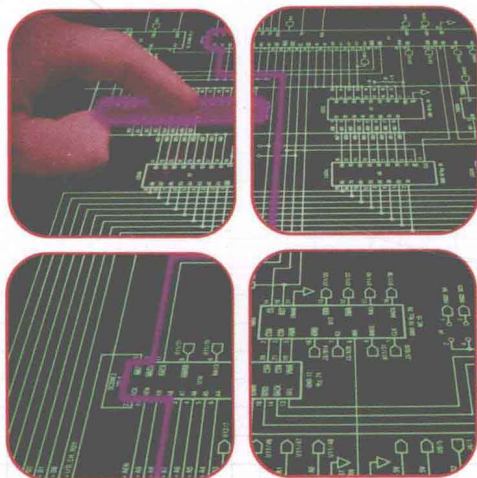


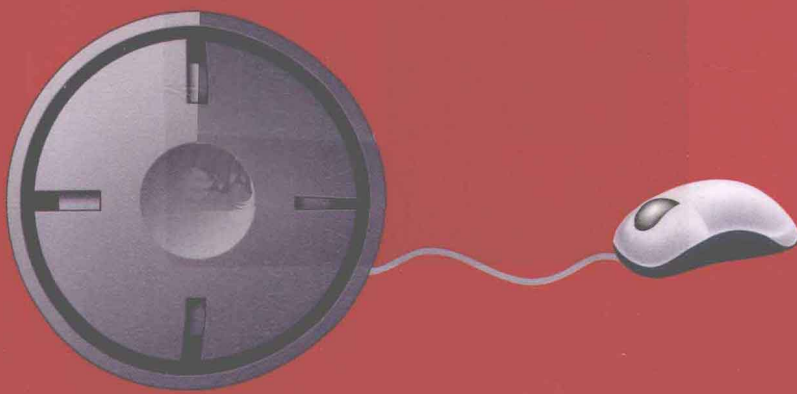
现代控制理论

关新平 吴忠强 主 编



M

odern Control Theory



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

高等学校“十二五”电气自动化类规划教材

现代控制理论

关新平 吴忠强 主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

与古典控制理论只适用于线性定常单输入-单输出系统不同,现代控制理论适用于线性的或非线性的多输入-多输出系统。现代控制理论本质上是时域的方法,而古典控制理论是复频域的方法。在古典控制理论中,系统的设计方法是建立在试探法基础上的,通常得不到最优控制系统;现代控制理论能使人们对于给定的性能指标设计出最优控制系统,还能在设计时考虑初始条件,因而被广泛应用。

本书系统地介绍了现代控制理论的基本内容,包括控制系统的状态空间描述、运动分析、能控性与能观性、李雅普诺夫稳定性分析、状态反馈与状态观测器设计、最优控制系统设计。每章均配有一定的例题和习题。

本书可作为高等学校自动化专业的本科生和非自动化专业的研究生教材,也可供有关技术人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。
版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/关新平,吴忠强主编. —北京:电子工业出版社,2012.5

高等学校“十二五”电气自动化类规划教材

ISBN 978-7-121-15166-8

I. ①现… II. ①关… ②吴… III. ①现代控制理论—高等学校—教材 IV. ①O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 236682 号

策划编辑:陈韦凯

责任编辑:陈韦凯 特约编辑:刘海霞 李海玲

印 刷: 北京京师印务有限公司

装 订:

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:345 千字

印 次:2012 年 5 月第 1 次印刷

印 数:4 000 册 定价:29.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线:(010) 88258888。

高等学校“十二五”电气自动化类规划教材 丛书编委会

(按拼音排序, 排名不分先后)

编委会主任: 关新平

编委会副主任:

毕卫红 韩 璞 娄国焕 吴学礼 杨 鹏

专家组成员:

何 谓 高 蒙 李国洪 李建华

王培光 姚福来 赵书强

编委会委员:

