法；而构造性证明，不仅证明了二次方程根的存在，而且给出了求根公式(1.2)或(1.3)。在学习本书第五章的插值法时，只要给出一个数据表和某些条件，我们就能构造出各种插值多项式来。

3. 强调离散性

一个连续性的数学问题要上机计算，必须进行离散化。例如把定积分离散成求和，把微分方程离散成差分方程，等等，这在本书的第六、九、十、十一章中都会遇到。现举一例说明如下：

例 1.2 计算定积分

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \tag{1.5}$$

解 (1.5)是一连续性问题，无法在计算机上实现。在高等数学中(或见本书第六章，§6.2)，定积分可用梯形法近似计算，即

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}\right] \tag{1.6}$$

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是 n 等分区间$[a, b]$的分点；y_0，

$y_1, \cdots, y_n$是被积函数在各分点的函数值。公式(1.6)是把定积分离散成为求和。用(1.6)的近似公式可以求(1.5)的积分了。若取 $n=10$，$x_i=0.1i$，$y_i=e^{-x_i^2}$，$(i=0, 1, \cdots, 10)$，$a=0$，$b=1$，代入(1.6)计算

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx & \left[\frac{1}{2}(1+0.36788)+0.99005+0.96079\right. \\
& +0.91393+0.85214+0.77880+0.69768 \\
& \left.+0.61263+0.52729+0.44486\right] \times 0.1 \\
= & 0.74621
\end{aligned}
$$

■

4. 强调有限性

计算机运算必须在有限次停止。把一个无限过程的数学问题，转化为满足一定误差要求的有限步来完成。

例 1.3 计算无理数 e 的近似值

解 由高等数学，e^x 展开式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

取 $x=1$，得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \tag{1.7}$$

这是一个无限过程，计算机无法求到精确值。只能在(1.7)中取有限项计算，再估计误差。若取

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

其误差为

$$|R_n| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

当 $n=10$ 时，可算出 $e \approx 2.718281$，其误差不超过百万分之

一。 ■

数值分析与计算还要体现出函数逼近的思想与数值分析方法的结合，以逼近思想为指导做认真的数值分析与计算。

以上这些特点，在以后各章中都有所叙述。了解这些特点，对学习数值分析与计算很有好处。作为练习，见习题一，1～3 题。

§1.2 误 差 分 析

学习数值分析与计算的整个过程，都要注意误差分析。

(一) 误差的来源

误差的主要来源有以下几方面。

1. 模型误差 由实际问题抽象出数学模型，要简化许多条件，这就不可避免地要产生误差。实际问题的解与数学模型的解之间的误差，叫做模型误差。

2. 观测误差 初始数据多是由观测而得。由于观测手段的限制，得到的数据必然有误差，这类误差叫做观测误差。这里不包含差错，如数据的抄错，程序的写错，等等。

3. 截断误差 把无限的计算过程用有限的计算过程代替，这样产生的误差叫做截断误差。

例 1.4 函数 $f(x)$的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (1.8)$$

其中 ξ_x 在 x_0 与 x 之间。

若在(1.8)中取

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

则截断误差为

$$\mathscr{T}_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad \blacksquare$$

4. 舍入误差　因为实际计算是按有限位进行的，所以计算的每一步都可能有误差，这种误差叫做舍入误差。一般说来，计算过程中舍入误差是不可避免的。数值分析与计算主要研究的是截断误差与舍入误差，以后每一 章都会遇到。重视误差分析和控制误差扩散是十分必要的，否则得到的数值计算结果的精确度是不知道的。没有误差分析的结果是不可信的，也不敢用。

（二）　绝对误差、相对误差和有效数字

1. 绝对误差和相对误差

定义 1.1　若 x^* 是 x 的近似数，则称

$$x^* \text{的绝对误差} = |x - x^*|$$

$$x^* \text{的相对误差} = \frac{|x - x^*|}{|x|}$$

绝对误差是有量纲单位的量，相对误差是一个无量纲的量。

例 1.5

(1)若 $x = 0.3000 \times 10$，$x^* = 0.3100 \times 10$，则绝对误差为 0.1，相对误差为 $0.333\dot{3} \times 10^{-1}$

(2)若 $x = 0.3000 \times 10^{-3}$，$x^* = 0.3100 \times 10^{-3}$，则绝对误差为 0.1×10^{-4}，相对误差为 $0.333\dot{3} \times 10^{-1}$

(3)若 $x = 0.3000 \times 10^4$，$x^* = 0.3100 \times 10^4$，则绝对误差

为 0.1×10^3，相对误差为 $0.333\dot{3}\times10^{-1}$

这个例子表明，计算的绝对误差虽然差别很大，却有相同的相对误差。因而对精确性的度量，只讨论绝对误差，有时会使人误解，而相对误差更富有意义。

2. 有效数字

为了便于了解 x^* 作为 x 近似数具有几位有效数字的取值范围，我们用相对误差引入下面定义。

定义 1.2 设 t 是最大的非负整数，对这个 t 若

$$\frac{|x-x^*|}{|x|}<5\times10^{-t} \tag{1.9}$$

则说 x^* 作为 x 的近似数，具有 t 位有效数字。

例 1.6 对于数 1000，为了使 x^* 近似到 1000 有 4 位有效数字，由定义 1.2，x^* 必须满足

$$\frac{|x^*-1000|}{|1000|}<5\times10^{-4}$$

因此 x^* 必须取值在 $999.5<x^*<1000.5$ 的范围。只要 x^* 在此范围取值，它作为 1000 的近似数，都具有 4 位有效数字。同样，对 5000，9990，为了精确到 4 位有效数字，由(1.9)x^* 必须分别满足 $4997.5<x^*<5002.5$，$9985.005<x^*<9994.995$

