



普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学

(文科类) (下册)

孙艳蕊 邵新慧 郑维英 编
宋叔尼 杨中兵 王 艳



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学(文科类)

(下册)

孙艳蕊 邵新慧 郑维英 编
宋叔尼 杨中兵 王 艳

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是高等学校文科(包括经管类)各专业的数学教材,分上、下两册.上册含一元函数的微积分和线性代数部分,内容包括初等函数、极限与连续、变化率与导数、积分、线性代数初步、矩阵与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型.下册含多元函数的微积分、常微分方程和概率统计部分,内容包括多元函数的微分、二重积分、无穷级数、常微分方程、随机事件的概率、随机变量及其概率分布、数理统计初步.各章均配有适当、适量的习题供读者学习巩固.

本书既可作为高等学校文科(包括经管类)各专业大学数学课程的教材,也可作为相关专业的教学参考书和自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(文科类)(下册)/孙艳蕊,邵新慧,郑维英等编. —北京:科学出版社, 2012

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-033957-7

I. ①大… II. ①孙… ②邵… ③郑… III. ①高等数学—高等学校—教材
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 058984 号

责任编辑: 张中兴 唐保军 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

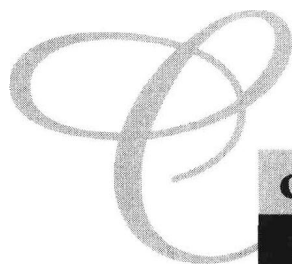
2012 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2012 年 4 月第一次印刷 印张: 15 3/4

字数: 310 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)



Contents

目 录

连续思想篇(二)——多元函数微积分

第 1 章 多元函数的微分	3
1.1 空间解析几何简介	3
1.1.1 空间直角坐标系	3
1.1.2 空间任意两点间的距离	4
1.1.3 曲面与方程	5
1.2 多元函数的概念	9
1.3 二元函数的极限与连续	12
1.3.1 二元函数的极限	12
1.3.2 二元函数的连续性	14
1.4 偏导数的概念与计算	15
1.5 全微分	19
1.6 多元复合函数与隐函数的求导法则	22
1.6.1 复合函数的求导法则	22
1.6.2 全微分形式不变性	25
1.6.3 隐函数的求导法	26
1.7 多元函数的极值与数学模型	29
1.7.1 多元函数的极值	29
1.7.2 多元函数的最值	31
1.7.3 条件极值	32
1.7.4 数学模型	34
数学重要历史人物 —— 拉格朗日	37
习题 1	38
第 2 章 二重积分	41
2.1 二重积分的概念与性质	41
2.1.1 二重积分的概念	41



2.1.2 二重积分的性质	44
2.2 二重积分的计算	45
2.2.1 直角坐标系下二重积分的计算	45
2.2.2 极坐标系下二重积分的计算	50
2.3 二重积分的应用	54
数学重要历史人物 —— 牛顿	56
习题 2	58
第 3 章 无穷级数	61
3.1 常数项级数的概念和性质	61
3.1.1 常数项级数的概念	61
3.1.2 收敛级数的基本性质	65
3.2 常数项级数的审敛法	68
3.2.1 正项级数及其审敛法	68
3.2.2 任意项级数及其审敛法	71
3.3 幂级数	74
3.3.1 函数项级数的概念	74
3.3.2 幂级数及其收敛区间	75
3.3.3 幂级数的运算	77
3.4 泰勒级数	79
3.4.1 泰勒级数的概念	80
3.4.2 函数展开成幂级数	82
3.5 级数的应用及数学模型	85
数学重要历史人物 —— 傅里叶	88
习题 3	89
第 4 章 常微分方程	94
4.1 微分方程的概念	94
4.2 一阶微分方程	95
4.2.1 可分离变量的微分方程	96
4.2.2 一阶线性微分方程	97
4.3 可降阶的二阶微分方程	98
4.3.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型	99
4.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型	99
4.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型	100
4.4 二阶常系数线性微分方程	101
4.4.1 二阶线性微分方程解的结构	102