常丹华 曹晓华 杜立强 顾和荣 侯培国

韩兵欣 郝 成 李书杰 李珍国 马翠红

牛培峰 孙孝峰 唐瑞尹 吴忠强 王建民

王海群 王静波 王立乔 杨友良 殷桂梁

岳树盛 张宝荣 张秀玲 张燕君 张晓晖

前 言

以频域方法为基础的古典控制理论在经历了一百多年之后，直到 20 世纪的四五十年代才形成完整、独立的控制理论。毫无疑问，古典控制理论在解决广泛的控制问题上是非常有效的，并且已被广大从事自动控制的工程技术人员所掌握。它的广泛应用给人类带来了巨大的社会和经济效益，它的突出成就是导致自动化技术的诞生和发展。但是，也正是这种社会的进化过程对控制理论不断地提出新的更加严格的要求，使古典控制理论面临着挑战。随着 20 世纪 50 年代兴起的航天技术及其他生产技术的发展，一方面使控制对象变得更加复杂，另一方面对控制的要求提出了更加苛刻的条件。例如，非线性的、时变的或者分布参数的系统的控制问题，对系统本身或其周围环境的不确定因素的适应控制问题，多输入-多输出（MIMO）系统的分析与综合问题，以及实现控制的某种目标函数意义下的最优化问题等，都不是单纯依赖古典控制理论所能解决的。面对这些挑战，控制理论必须向前发展，而在这个时期整个科学的进步，特别是现代数学和计算机技术的成就恰好为控制理论的发展提供了强有力的工具。正是在这种历史背景下，现代控制理论应运而生。在 20 世纪五六十年代，很多科学家为此做出了杰出的贡献，其中应特别提出的有庞特里亚金的极值原理，贝尔曼（Bellman）的动态规划，以及卡尔曼（Kalman）的滤波、能控性与能观测性理论等。正是他们的这些理论上的突破性成果奠定了现代控制理论的基础，成为控制理论由古典控制理论发展到现代控制理论的里程碑。至今 40 多年来，现代控制理论不论在理论方面还是在应用方面一直处于十分活跃的发展状态。它不仅在航天与航空技术上取得了举世瞩目的惊人成就，而且在电气、机械、化工、冶金、交通等工程系统及生物工程、企业管理和社会科学等广泛领域内都有成功的应用。可以毫不夸张地说，现代控制理论已经成为渗透到各个学科领域的横向科学。显然，控制理论的发展与成就标志着人类对客观世界的认识能力和改造能力的进一步提高。因此，它也必然会对人类的认识论和方法论给以重大影响。

本书共分 6 章：第 1 章介绍了控制系统的状态空间表达式，由姚成玉编写；第 2 章介绍了控制系统状态空间表达式的解，由魏立新编写；第 3 章介绍了线性控制系统的能控性与能观性，由吴忠强编写；第 4 章介绍了控制系统的稳定性，由李峰磊编写；第 5 章介绍了线性定常系统的综合，由张秀玲编写；第 6 章介绍了最优控制，由罗小元编写。全书由关新平、吴忠强汇总整理。本书可作为高等学校自动化专业的本科生和非自动化专业的研究生教材。

由于时间仓促，本书难免有疏漏之处，恳请读者批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 控制系统的状态空间表达式	1
1.1 状态变量及状态空间表达式	1
1.1.1 状态变量	1
1.1.2 状态矢量	2
1.1.3 状态空间	2
1.1.4 状态方程	2
1.1.5 输出方程	3
1.1.6 状态空间表达式	4
1.1.7 状态空间表达式的系统框图	6
1.1.8 状态空间法的特点	7
1.2 模拟结构图	7
1.3 状态空间表达式的建立 (一)	8
1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式	9
1.3.2 从系统的机理出发建立状态空间表达式	13
1.4 状态空间表达式的建立 (二)	17
1.4.1 传递函数中没有零点时的实现	17
1.4.2 传递函数中有零点时的实现	20
1.5 状态矢量的线性变换 (坐标变换)	25
1.5.1 状态空间表达式的非唯一性	25
1.5.2 特征值及特征矢量	28
1.5.3 约旦标准型	30
1.6 从状态空间表达式求传递函数阵	44
1.6.1 传递函数 (阵)	44
1.6.2 组合系统的状态空间表达式及传递函数阵	46
1.7 离散时间系统的状态空间表达式	49
习题	51
第 2 章 控制系统状态空间表达式的解	55
2.1 线性定常系统的自由运动	55
2.1.1 齐次状态方程的解	55
2.1.2 齐次状态方程解的统一形式——状态转移矩阵	61
2.2 矩阵指数	63
2.3 线性定常系统的强迫运动	73
2.4 离散时间系统的状态空间分析	75
2.4.1 连续系统状态空间方程的离散化	75
2.4.2 线性定常离散系统的运动分析	77
习题	84

