



普通高等教育“十二五”住建部规划教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材



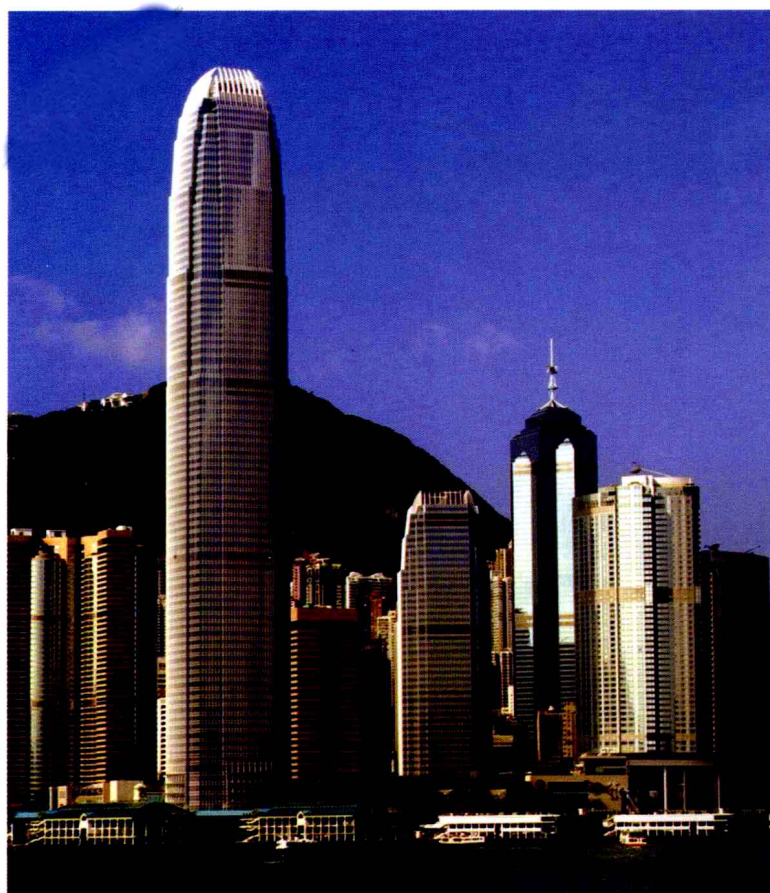
普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会 审订

结构力学 (下册)

(第4版)

J G L X

包世华 辛克贵 主编
龙驭球 主审



WUTP

武汉理工大学出版社



普通高等教育“十二五”住建部规划教材
普通高等教育“十一五”国家级规划教材



普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会 审订

结 构 力 学 (下 册)

(第 4 版)

包世华 辛克贵 主编
龙驭球 主审

武汉理工大学出版社

· 武 汉 ·

【主编简介】

包世华 清华大学土木工程系教授,中国力学学会《工程力学》杂志编委,中国建筑学会高层建筑结构委员会委员。1985~1986年为美国伊里诺伊大学土木工程系访问学者,1991~1993年为香港理工大学土木与结构系研究员。长期从事结构力学、弹性力学、能量原理及有限元、板壳结构、薄壁杆件结构和高层建筑结构等领域的教学和科研工作。

出版教材和专著30部。教材有《高层建筑结构设计》、《结构力学》、《结构力学教程》等,分别于1987年获建设部优秀教材二等奖,1988年、1992年获国家教委优秀教材奖,1998年获教育部科学技术进步奖一等奖,1999年获国家级科学技术进步奖二等奖,2002年获教育部全国优秀教材一等奖。专著有《薄壁杆件结构力学》、《高层建筑结构计算》、《新编高层建筑结构》、《高层建筑结构设计和计算》等。

在国内外发表学术论文130多篇。参加制订《薄壳结构设计规程》,其壳体研究成果被收入该规程。提出和创建了高层建筑结构解析和半解析常微分方程求解器解法系列。1983年获北京市科委技术成果奖,1986年、1992年、1994年分别获国家教委科学技术进步奖一、二、三等奖。

E-mail:baosh@tsinghua.edu.cn

辛克贵 清华大学土木工程系教授,博士生导师,北京市教学名师。中国力学学会《工程力学》杂志编委,中国钢结构协会桥梁工程委员会副理事长,茅以升科技教育基金会常务理事,中国设备监理协会常务理事,中国金属结构协会模板与脚手架委员会专家组成员,中国模板协会专家委员会委员。长期从事结构力学、弹塑性力学、有限元方法、薄壁杆件结构、工程结构和桥梁结构等领域的教学与科研工作。

