高中毕业班师生对话丛书

数学

乔荣凝　丁志福
陈　汶　高培根　编著

GAO ZHONG BI YE BAN SHI SHENG DUI HUA CONG SHU

科学普及出版社

高中毕业班师生对话丛书

数　　学

乔荣凝　丁志福
陈　汶　高培根　编著

科学普及出版社

内 容 提 要

本书将高中数学分为代数（包括三角）、立体几何和解析几何三个部分，以师生对话的方式提出了95个问题并进行了讨论。这些问题集中地反映了高中数学课程中的重点、难点及学生在学习中经常遇到的问题。

本书可作为高中师生及从事成人教育工作的人员参考。

（京）新登字026号

高中毕业班师生对话丛书

数 学

乔荣凝 丁志福 陈 汶 高培根 编著

责任编辑：杨 艳

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京市燕山联营印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：11 插页：1 字数：244千字

1991年8月第1版 1991年8月第1次印刷

印数：1—1 720册 定价：6.40元

ISBN 7-110-01922-5/G·461

前　　言

《高中毕业班师生对话丛书》包括语文、数学、物理、化学、生物、历史、地理等七科，是由北京师大附中组织编写的。

这套丛书基本上是按照各学科的知识结构，把各科基础知识与基本技能中的重点、特点、难点，以师生对话的形式，由浅入深、由表及里地抓住问题的关键，逐步进行解决。力求让学生掌握问题的本质和规律，以提高分析问题和解决问题的能力。因此，它不仅对高中毕业班学生进行复习有指导作用，同时对各年级在校的高中学生在掌握知识体系、学习方法和技巧等方面都会有所启迪。此外，本书还可为其他人员参加成人高考提供参考与借鉴。

在参加这套丛书编写工作的教师中，既有教学多年、经验丰富的中老年教师，也有思想敏捷、勇于创新的青年教师。他们把自己的教学心得、体会，通过集体讨论，进行了分工编写。在丛书编写过程中，由李广钧、秘际韩、韩忠等老师负责组织和统稿工作，科普出版社的高宝成、杨艳等同志在组稿和审定等工作中，也给予了许多帮助并做了大量的具体工作，为本丛书的早日出版作出了贡献。

限于丛书编者水平有限，对错误和不当之处敬请批评指正。

北京师大附中《对话丛书》编委会

1990年9月

目　　录

第一部分　代　数

第二部分　立体几何

第三部分　平面解析几何

第一部分　代　数

一、幂函数、指数函数和对数函数

1．怎样理解集合与映射的概念？

生　“集合”这部分内容太枯燥，为什么在高中必须要学习一些关于“集合”的基本概念呢？

师　“集合”这一部分内容确实很枯燥，但是集合概念及其基本理论，是近代数学的最基本内容之一。关于集合的思想，已经广泛地渗透到自然科学的许多领域，尤其是有关集合的术语，在科技文章和科普读物中随处可见。因此，学习一点关于集合的基本思想，无论是为学习更高深的科技理论还是在实际工作中参阅一般科技读物都是十分必要的。

生　学习集合的基本概念，应该注意些什么问题呢？

师　学习集合基本概念要注意两点：首先，对每一个具体概念都要十分清楚，即要搞清有关集合的各个基本概念的涵义、相互之间的联系和区别，要做到对每个概念都能叙述自如，并能自己举出恰当的例子，还要准确地使用有关集合的各种符号。比如：符号“$\in$”或“$\overline{\in}$”只能用于集合和元素之间，“$\subset$”“$\subseteq$”“$=$”则只适用于集合与集合之间。当然，在弄清了集合的基本概念之后，正确使用各种有关集合的符号，就显得更重要了。

生　请您举几个这方面例子好吗？

师　当然可以。

例1：已知$I=R$，$A=\{x\mid x^2-16<0\}$，$B=\{x\mid x^2-4x+3\geqslant 0\}$。

求：$\bar{A}$，$\bar{B}\cap A$，$\overline{A\cap B}$。

解：由 $A=\{x\mid x^2-16<0\}$

$=\{x\mid -4<x<4\}$

$B=\{x\mid x^2-4x+3\geqslant 0\}$

$=\{x\mid x\geqslant 3$或$x\leqslant 1\}$

$I=R$

∴　$\bar{A}=\{x\mid x\geqslant 4$或$x\leqslant -4\}$

$\bar{B}\cap A=\{x\mid 1<x<3\}$

$\overline{A\cap B}=\{x\mid x\leqslant -4$或$1<x<3$或$x\geqslant 4\}$

例 2：已知$I=\{2x\mid 1\leqslant x\leqslant 7, x\in Z\}$，$A\cap B=\{2,8,14\}$，$\bar{A}\cap B=\{10, 12\}$，$\overline{A\cup B}=\{6\}$。