第 3 章 线性控制系统的能控性与能观性	86
3.1 能控性定义及能控性判据	86
3.1.1 状态能控性的定义	86
3.1.2 线性定常系统的能控性判别	87
3.2 能观性定义及能观性判据	96
3.3 能控性与能观性的对偶关系	102
3.4 状态空间表达式的能控标准型与能观标准型	104
3.5 线性系统的结构分解	114
3.6 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观性之间的关系	123
习题	125
第 4 章 控制系统的稳定性	127
4.1 稳定性的基本概念	127
4.1.1 系统状态的运动及平衡状态	127
4.1.2 预备知识	128
4.1.3 系统稳定性概念	129
4.2 李雅普诺夫稳定性理论	131
4.2.1 李雅普诺夫第一法	131
4.2.2 李雅普诺夫第二法	133
4.3 线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	136
4.4 非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	138
习题	140
第 5 章 线性定常系统的综合	142
5.1 控制系统的结构、特性及极点配置	142
5.1.1 状态反馈	142
5.1.2 输出反馈	143
5.1.3 从输出到状态矢量导数 $\dot{x}$ 反馈	144
5.1.4 闭环系统的能控性与能观性	145
5.2 极点配置问题	147
5.2.1 采用状态反馈	147
5.2.2 采用输出反馈	150
5.2.3 采用从输出到 $\dot{x}$ 反馈	151
5.3 系统镇定问题	153
5.4 状态观测器	156
5.4.1 状态观测器定义	156
5.4.2 状态观测器的实现	156
5.4.3 反馈矩阵 G 的设计	158
5.5 带状态观测器的状态反馈系统	161
5.5.1 系统结构	161
5.5.2 闭环系统的基本特性	162

5.5.3 带观测器状态反馈系统与带补偿器输出反馈系统的等价性.....	164
5.5.4 状态观测器期望特征值的配置原则.....	167
习题.....	168
第 6 章 最优控制	171
6.1 最优控制的一般概念	171
6.1.1 最优控制的基本概念	171
6.1.2 最优控制问题	171
6.2 无约束最优控制的变分方法	175
6.2.1 经典变分理论	175
6.2.2 贯截条件	177
6.3 有约束最优控制的极小值原理	178
6.4 线性二次型调节问题的最优控制	180
6.4.1 线性二次型调节问题	180
6.4.2 终端时间有限时变状态调节器.....	182
6.4.3 终端时间无限状态调节器	187
6.5 最短时间控制和最小能量控制	189
6.5.1 Bang-Bang 控制原理	189
6.5.2 最短时间控制	190
6.5.3 最小能量控制	195
习题.....	200
参考文献	203

第 1 章 控制系统的状态空间表达式

在经典控制理论中，对线性定常系统，可用常微分方程或传递函数加以描述，可将某个单变量作为输出，直接与输入联系起来。实际上，系统除了输出量这个变量以外，还包含其他相互独立的变量，而微分方程或传递函数对这些内部的中间变量是不便描述的，因而不能包含系统的所有信息。显然，从能否完全揭示系统的全部运动状态来说，用微分方程或传递函数描述线性定常系统有其不足之处。

然而，现代工程系统日趋复杂，性能要求越来越高，因此，对系统的描述应该更加精细。对一个复杂系统的分析与综合，不仅需要了解它的输入-输出关系，而且要求知道它的内部结构。经常遇到的受控对象，不仅是定常的，也可能是有许多时变的；不仅是线性的，也可能是非线性的；不仅是确定性的，也可能是随机的。总之，对象的多样性，要求描述系统的数学工具应具有一定的适应性。尤其是现代许多复杂系统中，往往都需要有计算机参与工作。因此，为适应控制系统理论这种发展趋势的要求，在描述系统的数学方法上，需要进一步改进。控制理论发展到 20 世纪五六十年代便产生了一种新的描述方法——状态空间法。

这一方法的特点是：采用状态空间表达式（状态空间描述）作为系统的数学模型，系统的动态特性是由状态变量构成的一阶微分方程组来描述的。它能反映系统的全部独立变量的变化，从而能同时确定系统的全部内部运动状态，而且还可以方便地处理初始条件。这样，在分析和设计控制系统时，不再只局限于输入量、输出量、误差量，为提高系统性能提供了有力的工具。加之可利用计算机进行分析设计及实时控制，因而可以应用于非线性系统、时变系统、多输入-多输出系统及随机过程。

