普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学

（文科类）（下册）

孙艳蕊　邵新慧　郑维英
宋叔尼　杨中兵　王　艳　编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学(文科类)

(下册)

孙艳蕊　邵新慧　郑维英
宋叔尼　杨中兵　王　艳　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是高等学校文科(包括经管类)各专业的数学教材，分上、下两册.上册含一元函数的微积分和线性代数部分，内容包括初等函数、极限与连续、变化率与导数、积分、线性代数初步、矩阵与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 下册含多元函数的微积分、常微分方程和概率统计部分，内容包括多元函数的微分、二重积分、无穷级数、常微分方程、随机事件的概率、随机变量及其概率分布、数理统计初步. 各章均配有适当、适量的习题供读者学习巩固.

本书既可作为高等学校文科(包括经管类)各专业大学数学课程的教材，也可作为相关专业的教学参考书和自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学(文科类)(下册)/孙艳蕊，邵新慧，郑维英等编. —北京：科学出版社, 2012

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-03-033957-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①孙… ②邵… ③郑… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 058984 号

责任编辑: 张中兴 唐保军 / 责任校对: 钟 洋

责任印制: 张克忠 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京市安泰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2012 年 4 月第一次印刷 印张: 15 3/4

字数: 310 000

定价: 28.00 元

Contents

目 录

连续思想篇(二)——多元函数微积分

连续思想篇（二）

——多元函数微积分

Chapter 1

第1章 多元函数的微分

在自然科学和工程技术中经常会遇到多于一个自变量的函数, 这种函数称为多元函数. 多元函数的微分学是一元函数微分学的推广, 它们有着许多类似之处, 但又有较大的区别. 从一元函数到二元函数会产生许多新的问题, 但由二元函数到三元函数或更多元函数是很自然的. 因此本章着重讨论二元函数的微分学. 作为二元函数微分学的预备知识, 先简单介绍空间解析几何的内容.

1.1 空间解析几何简介

1.1.1 空间直角坐标系

平面解析几何中, 建立了平面直角坐标系, 并利用平面直角坐标系建立了平面上的点与二元有序数组 (即坐标) 之间的一一对应关系. 同样, 为了把空间任一点与有序数组对应起来, 我们来建立空间直角坐标系.

过空间一定点 O, 作三条相互垂直的数轴: x 轴, y 轴, z 轴, 统称为**坐标轴**. 它们的次序和方向一般按右手法则规定, 即用右手握住 z 轴, 四指从 x 轴的正向旋转 $90°$ 到 y 轴正向时, 拇指的指向就是 z 轴的正向. 不加特别说明, 一般三条坐标轴的长度单位都相同. 这样, 得到空间直角坐标系, 一般称为右手系, 如图 1.1 所示.

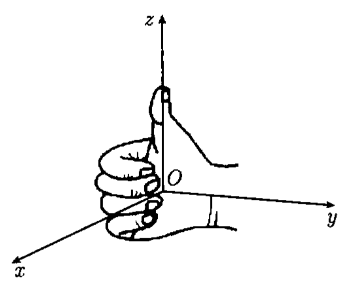

图 1.1

定点 O 称为**坐标原点**, 由两条坐标轴确定的平面称为**坐标平面**. 例如, 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 坐标面, y 轴和 z 轴确定的坐标面称为 yOz 坐标面, z 轴和 x 轴确定的坐标面称为 zOx 坐标面. 如图 1.2 所示, 通常将 xOy 坐标面配置在水平面上. 三个坐标平面把空间分成 8 个部分, 每一部分称为一个卦限. 含有三个坐标轴正向的卦限称为第 I 卦限, 在 xOy 平面上方由第一卦限依逆时针方向依次为 II, III, IV 卦限. 在 xOy 平面下方与第 I 卦限相对的为第 V 卦限, 依逆时针方向依次为 VI, VII, VIII 卦限, 如图 1.3 所示.

给定空间任一点 M, 过 M 分别作 x 轴, y 轴和 z 轴的垂面, 分别交 x 轴, y 轴, z 轴于点 P, Q, R, 设 P, Q, R 三点在三条坐标轴上的坐标依次为 x, y, z, 则称点 M 确定了

一个三元有序数组 (x,y,z); 反之, 对任意一个三元有序数组 (x,y,z), 在 x 轴, y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x,y,z 的三点 P,Q,R, 然后过 P,Q,R 分别作垂直于 x 轴, y 轴和 z 轴的平面, 这三个平面交于一点 M, 则由三元有序数组 (x,y,z) 唯一地确定了空间一点 M. 这样, 在空间建立了坐标系之后, 空间任一点 M 与三元有序数组之间建立了一一对应关系 (图 1.2), 称这个三元有序数组为**点 M 的坐标**, 记为 $M(x,y,z)$.