求：A和$\bar{B}$。

解：由$I=\{2x\mid 1\leqslant x\leqslant 7, x\in Z\}$

$=\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$

而　$A\cap B=\{2, 8, 14\}$，$\bar{A}\cap B=\{10, 12\}$，$\overline{A\cup B}=\{6\}$

有　$A=\{2, 4, 8, 14\}$，$\bar{B}=\{4, 6\}$

生　老师，这两个例题对我们很有启发，看来做集合方面的习题首先应该对每个集合的具体情况即有什么具体元素有所了解，然后再根据题目条件和要求去求其它要求的部分。

师　你说得很对，只有对每个已知集合的元素有了确切认识之后，才能准确求出有关的交集、并集等等。

生　映射的概念很抽象，您能举几个例子说明什么是映射吗？

师的对于映射概念，具体地说，集合A到集合B的映射，其实就是A集合中每个元素按某种对应法则到B集合中元素的单向单值对应。所谓单向，就是指A集合中每个元素按某种对应法则向B集合中元素对应；所谓单值，就是指A集合中每个元素按某种对应法则在B集合中有且只有一个像。我们看下面这个例题。

判断下列对应法则是否为由集合A到集合B的映射？

（1）$A=\{1, 2, 3, 4\}$；$B=\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$，对应法则为：$f$：$a \to b=3a-1$，其中$a \in A$，$b \in B$。

这个对应法则f：$a \to b=3a-1$是集合A到集合B的映射，因为在对应法则f的作用下，A集合中每一个元素在B集合中都有且仅有一个像。

（2）$A=\{x| x \in R\}$，$B=\{y|y \in R\}$，对应法则f：$x \to y=\operatorname{tg} x$，其中$x \in A$，$y \in B$。

这个对应法则f：$x \to y=\operatorname{tg} x$就不是映射，因为在对应法则$f$的作用下，$A$集合中的元素$\frac{\pi}{2}$在$B$集合中没有像。

生　一一映射和一一对应是一回事吗？

师　不是一回事。一一映射首先是映射，它仍然要求单向单值，而一一对应则不要求是单向的对应。

2．怎样建立函数的对应法则？如何求函数的定义域和值域？

生　什么是函数的三要素？

师　所谓函数三要素就是指：函数的对应法则、函数的定义域和函数的值域。其中核心是函数的对应法则，因为函数的定义域和值域都随着对应法则的改变而改变。当然，在

对应法则已确定的情况下，定义域就是最重要的了。

生 应该怎样准确理解对应法则呢？

师 一般来说，在函数记号：$y=f(x)$中，“f”即代表了对应法则。等式$y=f(x)$表明：对于$y=f(x)$的定义域内任意一个自变量的值x_1，都可以通过“f”得到x_1所对应的函数值y_1。也就是说：“f”是使x到y的对应得以实现的方法或途径，是y对x的依赖的纽带。

例如，$y=f(x)=2x+1$这个函数的对应法则“f”表示了如下的自变量到函数的对应关系：“自变量的2倍加1便是函数”。至于自变量在形式上用什么字母来表示，都是无关紧要的。实事上，“f”在形式上的实质是：

$$f(\square)=2(\square)+1$$

于是有：

$$f(u)=2u+1$$

$$f(2x+1)=2(2x+1)+1=4x+3$$

$$f(x^2)=2x^2+1$$

生 请老师帮我解一道数学题：

已知$f(x-1)=3x^2-8x+10$，求$f(x)$。

师 这一类问题常常称之为“函数方程”，也就是含有未知函数的等式。解这一类习题的关键在于对函数的本质特征有深刻的理解，同时要掌握一些灵活的变量代换的技巧。这类问题一般有如下几种处理办法：

（1）定义法 即使含有未知函数的等式两边的自变量从形式达到统一，就拿同学提出的习题为例。

已知$f(x-1)=3x^2-8x+10$，求$f(x)$。

解：由$3x^2-8x+10=3(x-1)^2-2(x-1)+5$

$\therefore\quad f(x-1)=3x^2-8x+10$

即 $f(x-1)=3(x-1)^2-2(x-1)+5$

$\therefore$ $f(x)=3x^2-2x+5$

(2) 变量代换法　依然用上面的例题。

令$u=x-1$，则$x=u+1$

则 $f(x-1)=3x^2-8x+10$可变形为

$$f(u)=3(u+1)^2-8(u+1)+10$$
$$=3u^2-2u+5$$

$\therefore$ $f(x)=3x^2-2x+5$

事实上，所谓代换法也是使含有未知函数的等式的自变量在形式上达到统一。

至于这两种办法哪个更实用，要看具体问题而定．灵活处理，请同学们解这个题目：

已知 $f\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$，求$f(x)$。

生　这个题目可以用您所讲的两种办法来解。

解法 1 （定义法）

由 $f\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$

$$=\frac{(x^2+2x+1)-2x}{x^2}+\frac{1+x-x}{x}$$

$$=\frac{(x+1)^2}{x^2}-\frac{1+x}{x}+1$$

$\therefore$ $f\left(\frac{1+x}{x}\right)=\left(\frac{1+x}{x}\right)^2-\left(\frac{1+x}{x}\right)+1$