本章在阐述状态空间表达式基本概念、表达形式的基础上，介绍依据不同已知条件（物理模型、框图、微分方程、传递函数）的建立方法。然后，介绍状态矢量的线性变换及约旦标准型。最后，介绍从状态空间表达式求解传递函数阵。

1.1 状态变量及状态空间表达式

1.1.1 状态变量

足以完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量为状态变量。一个用 n 阶微分方程描述的系统，就有 n 个独立的变量，当这 n 个独立变量的时间响应都求得时，系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此，可以说该系统的状态变量就是 n 阶系统的 n 个独立变量。

同一个系统, 究竟选取哪些变量作为独立变量, 这不是唯一的, 重要的是这些变量是相互独立的, 且其个数应等于微分方程的阶数; 又由于微分方程的阶数唯一地取决于系统中独立储能元件的个数, 因此, 状态变量的个数就应等于系统独立储能元件的个数。

众所周知, n 阶微分方程式要有唯一确定的解, 就要必须知道 n 个独立的初始条件。很明显, 这 n 个独立的初始条件就是一组状态变量在初始时刻 t_0 的值。

综上所述, 状态变量是既足以完全确定系统运动状态而个数又是最小的一组变量, 当其在 $t=t_0$ 时刻的值已知时, 则在给定 $t \geq t_0$ 时间的输入作用下, 便能完全确定系统在任何 $t \geq t_0$ 时间的行为。

1.1.2 状态矢量

如果 n 个状态变量用 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 表示, 并把这些状态变量看做是矢量 $\mathbf{x}(t)$ 的分量, 则 $\mathbf{x}(t)$ 就称为状态矢量, 记作

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \cdots \quad x_n(t)]$$

并且, 状态矢量 $\mathbf{x}$ 的维数定义为其组成状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 的个数, 即 $\dim \mathbf{x} = n$ 。

1.1.3 状态空间

以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的 n 维空间, 称为状态空间。在特定时刻 t , 状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 在状态空间中是一点。已知初始时刻 t_0 的状态 $\mathbf{x}(t_0)$, 就得到状态空间中的一个初始点。随着时间的推移, $\mathbf{x}(t)$ 将在状态空间中描绘出一条轨迹, 称为状态轨线。状态矢量的状态空间表示将矢量的代数表示和几何概念联系起来了。

1.1.4 状态方程

由系统的状态变量构成的一阶微分方程组称为系统的状态方程。

用如图 1-1 所示的 RLC 电路, 说明如何用状态变量描述这一系统。

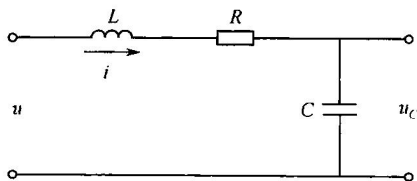


图 1-1 RLC 电路

此系统有两个独立储能元件, 即电容 C 和电感 L , 所以, 应有两个状态变量。状态变

量的选取,原则上是任意的,但考虑到电容的储能与其两端的电压 u_C 和电感的储能与流经它的电流 i 均直接相关,故通常就以 u_C 和 i 作为此系统的两个状态变量。

根据电学原理,容易写出含有两个状态变量的一阶微分方程组,即

$$\begin{cases} C \frac{du_C}{dt} = i \\ L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = u \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} \dot{u}_C = \frac{1}{C} i \\ i = -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i + \frac{1}{L} u \end{cases} \quad (1-1)$$

式(1-1)就是如图1-1所示系统的状态方程,若将式中状态变量用一般符号 x_i 表示,即令 $x_1 = u_C$, $x_2 = i$; 并写成矢量矩阵形式,则状态方程变为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \quad (1-2)$$

或

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

式中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

1.1.5 输出方程

在指定系统输出的情况下,该输出与状态变量间的函数关系式,称为系统的输出方程。在如图1-1所示系统中,指定 $x_1 = u_C$ 作为输出,输出一般用 y 表示,则有

$$y = u_C$$

或

$$y = x_1 \quad (1-3)$$

式(1-3)就是如图1-1所示系统的输出方程,它的矩阵表达式为

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

或

$$y = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (1-4)$$

式中, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 。

1.1.6 状态空间表达式

状态方程和输出方程综合起来, 构成对一个系统完整的动态描述, 称为系统的状态空间表达式。

例如, 式 (1-1) 和式 (1-3), 或式 (1-2) 和式 (1-4) 就是如图 1-1 所示系统的状态空间表达式。

在经典控制理论中, 用指定某个输出量的高阶微分方程来描述系统的动态过程。如图 1-1 所示的系统, 在以 u_c 作为输出时, 从式 (1-1) 消去中间变量 i , 得到二阶微分方程为

$$\ddot{u}_c + \frac{R}{L}\dot{u}_c + \frac{1}{LC}u_c = \frac{1}{LC}u \quad (1-5)$$