出版教材和著作5部:《结构力学》(上、下册)、《结构矩阵分析和程序设计》、《结构分析实用程序》、《拱形钢结构设计规程》,主要讲授结构力学相关课程,曾获得北京市教育教学成果奖一等奖,国家级教育教学成果奖一等奖,是国家级精品课程和国家级教学团队的主要成员。

在国内外学术期刊和会议发表论文60余篇,曾获得北京市学术成果奖,国家教委科技进步奖一、三等奖,中国机械工业集团科技进步奖一等奖,教育部科技进步奖一等奖,国家科技进步奖二等奖等。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学.下册/包世华,辛克贵主编. —4版. —武汉:武汉理工大学出版社,2012.3

ISBN 978-7-5629-3707-4

I. ① 结… II. ① 包… ② 辛… III. ① 结构力学 IV. ① 0342

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第050544号

项目负责人:蔡德民 刘永坚 田道全 责任编辑:汪浪涛

责任校对:戴皓华 装帧设计:陶冶

出版发行:武汉理工大学出版社

社址:武汉市洪山区珞狮路122号(430070)

网 址: <http://www.techbook.com.cn>

经 销:各地新华书店

印 刷:武汉理工大印刷厂

开 本:880×1230 1/16

印 张:15.25

字 数:494千字

版 次:2012年4月第4版

印 次:2012年4月第1次印刷 总第21次印刷

印 数:121501—128500

定 价:28.00元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请向出版社发行部调换。

本社购书热线电话:027 87394412 87383695 87384729 87397097(传真)

• 版权所有 盗版必究 •

普通高等学校土木工程专业新编系列教材编审委员会

(第4届)

学术顾问:

吕西林 李 杰 罗福午 李少甫 甘绍熿 包世华 毛鹤琴
辛克贵 刘立新 李必瑜 彭少民 何铭新 吴培明 胡敏良

主任委员:

李国强 朱宏亮 田高

副主任委员:

刘伟庆 邹超英 白国良 徐礼华 雷宏刚 贾连光 朱彦鹏
张永兴 张俊平 刘殿忠 缪 昇 王 岚 周学军 赵明华

委员:(以姓氏笔画为序)

王 林 王 燕 王月明 王天稳 王社良 王泽云 袁海庆
邓铁军 王新武 王毅红 吴炎海 卢文胜 白晓红 蒋沧如
叶献国 孙 俊 孙 强 刘长滨 李书进 李启令 曾志兴
李怀建 刘剑飞 孙家齐 过静珺 李碧雄 张立人 窦立军
陈水生 邵旭东 陈伯望 宋固全 张国强 张科强 戴国欣
吴雪茹 吴辉琴 何培玲 周 云 俞 晓 饶云刚 魏瑞演
姜玉松 段兵廷 柳炳康 赵瑞斌 徐 伟 秦建平 袁广林

总责任编辑:刘永坚 田道全

秘 书 长:蔡德民

前 言

(第 4 版)

本书第 4 版作为高等教育土建学科专业“十二五”住建部规划教材及申报普通高等教育“十二五”国家级规划教材,重新进行了修订。

修订依据是教育部颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中所规定的土木工程专业的业务培养目标、教育部高等学校非力学专业力学基础课程教学指导分委员会制定的《结构力学课程教学基本要求(A类)》和住建部高等学校土木工程专业指导委员会制定的《结构力学课程教学大纲》。适用对象为普通高等学校土木工程专业(即“大土木”)各类专门化方向的本科学生,也可供参加高等教育自学考试的学生、考研的学生和参加注册结构工程师考试的人员以及有关工程技术人员阅读参考。

本版除仍保留第 3 版前言中所列的 1、2 两项要求(见本书第 3 版前言)外,主要改动的地方有:

1. 新增写了静定结构内力和位移的定性分析、结构的变形简图、超静定结构内力和位移的定性分析和多层多跨刚架的近似法(侧移计算)等内容作为结构力学定性(或概念)分析的入门。由于这些内容是首次收入结构力学教材,有必要多加阐述。

对结构力学定性(或概念)分析的重要性,工程界和广大教师已经有充分的认识。结构设计大师林同炎早就在《结构概念与体系》的专著中论述了概念设计的重要性。因此,结构力学应该涵盖经典结构力学、程序(或计算)结构力学和定性结构力学三个方面已为大家所认知。经典结构力学已经成熟,程序(或计算)结构力学正在日趋完善,定性(或概念)结构力学刚刚起步。