即 $f(x)=x^2-x+1$

解法 2 （代换法）

令 $u=\frac{1+x}{x}$，则 $x=\frac{1}{u-1}$

$$\therefore \quad f\left(\frac{1+x}{x}\right)=\frac{x^2+1}{x^2}+\frac{1}{x}$$

$$\text{即} \quad f(u)=\frac{\left(\frac{1}{u-1}\right)^2+1}{\left(\frac{1}{u-1}\right)^2}+\frac{1}{\frac{1}{u-1}}$$

$$=1+(u-1)^2+(u-1)$$

$$=u^2-u+1$$

$$\therefore \quad f(x)=x^2-x+1$$

师 你这个题解得很不错，但要注意，并不是所有这类问题都可以用这两种办法来解。比如：

已知$f\left(\frac{2}{x}+1\right)=\lg x$，求$f(x)$。

这个题目只能用代换法解决。

令 $u=\frac{2}{x}+1$，则$x=\frac{2}{u-1}$

所以原等式可变形为

$$f(u)=\lg\frac{2}{u-1}$$

即 $f(u)=\lg 2-\lg(u-1)$

$\therefore$ $f(x)=\lg 2-\lg(x-1)$

生 我在解这类习题时，也遇到类似问题。例如：

已知$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$。

解这个题目显然只能用定义法：

$$\because \quad f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

$\therefore\quad f(x)=x^2-2$

师 解这类问题也不仅限于这两种方法，只要对"函数"有了准确深刻理解，具体问题一定要灵活处理。

例1：已知$2f(x)+f(1-x)=x^2$，求$f(x)$。

解：$\because\quad 2f(x)+f(1-x)=x^2$

$\therefore\quad 2f[(1-x)]+f[1-(1-x)]=(1-x)^2$

即 $2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2$

由 $\begin{cases}2f(x)+f(1-x)=x^2\\2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2\end{cases}$

解这个方程组，可得：

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{3}$$

例2：若x，$y\in R$，且$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(0)\neq0$，求$f(x)$。

解：由$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，$f(0)\neq0$

令 $y=0$，

有 $f(x\cdot0)=f(x)\cdot f(0)$

即 $f(0)=f(x)\cdot f(0)$

又 $f(0)\neq0$

$\because\quad f(x)=1$

生 通过您的讲解，对这一类问题清楚多了，您能再谈谈关于函数的定义域吗？

师 当然可以。当函数的对应法则确定之后，对应法则对自变量的要求，也就是自变量的取值范围叫做函数的定义域。

生 怎样才能准确地找到函数的定义域呢？

师 求函数的定义域，首先要弄清对应法则对自变量的

要求，也就是要列出一个关于自变量必须满足的关系式，一般这种关系式是一组不等式组，再根据这个不等式组准确求出自变量的取值范围，我们来看三个例子：

例1：求 $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-5}}+\lg(10-x)$的定义域。

解：由 $\begin{cases} x-5\neq 0 \\ x-1\geqslant 0 \\ 10-x>0 \end{cases}$

得 $\{x|\ 1\leqslant x<10\text{且}x\neq 5\}$

例2：求 $y=\sqrt{\log_{0.5}(\sqrt{x-3}-2)}$ 的定义域。

解：由 $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x-3}-2)\geqslant 0 \\ \sqrt{x-3}-2>0 \\ x-3\geqslant 0 \end{cases}$

即 $\begin{cases} 0<\sqrt{x-3}-2\leqslant 1 \\ x-3\geqslant 0 \end{cases}$

∴ $\{x\ |7<x\leqslant 12\}$

例3：求 $y=\sqrt{4-x}+(\sqrt{x})^{x}$的定义域。

解：由 $\begin{cases} 4-x\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \\ x\neq 0 \end{cases}$

∴ $\{x\ |0<x\leqslant 4\}$

生 怎样求函数的值域呢？

师 求函数的值域没有什么固定的方法，要根据具体题目灵活处理。

生 我在做求值域习题时就有这种感受。不同的函数的