其相应的传递函数为

$$\frac{U_c(s)}{U(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (1-6)$$

如果要从高阶微分方程或从传递函数变换为状态方程, 即分解为多个一阶微分方程, 那么此时的状态方程可以有无穷多种形式, 这是由于状态变量的选取可以有无穷多种的缘故。这种状态变量的非唯一性, 归根到底, 是由于系统结构的不确定性造成的。关于这个问题, 下面还将论及, 此处暂不多述。

回到式 (1-5) 或式 (1-6) 的二阶系统, 若选 u_c 和 $\dot{u}_c$ 作为两个状态变量, 即令 $x_1 = u_c$, $x_2 = \dot{u}_c$, 则得一阶微分方程组为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u \end{cases} \quad (1-7)$$

即

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u \quad (1-8)$$

若以 $q = \int i dt$ 和 i 作为两个状态变量, 即令 $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q} = i$, 同样可求得一个状态方程。比较式 (1-8) 和式 (1-2), 显而易见, 同一系统中, 状态变量选取的不同, 状态方程也不同。

从理论上说, 并不要求状态变量在物理上一定是可以测量的量, 但在工程实践上, 仍以选取那些容易测量的量作为状态变量为宜, 因为在最优控制中, 往往需要将状态变量作为反馈量。

设单输入-单输出定常系统, 其状态变量为 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则状态方程的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases}$$

输出方程式为

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + du$$

用矢量矩阵表示时的状态空间表达式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{bu} \\ y &= \mathbf{cx} + du \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为 n 维状态矢量;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 为系统内部状态的联系, 称为系统矩阵, 为 $n \times n$ 方阵;

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 为输入对状态的作用, 称为输入矩阵或控制矩阵, 这里为 $n \times 1$ 的列阵;

$\mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]$ 为状态对输出的影响, 称为输出矩阵, 这里为 $1 \times n$ 的行阵;

d 为输入与输出直接传输项, 这里为一标量。

对于一个复杂系统, 具有 r 个输入, m 个输出, 此时状态方程变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r \end{aligned}$$

至于输出方程, 不仅是状态变量的组合, 而且在特殊情况下, 还可能有输入矢量的直接传递, 因而有如下的一般形式:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r$$

因而, 多输入-多输出系统状态空间表达式的矢量矩阵形式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (1-10)$$

式中: x 和 A 同单输入系统, 分别为 n 维状态矢量和 $n \times n$ 系统矩阵;

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \text{ 为 } r \text{ 维输入 (或控制) 矢量;}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \text{ 为 } m \text{ 维输出矢量;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \text{ 为 } n \times r \text{ 输入 (或控制) 矩阵;}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \text{ 为 } m \times n \text{ 输出矩阵;}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \text{ 为 } m \times r \text{ 直接传递矩阵。}$$

为了简便, 下面除特别说明, 在输出方程中, 均不考虑输入矢量的直接传递, 即令 $D=0$ 。

1.1.7 状态空间表达式的系统框图

和经典控制理论类似, 可以用框图表示系统信号传递的关系。对于式 (1-9) 和式 (1-10) 所描述的系统, 它们的框图分别如图 1-2 (a) 和图 1-2 (b) 所示。图中用单线箭头表示标量信号, 用双线箭头表示矢量信号。