4.4.2	二阶常系数线性齐次方程	103
4.4.3	二阶常系数线性非齐次方程	105
4.5	微分方程的应用	109
4.5.1	放射性元素的衰变	109
4.5.2	下雪时间的确定	110
4.5.3	化工车间的通风	110
4.5.4	商品价格浮动的规律	111
数学重要历史人物 —— 欧拉		112
习题 4		114

随机思想篇

第 5 章	随机事件的概率	119
5.1	随机事件	119
5.1.1	随机试验和样本空间	119
5.1.2	随机事件及其运算	119
5.2	随机事件的概率	123
5.2.1	概率的统计定义	123
5.2.2	概率的性质	124
5.3	古典概型	125
5.4	条件概率	127
5.4.1	条件概率的定义	127
5.4.2	概率的乘法公式	128
5.4.3	全概率公式	128
5.4.4	贝叶斯公式	130
5.5	事件的独立性	131
数学重要历史人物 —— 贝叶斯		133
习题 5		134
第 6 章	随机变量及其概率分布	138
6.1	随机变量及其分布函数	138
6.1.1	随机变量的定义	138
6.1.2	随机变量分布函数的定义	139
6.1.3	随机变量分布函数的性质	140
6.2	离散型随机变量和连续型随机变量	141
6.2.1	离散型随机变量	141
6.2.2	连续型随机变量	145



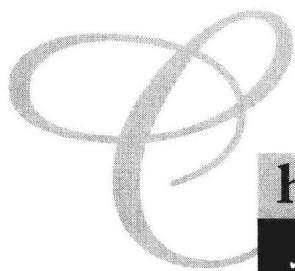
6.3 二维随机变量及其概率分布	152
6.3.1 二维随机变量	152
6.3.2 随机变量的独立性	158
6.4 随机变量的数字特征	160
6.4.1 数学期望	160
6.4.2 方差	163
6.4.3 协方差与相关系数	166
6.5 大数定律与中心极限定理	169
6.5.1 切比雪夫不等式	169
6.5.2 大数定律	170
6.5.3 中心极限定理	171
数学重要历史人物——棣莫弗	173
习题 6	175
第 7 章 数理统计初步	180
7.1 基本概念	180
7.1.1 总体和样本	180
7.1.2 统计量和抽样分布	181
7.2 参数估计	187
7.2.1 点估计	187
7.2.2 评价估计量的标准	190
7.2.3 区间估计	191
7.3 假设检验	196
7.3.1 假设检验的基本概念和两类错误	196
7.3.2 正态总体均值的假设检验	198
7.3.3 正态总体方差的假设检验	200
7.4 回归分析	201
7.4.1 一元线性回归方程的建立	202
7.4.2 回归方程的显著性检验	204
7.5 统计模型及其应用	206
7.5.1 随机变量的模拟	206
7.5.2 随机数的模拟	207
7.6* 本章相关结论的证明	208
数学重要历史人物——泊松	214
习题 7	216



习题答案	221
参考文献	233
附表	234
附表 F.1 泊松分布表	234
附表 F.2 标准正态分布表	235
附表 F.3 χ^2 分布临界值表	236
附表 F.4 t 分布临界值表	237
附表 F.5 F 分布临界值表	238
附表 F.6 相关系数检验表	244

连续思想篇(二)

——多元函数微积分



Chapter 1

第1章 多元函数的微分

在自然科学和工程技术中经常会遇到多于一个自变量的函数, 这种函数称为多元函数. 多元函数的微分学是一元函数微分学的推广, 它们有着许多类似之处, 但又有较大的区别. 从一元函数到二元函数会产生许多新的问题, 但由二元函数到三元函数或更多元函数是很自然的. 因此本章着重讨论二元函数的微分学. 作为二元函数微分学的预备知识, 先简单介绍空间解析几何的内容.