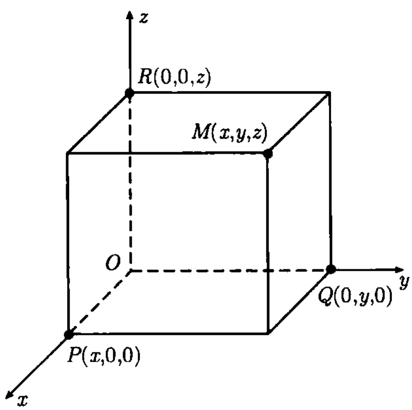

图 1.2

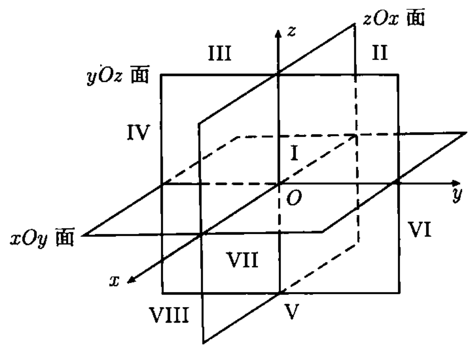

图 1.3

坐标原点的坐标为 $O(0,0,0)$; x 轴, y 轴和 z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0),(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$ 的形式; xOy 坐标面, yOz 坐标面和 zOx 坐标面上点的坐标分别为 $(x,y,0),(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$ 的形式.

1.1.2 空间任意两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点, 过 M_1 和 M_2 分别作垂直于三个坐标轴的平面得六个平面, 这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体, 如图 1.4 所示.

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2,$$

又

$$|M_1N|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2,$$

于是,

$$|M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2.$$

又

$$|M_1P|=|P_1P_2|=|x_2-x_1|, \quad |PN|=|Q_1Q_2|=|y_2-y_1|, \quad |NM_2|=|R_1R_2|=|z_2-z_1|,$$

因此

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

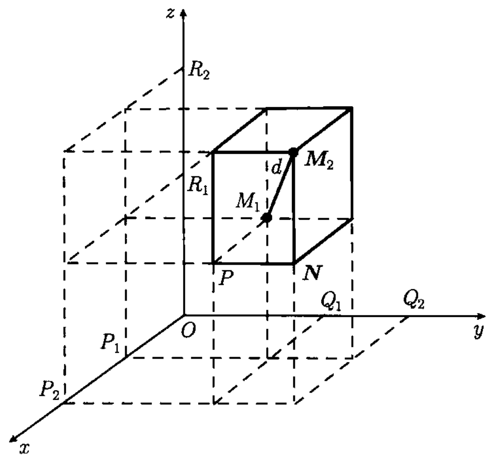

图 1.4

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地, 点 $M(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

1.1.3 曲面与方程

1. 曲面方程的概念

在日常生活中, 经常会遇到各种曲面, 如反光镜的镜面、管道的外表面以及锥面等.

在平面解析几何中, 把平面曲线看成是动点的运动轨迹. 同样, 在空间解析几何中, 也把曲面看成是动点的运动轨迹.

设曲面 S 与方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{1.2}$$

有下述关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 (1.2);

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 (1.2),

那么方程 (1.2) 就称为**曲面 S 的方程**, 曲面 S 称为**方程** (1.2) **的图形** (图 1.5).

下面建立几个常见曲面的方程.

例 1.1 建立球心在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$、半径为 R 的球面的方程 (图 1.6).

解 设 $M(x,y,z)$ 是球面上的任一点, 则有 $|M_0M|=R$. 由于

$$|M_0M|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

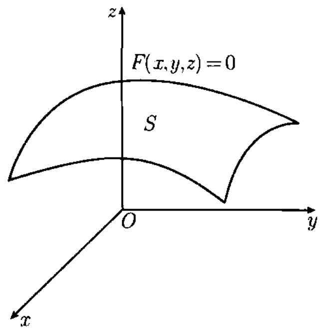

图 1.5

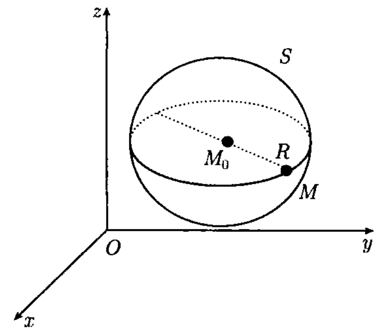

图 1.6

所以

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \tag{1.3}$$

这就是球面上任一点的坐标所满足的方程, 而不在球面上的点都不满足方程 (1.3), 因此方程 (1.3) 就是以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心、R 为半径的球面的方程.