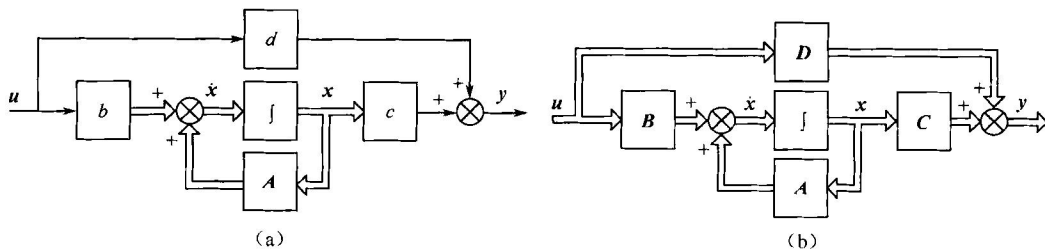


图 1-2 系统信号传递框图

从状态空间表达式和系统框图都能清楚地说明：它们既表征了输入对于系统内部状态的因果关系，又反映了内部状态对于外部输出的影响，所以，状态空间表达式是对系统的一种完全的描述。

1.1.8 状态空间法的特点

通过以上对状态空间描述的初步认识，可总结出如下几点：

- (1) 动力学系统的状态定义为完全地表征系统时间域行为的一个最小内部变量组。
- (2) 状态空间描述考虑了“输入-状态-输出”这一过程，其中，它考虑了被经典控制理论的输入-输出描述所忽略的状态，因此它揭示了问题的本质，即输入引起系统状态的变化，而状态和输入则决定了输出的变化。
- (3) 输入引起状态的变化是一个运动过程，数学上表现为微分方程，即状态方程。状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程，数学上表现为变换方程，即代数方程。
- (4) 系统的状态变量个数仅等于系统包含的独立储能元件的个数。
- (5) 对于给定的系统，状态变量的选择不是唯一的。如果 $\mathbf{x}$ 是系统的一个状态矢量，只要矩阵 $\mathbf{T}$ 是非奇异的，那么 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ 也是一个状态矢量。
- (6) 一般来说，状态变量不一定是物理上可测量或可观察的量，但从便于控制系统的构成来说，把状态变量选为可测量或可观察的量更为合适。
- (7) 系统的状态空间分析法是时域内的一种矩阵运算方法，特别适合用计算机来计算，有利于把工程技术人员从繁琐的计算中解脱出来，使他们在控制系统的分析与综合中从事更富有创造性的工作。

1.2 模拟结构图

在状态空间分析中，采用模拟结构图（或称状态变量图）来反映系统各状态变量之间的信息传递关系，对建立系统的状态空间表达式很有帮助。

为了简便，这里用框图代替模拟计算机的详细模拟图，它是由积分器、放大器、加法器等基本元素组成的。状态空间表达式的结构图可按如下步骤绘制：积分器的数目应等于状态变量数，将它们画在适当的位置，每个积分器的输出表示相应的某个状态变量，然后根据所给的状态方程和输出方程，画出相应的加法器和比例器，最后用箭头将这些元件连接起来。

对于一阶标量微分方程

$$\dot{x} = ax + bu$$

它的模拟结构图如图 1-3 所示。

再以三阶微分方程为例：

$$\ddot{x} + a_2\dot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = bu$$

将最高阶导数留在等式左边，上式可改写成

$$\ddot{x} = -a_0x - a_1\dot{x} - a_2\ddot{x} + bu$$

它的模拟结构图如图 1-4 所示。

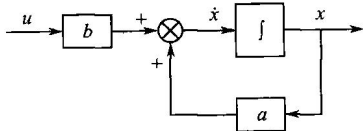


图 1-3 一阶标量微分方程的模拟结构图

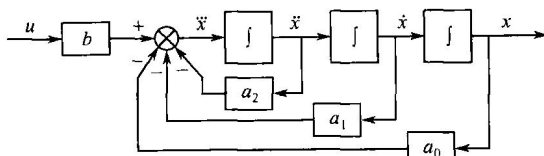


图 1-4 三阶微分方程的模拟结构图

图 1-4 也是传递函数 $W(s) = \frac{b}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$ 的模拟结构图。可见，模拟结构图既描述状态变量间的相互关系，又说明状态变量的物理意义。可以说，模拟结构图是系统相应框图拉普拉斯反变换的图形。

结合上面的方法，可以画出下列传递函数的模拟结构图：

$$W(s) = \frac{b}{s^2 + a_1s + a_0}$$

$$W(s) = \frac{b}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

同样，已知状态空间表达式，也可画出相应的模拟结构图，如图 1-5 所示是下列三阶系统的模拟结构图。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -6x_1 - 3x_2 - 2x_3 + u \\ y &= x_1 + x_2\end{aligned}$$