1.1 空间解析几何简介

1.1.1 空间直角坐标系

平面解析几何中, 建立了平面直角坐标系, 并利用平面直角坐标系建立了平面上的点与二元有序数组 (即坐标) 之间的一一对应关系. 同样, 为了把空间任一点与有序数组对应起来, 我们来建立空间直角坐标系.

过空间一定点 O , 作三条相互垂直的数轴: x 轴, y 轴, z 轴, 统称为坐标轴. 它们的次序和方向一般按右手法则规定, 即用右手握住 z 轴, 四指从 x 轴的正向旋转 90° 到 y 轴正向时, 拇指的指向就是 z 轴的正向. 不加特别说明, 一般三条坐标轴的长度单位都相同. 这样, 得到空间直角坐标系, 一般称为右手系, 如图 1.1 所示.

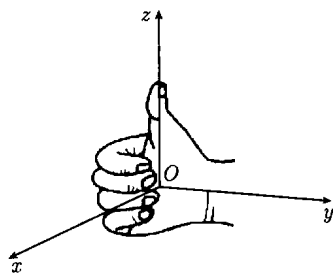


图 1.1

定点 O 称为坐标原点, 由两条坐标轴确定的平面称为坐标平面. 例如, 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为

xOy 坐标面, y 轴和 z 轴确定的坐标面称为 yOz 坐标面, z 轴和 x 轴确定的坐标面称为 zOx 坐标面. 如图 1.2 所示, 通常将 xOy 坐标面配置在水平面上. 三个坐标平面把空间分成 8 个部分, 每一部分称为一个卦限. 含有三个坐标轴正向的卦限称为第 I 卦限, 在 xOy 平面上方由第一卦限依逆时针方向依次为 II, III, IV 卦限. 在 xOy 平面下方与第 I 卦限相对的为第 V 卦限, 依逆时针方向依次为 VI, VII, VIII 卦限, 如图 1.3 所示.

给定空间任一点 M , 过 M 分别作 x 轴, y 轴和 z 轴的垂面, 分别交 x 轴, y 轴, z 轴于点 P, Q, R , 设 P, Q, R 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x, y, z , 则称点 M 确定了

一个三元有序数组 (x, y, z) ; 反之, 对任意一个三元有序数组 (x, y, z) , 在 x 轴, y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的三点 P, Q, R , 然后过 P, Q, R 分别作垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴的平面, 这三个平面交于一点 M , 则由三元有序数组 (x, y, z) 唯一地确定了空间一点 M . 这样, 在空间建立了坐标系之后, 空间任一点 M 与三元有序数组之间建立了一一对应关系 (图 1.2), 称这个三元有序数组为点 M 的坐标, 记为 $M(x, y, z)$.

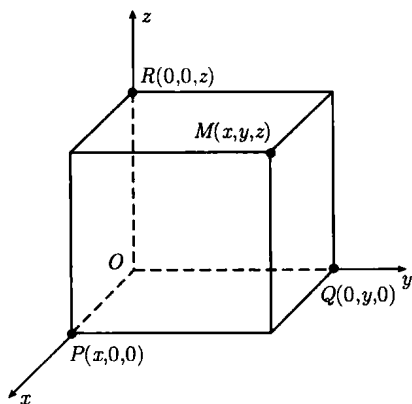


图 1.2

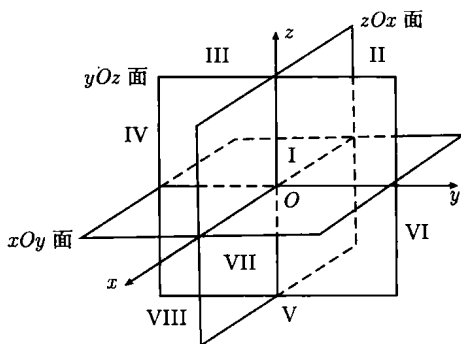


图 1.3

坐标原点的坐标为 $O(0, 0, 0)$; x 轴, y 轴和 z 轴上点的坐标分别为 $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ 和 $(0, 0, z)$ 的形式; xOy 坐标面, yOz 坐标面和 zOx 坐标面上点的坐标分别为 $(x, y, 0)$, $(0, y, z)$ 和 $(x, 0, z)$ 的形式.