定义 1.2 与通常直观的有效数字的概念是一致的。但定义 1.2 的好处是，它给我们一个连续性的概念。

作为进一步练习，见习题一，4～7 题。

（三） 算术运算中的误差界

由于精确数 x 往往是未知的，因此在计算中必须估计误差的上界。

若令

$$|x - x^*| = |\Delta x^*| \leqslant \delta x^*, \ |y - y^*| = |\Delta y^*| \leqslant \delta y^*$$

则算术运算中误差上界的计算公式推导如下：

1. 对加法

$$\begin{aligned}|(x + y) - (x^* + y^*)| &= |(x - x^*) + (y - y^*)| \\ &\leqslant |x - x^*| + |y - y^*| \leqslant \delta x^* + \delta y^*\end{aligned}$$

2. 对减法

同样有

$$|(x - y) - (x^* - y^*)| \leqslant \delta x^* + \delta y^*$$

3. 对乘法

$$\begin{aligned}|xy - x^*y^*| &= |(x^* + \Delta x^*)(y^* + \Delta y^*) - x^*y^*| \\ &= |x^*y^* + x^*\Delta y^* + y^*\Delta x^* + \Delta x^*\Delta y^* - x^*y^*| \\ &\leqslant |x^*|\delta y^* + |y^*|\delta x^* + \delta x^*\delta y^*\end{aligned}$$

若假定$|x^*| \gg \delta x^*$，$|y^*| \gg \delta y^*$，则上式可用一阶近似逼近，得到的虽然并非严格，但是实用的公式

$$|xy - x^*y^*| \leqslant |x^*|\delta y^* + |y^*|\delta x^*$$

4. 对除法

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}\right| &= \left|\frac{x^* + \Delta x^*}{y^* + \Delta y^*} - \frac{x^*}{y^*}\right| \\ &= \left|\frac{x^*y^* + y^*\Delta x^* - x^*y^* - x^*\Delta y^*}{y^*(y^* + \Delta y^*)}\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{|y^*||\Delta x^*| + |x^*||\Delta y^*|}{|y^*|^2(1 - |\Delta y^*|/|y^*|)} \leqslant \frac{|y^*|\delta x^* + |x^*|\delta y^*}{|y^*|^2(1 - \delta y^*/|y^*|)}$$

若$|y^*| \gg \delta y^*$，则得近似不等式为

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}\right| < \frac{|y^*|\delta x^* + |x^*|\delta y^*}{|y^*|^2}$$

综上所述，列表如下。

表 1.1　算术运算中绝对误差界

$$\delta(x^* + y^*) = \delta x^* + \delta y^*$$

$$\delta(x^* - y^*) = \delta x^* + \delta y^*$$

$$\delta(x^* y^*) \approx |x^*|\delta y^* + |y^*|\delta x^*$$

$$\delta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) \approx \frac{|x^*|\delta y^* + |y^*|\delta x^*}{|y^*|^2}(y^* \neq 0)$$

例 1.7　若数 a_i，$b_i(1\leqslant i\leqslant n)$有相同的误差界 ε，求 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ 的误差界。

解　对 $i=1, 2, \cdots, n$ 由表 1.1 第三个公式，有

$$\delta(a_i b_i) \approx |a_i|\delta b_i + |b_i|\delta a_i \leqslant \varepsilon(|a_i| + |b_i|)$$

所以

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\delta(a_i b_i) \leqslant \varepsilon\sum_{i=1}^{n}(|a_i| + b_i|) \qquad \blacksquare$$

利用表 1.1 中的公式和相对误差的定义，可以推出算术运算中相对误差的界，见表 1.2

表 1.2　算术运算中相对误差的界

$$\frac{\delta(x^* + y^*)}{|x^* + y^*|} = \max\left\{\frac{\delta x^*}{|x^*|}, \frac{\delta y^*}{|y^*|}\right\}$$

$$\frac{\delta(x^* - y^*)}{|x^* - y^*|} = \frac{\delta x^* + \delta y^*}{|x^* - y^*|}$$

$$\frac{\delta(x^* y^*)}{|x^* y^*|} \approx \frac{\delta x^*}{|x^*|} + \frac{\delta y^*}{|y^*|}$$

$$\frac{\delta(x^*/y^*)}{|x^*/y^*|} \approx \frac{\delta x^*}{|x^*|} + \frac{\delta y^*}{|y^*|}$$

在表 1.2 中，用近似数的绝对值做分母，不符合定义