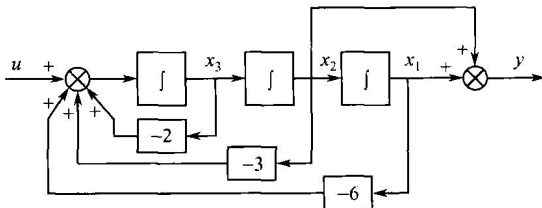


图 1-5 系统模拟结构图

1.3 状态空间表达式的建立（一）

用状态空间法分析系统时，首先要建立给定系统的状态空间表达式。通常可以采用两条可能的途径来求得。

一是分析的途径，适用于结构和参数为已知的系统。对于框图已知的系统，可以根据系统各环节的实际框图连接，写出相应的状态空间表达式；对于物理模型已知的系统，可利用机理分析进行推导得到。

二是辨识的途径,适用于结构和参数难以搞清楚的系统。它通过实验的手段取得数据并采用适当方法确定系统的输入-输出模型(高阶微分方程或传递函数),然后再由所得到的系统输入-输出描述来导出相应的状态空间表达式。这里,前一个步骤称为系统辨识和参数估计,其内容已超出本书的范围。后一个步骤称为实现问题,将在1.4节介绍。

本节介绍分析的途径。

1.3.1 从系统框图出发建立状态空间表达式

当系统的描述是以框图形式给出时,无须求出总的传递函数,可直接由框图导出其相应的状态空间表达式。这是由1.2节的模拟结构图得到的启示,其步骤如下:首先,将系统的各个环节按1.2节所述方法,变换成相应的模拟结构图,并把每个积分器的输出选作一个状态变量 x_i ,其输入便是相应的 $\dot{x}_i$;然后,由模拟图直接写出系统的状态方程和输出方程。

【例 1-1】 系统框图如图 1-6 (a) 所示,输入为 u , 输出为 y 。试求其状态空间表达式。

解 首先,传递函数

$$\frac{K}{Ts+1} = \frac{K}{T} \frac{1}{s + \frac{1}{T}} = \frac{K}{T} \frac{s^{-1}}{1 + \frac{1}{T}s^{-1}}$$

其模拟结构图如图 1-6 (b) 所示。系统的模拟结构图如图 1-6 (c) 所示。

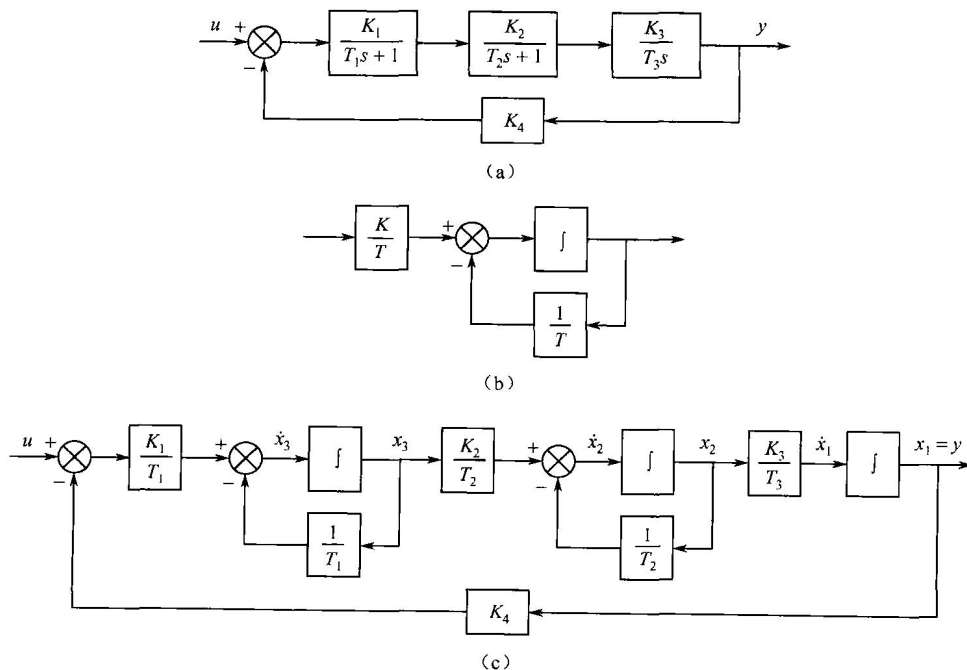


图 1-6 系统框图及模拟结构图