如果球心在坐标原点, 则球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{1.4}$$

例 1.2 设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$, 求线段 AB 的垂直平分面的方程.

解 由题意知道, 所求的平面就是与 A 和 B 等距离的点的几何轨迹. 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的任一点, 根据题意, 有

$$|AM|=|BM|,$$

即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2},$$

两边平方, 并化简得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

这就是所求平面上点的坐标所满足的方程. 不在此平面上的点的坐标都不满足这个方程, 所以该方程就是所求平面的方程.

例 1.3 求三个坐标面的方程.

解 xOy 面上任何一点的坐标均为 $(x,y,0)$ 的形式, 即任何一点的 z 坐标都为 0; 反过来, 满足 $z=0$ 的点也必然在 xOy 面上. 因此 xOy 面的方程为 $z=0$.

类似地, yOz 面和 zOx 面的方程分别为 $x=0$ 和 $y=0$.

例 1.4 研究方程 $z=c$ (c 为常数) 的图形.

解 方程 $z=c$ 中不含 x,y, 即对于 $z=c$ 所表示图形上的任意一点, 其坐标都为 (x,y,c) 的形式, $z=c$ 表示的图形可以看成是由 xOy 面向上 ($c>0$) 或向下 ($c<0$) 平移 $|c|$ 个单位得到, 如图 1.7 所示.

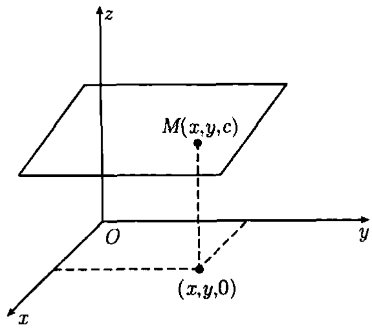

图 1.7

例 1.2, 例 1.3 和例 1.4 所研究的方程都是一次方程, 所考察的图形都是平面. 可以证明任何一个三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(A,B,C,D 均为常数, 且 A,B,C 不全为 0) 的图形都是一张平面; 反之, 任何一张平面的方程都是三元一次方程.

2. 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 所形成的曲面 S 称为**柱面** (图 1.8). 定曲线 C 称为柱面的**准线**, 动直线 L 称为柱面的**母线**.

例如, 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示的图形是以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=R^2$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 称为圆柱面, 如图 1.9 所示.

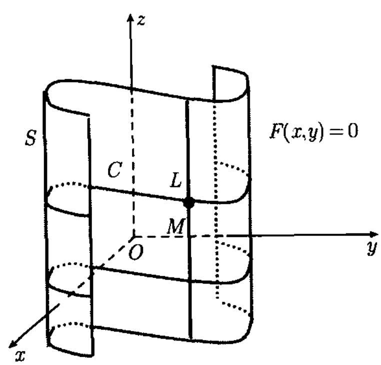

图 1.8

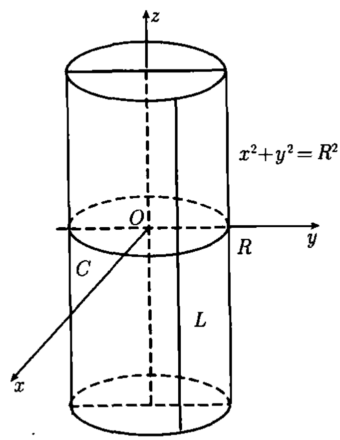

图 1.9

一般地, $F(x,y)=0$ 表示以 xOy 面上的曲线 $F(x,y)=0$ 为准线, 母线平行于 z 轴的柱面, 如图 1.8 所示. $H(y,z)=0$ 表示以 yOz 面上的曲线 $H(y,z)=0$ 为准线, 母线平行于 x 轴的柱面. $G(z,x)=0$ 表示以 zOx 面上的曲线 $G(z,x)=0$ 为准线, 母线平行于 y 轴的柱面.

3. 旋转曲面

以一条平面曲线 C 绕其平面上的一条直线 L 旋转一周所成的曲面 S 称为**旋转曲面**. 平面曲线 C 称为曲面 S 的**母线**, 定直线 L 称为曲面 S 的**轴**, 如图 1.10 所示.