1.1.2 空间任意两点间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 是空间任意两点, 过 M_1 和 M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面得六个平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体, 如图 1.4 所示.

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

又

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

于是,

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

又

$$|M_1P| = |P_1P_2| = |x_2 - x_1|, \quad |PN| = |Q_1Q_2| = |y_2 - y_1|, \quad |NM_2| = |R_1R_2| = |z_2 - z_1|,$$

因此

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.1)$$

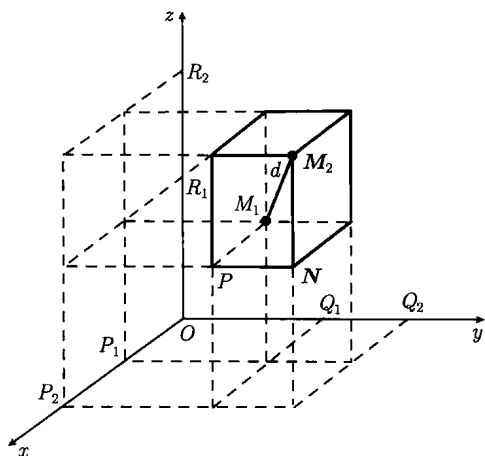


图 1.4

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地, 点 $M(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1.1.3 曲面与方程

1. 曲面方程的概念

在日常生活中, 经常会遇到各种曲面, 如反光镜的镜面、管道的外表面以及锥面等.

在平面解析几何中, 把平面曲线看成是动点的运动轨迹. 同样, 在空间解析几何中, 也把曲面看成是动点的运动轨迹.

设曲面 S 与方程

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.2)$$

有下述关系:

- (1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 (1.2);
- (2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 (1.2),

那么方程 (1.2) 就称为曲面 S 的方程, 曲面 S 称为方程 (1.2) 的图形 (图 1.5).

下面建立几个常见曲面的方程.

例 1.1 建立球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面的方程 (图 1.6).

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上的任一点, 则有 $|M_0M| = R$. 由于

$$|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

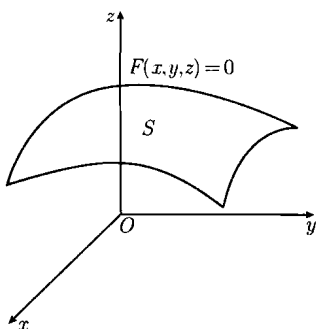


图 1.5

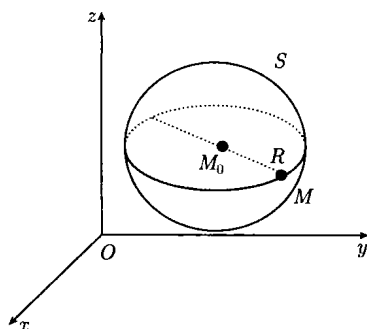


图 1.6

所以

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R,$$

即

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (1.3)$$

这就是球面上任一点的坐标所满足的方程, 而不在球面上的点都不满足方程 (1.3), 因此方程 (1.3) 就是以点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为球心、 R 为半径的球面的方程.

如果球心在坐标原点, 则球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (1.4)$$

例 1.2 设有点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意知道, 所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x, y, z)$ 为所求平面上的任一点, 根据题意, 有

$$|AM| = |BM|,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2},$$

两边平方, 并化简得

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0.$$

这就是所求平面上点的坐标所满足的方程. 不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程, 所以该方程就是所求平面的方程.