可以求得, yOz 坐标面上的曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周所得到的旋转曲面 S 的方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ \ z)=0.$$

曲线 C 绕 y 轴旋转一周所得到的旋转曲面 S 的方程为

$$f(y,\ \ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

其他类似.

例如, 圆锥面就是一旋转曲面. 它是一条直线 L 绕另一条与之相交的直线旋转一周所得. 两直线的交点称为圆锥面的顶点, 两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 称为圆锥面的半顶角.

例 1.5 试建立顶点在坐标原点 O, 旋转轴为 z 轴, 半顶角为 α 的圆锥面的方程.

解 如图 1.11 所示, 直线 L 的方程为 $z=y\cot\alpha$. 将 L 绕 z 轴旋转一周所成的曲面方程为

$$z=\pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha.$$

令 $a=\cot\alpha$, 于是得到圆锥面的方程

$$z^2=a^2(x^2+y^2).$$

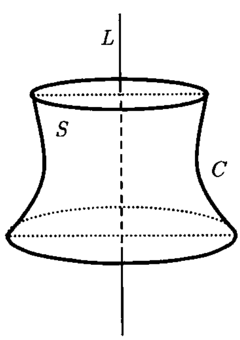

图 1.10

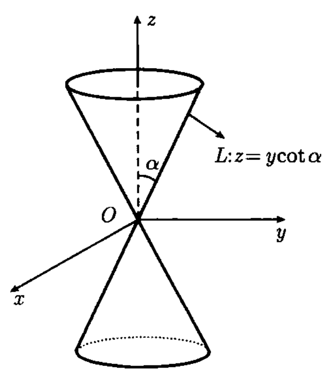

图 1.11

常见的二次曲面还有椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (图 1.12); 椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$ (图 1.13) 等. 一般地, 三元二次方程所表示的曲面称为**二次曲面**.

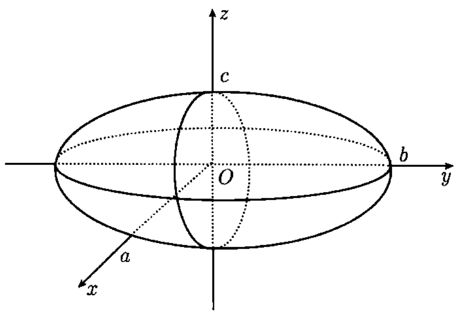

图 1.12

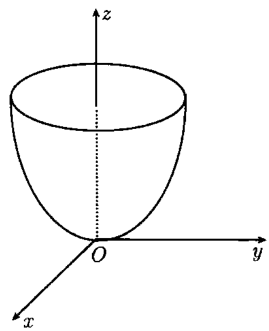

图 1.13

1.2 多元函数的概念

1. 多元函数的定义

实际问题中, 很多变量依赖的自变量多于一个, 看下面的例子:

例 1.6 边长分别为 x 和 y 的矩形的面积为

$$S = xy.$$

这里, 当矩形的边长 x 和 y 每取定一组数值, 就有一确定的面积值 S 与之对应. 即 S 随着边长 x 和 y 的变化而变化. 如果 x 和 y 中有一个固定不变, 则此时 S 只依赖于另一个变量, 也就是一元函数了.

例 1.7 底面半径为 r, 高为 h 的圆柱体的体积为

$$V = \pi r^2 h.$$

当半径 r 和高 h 每取定一组数值, 就有一确定的体积值 V 与之对应, 即 V 随着 r 和 h 的变化而变化.

上述两个实例说明, 在一定条件下, 三个变量之间存在着一种依赖关系, 这种关系给出了一个变量与另两个变量之间的对应法则. 依照这个法则, 当两个变量在允许的范围内取定一组数时, 另一个变量有唯一确定的值与之对应. 这就确定了一个二元函数.

下面给出二元函数的定义.

定义 1.1 设 D 是平面上的一个非空点集, 如果对于每个点 $(x, y) \in D$, 变量 z 按照一定的法则 f 总有唯一确定的值与之对应, 则称 z 是变量 x, y 的**二元函数**, 记为

$$z = f(x, y),$$

其中变量 x, y 称为**自变量**, z 称为**因变量**, 集合 D 称为函数 $f(x, y)$ 的**定义域**, 对应函数值的集合 $\{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为该函数的**值域**.

类似地, 可定义三元及三元以上函数. 当 $n \geqslant 2$ 时, n 元函数统称为**多元函数**. 多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.