例 1.3 求三个坐标面的方程.

解 xOy 面上任何一点的坐标均为 $(x, y, 0)$ 的形式, 即任何一点的 z 坐标都为 0; 反过来, 满足 $z = 0$ 的点也必然在 xOy 面上. 因此 xOy 面的方程为 $z = 0$.

类似地, yOz 面和 zOx 面的方程分别为 $x = 0$ 和 $y = 0$.



例 1.4 研究方程 $z = c$ (c 为常数) 的图形.

解 方程 $z = c$ 中不含 x, y , 即对于 $z = c$ 所表示图形上的任意一点, 其坐标都为 (x, y, c) 的形式, $z = c$ 表示的图形可以看成是由 xOy 面向上 ($c > 0$) 或向下 ($c < 0$) 平移 $|c|$ 个单位得到, 如图 1.7 所示.

例 1.2, 例 1.3 和例 1.4 所研究的方程都是一次方程, 所考察的图形都是平面. 可以证明任何一个三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(A, B, C, D 均为常数, 且 A, B, C 不全为 0) 的图形都是一张平面; 反之, 任何一张平面的方程都是三元一次方程.

2. 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面 S 称为柱面 (图 1.8). 定曲线 C 称为柱面的准线, 动直线 L 称为柱面的母线.

例如, 方程 $x^2 + y^2 = R^2$ 表示的图形是以 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 称为圆柱面, 如图 1.9 所示.

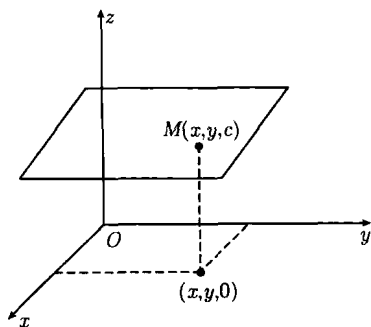


图 1.7

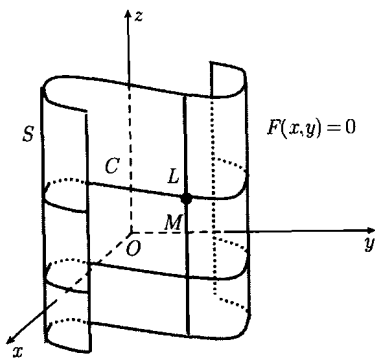


图 1.8

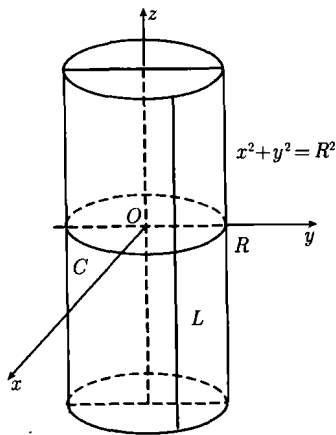


图 1.9

一般地, $F(x, y) = 0$ 表示以 xOy 面上的曲线 $F(x, y) = 0$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 如图 1.8 所示. $H(y, z) = 0$ 表示以 yOz 面上的曲线 $H(y, z) = 0$ 为准线, 母线平行于 x 轴的柱面. $G(z, x) = 0$ 表示以 zOx 面上的曲线 $G(z, x) = 0$ 为准线, 母线平行于 y 轴的柱面.



3. 旋转曲面

以一条平面曲线 C 绕其平面上的一条直线 L 旋转一周所成的曲面 S 称为**旋转曲面**. 平面曲线 C 称为曲面 S 的**母线**, 定直线 L 称为曲面 S 的**轴**, 如图 1.10 所示.

可以求得, yOz 坐标面上的曲线 $C: f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转一周所得到的旋转曲面 S 的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0.$$

曲线 C 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面 S 的方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0.$$

其他类似.

例如, 圆锥面就是一旋转曲面. 它是一条直线 L 绕另一条与之相交的直线旋转一周所得. 两直线的交点称为圆锥面的顶点, 两直线的夹角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 称为圆锥面的半顶角.

例 1.5 试建立顶点在坐标原点 O , 旋转轴为 z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面的方程.

解 如图 1.11 所示, 直线 L 的方程为 $z = y \cot \alpha$. 将 L 绕 z 轴旋转一周所成的曲面方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2} \cot \alpha.$$

令 $a = \cot \alpha$, 于是得到圆锥面的方程

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

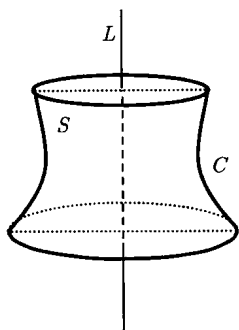


图 1.10

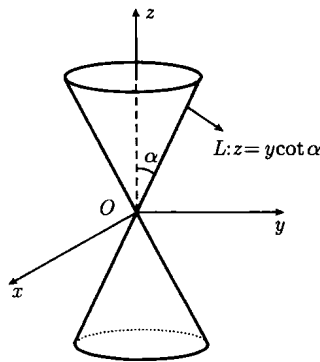


图 1.11

常见的二次曲面还有椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (图 1.12); 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ (图 1.13) 等. 一般地, 三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.

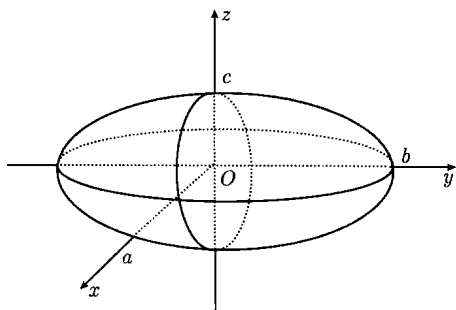


图 1.12

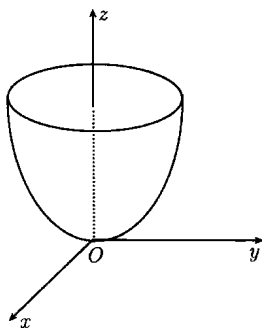


图 1.13

1.2 多元函数的概念

1. 多元函数的定义

实际问题中, 很多变量依赖的自变量多于一个, 看下面的例子:

例 1.6 边长分别为 x 和 y 的矩形的面积为

$$S = xy.$$

这里, 当矩形的边长 x 和 y 每取定一组数值, 就有一确定的面积值 S 与之对应. 即 S 随着边长 x 和 y 的变化而变化. 如果 x 和 y 中有一个固定不变, 则此时 S 只依赖于另一个变量, 也就是一元函数了.

例 1.7 底面半径为 r , 高为 h 的圆柱体的体积为

$$V = \pi r^2 h.$$

当半径 r 和高 h 每取定一组数值, 就有一确定的体积值 V 与之对应, 即 V 随着 r 和 h 的变化而变化.

上述两个实例说明, 在一定条件下, 三个变量之间存在着一种依赖关系, 这种关系给出了一个变量与另两个变量之间的对应法则. 依照这个法则, 当两个变量在允许的范围内取定一组数时, 另一个变量有唯一确定的值与之对应. 这就确定了一个二元函数.

下面给出二元函数的定义.

定义 1.1 设 D 是平面上的一个非空点集, 如果对于每个点 $(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定的法则 f 总有唯一确定的值与之对应, 则称 z 是变量 x, y 的**二元函数**, 记为

$$z = f(x, y),$$

其中变量 x, y 称为**自变量**, z 称为**因变量**, 集合 D 称为函数 $f(x, y)$ 的**定义域**, 对应函数值的集合 $\{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为该函数的**值域**.

类似地, 可定义三元及三元以上函数. 当 $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为**多元函数**. 多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.