从结构力学对能力的培养来说也有三个方面:经典方法的分析能力、计算机分析能力和定性分析能力。在结构的概念设计、结构的合理形式、结构计算模型的建立、结构受力和变形性能的估计和判断以及计算结果正误的分析等方面,都需要结构力学定性分析能力的培养。从这个角度看,定性分析能力的培养可能是上述三个能力培养中要求最高,也是最难的一个方面。应该指出,定性分析能力的培养并不只是结构力学一门课程的任务,也不能要求结构力学一门课程来完成。但是,结构力学课程应该承担此任务,高层次的能力培养需要从简单的训练开始,需要一个人门向导。编者认为,在讲授经典结构力学分析方法的同时或稍后,就应该教学生做简单结构内力和变形的大致形状的估计、判断等的训练,以之作为结构力学定性分析的入门。20 世纪 80 年代,编者在清华大学上结构力学习题课时就进行过这方面的尝试,收到了一定的效果。

总之,定性分析是一个新的内容,在教材中怎样写好这个入门的知识,尚无一定之规。这次收入本书的只是在传统的经典分析方法的基础上,增加了一些仅靠脑手,对结构内力和变形进行定性分析的入门方法,希望能起到抛砖引玉的作用。这里要指出,计算机在定性分析中也是大有可为的,在计算机和各种应用软件高速发展的今天,期待着有更好的结构力学定性分析教材面世。

今后,结构力学定性分析的教材编写和教学走向可能是两条路:一是以经典结构力学为主的教材中加入计算机计算和定性分析的内容,前者是基础,为主体;后两者是互为依赖的左右手,本书走的是这一条路。二是单独设课,独立成书。本书中把定性分析的内容集中放在第 14 章中,教学中可以分散在合适的相关章节。因为《结构力学课程教学基本要求》中没有提出定性分析的要求,本书收入也是为了提倡,各学校及读者可自行选用,书中此内容打上了“*”号。

2. 在内容上做了一些删减、改写和顺序的改变。主要有:第 8 章中汽车车队移动荷载和铁路活载均按新规范标准进行了修改;原在下册的第 11 章位移法收入上册;第 12 章超静定结构的近似法收

入第 14 章,内容有扩展;第 15 章中删去了有限元法求刚架的自振频率;第 16 章中改写了圆环和圆拱稳定方程的推导,删去了圆拱的计算长度和刚架的稳定;第 17 章中删去了矩阵位移法求刚架的极限荷载等。删减内容均是一般学校不选用的专题提高内容,需要用到相关内容的读者可参见本书第 3 版。

本版修订工作由包世华制定修改方案和大纲。修订工作由包世华、辛克贵完成。全书由包世华修改定稿。

本书由中国工程院院士、清华大学龙驭球教授和清华大学张铜生教授审阅,龙驭球为主审。郑州大学樊友景、南昌大学张爱萍和昆明理工大学孙俊对本书进行了审读。他们对编写大纲及书稿提出了许多宝贵意见,在此对他们表示感谢!

本书难免存在不足之处,欢迎读者批评指正。

包世华

2011 年 10 月于清华园

目 录

12 渐近法和超静定结构的影响线	(1)
12.1 渐近法概述	(1)
12.2 力矩分配法的概念	(1)
12.2.1 正负号规定	(1)
12.2.2 结点力偶的分配和传递	(1)
12.3 单结点的力矩分配——基本运算	(5)
12.4 多结点的力矩分配——渐近运算	(8)
12.5 无剪力分配法	(17)
12.5.1 无剪力分配法的应用条件	(17)
12.5.2 剪力静定杆件的固端弯矩	(17)
12.5.3 零剪力杆件的转动刚度和传递系数	(18)
12.6 剪力分配法	(22)
12.6.1 柱顶有水平荷载作用的铰结排架	(22)
12.6.2 横梁刚度无限大时刚架的剪力分配	(22)
12.6.3 柱间有水平荷载作用时的计算	(23)
12.7 超静定力的影响线	(26)
12.7.1 用静力法绘制超静定梁影响线的原理	(26)
12.7.2 用机动法绘制连续梁的影响线	(27)
12.8 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图	(30)
12.8.1 连续梁的最不利荷载分布	(30)
12.8.2 内力包络图	(30)
本章小结	(32)
思考题	(33)
习题	(33)
13 矩阵位移法	(37)
13.1 概述	(37)
13.1.1 矩阵位移法的基本思路	(37)
13.1.2 结构的离散化与杆端位移、杆端力的正负号规定	(37)
13.2 单元分析(一)——局部坐标系中的单元刚度矩阵	(38)
13.2.1 一般杆单元的刚度矩阵	(38)
13.2.2 单元刚度矩阵的性质	(40)
13.2.3 特殊单元	(40)
13.3 单元分析(二)——整体坐标系中的单元刚度矩阵	(42)
13.3.1 单元坐标转换矩阵	(42)
13.3.2 整体坐标系中的单元刚度矩阵	(43)
13.4 连续梁的整体刚度矩阵	(44)
13.4.1 单元集成法的基本概念	(46)
13.4.2 单元定位向量	(48)

13.4.3 单元集成法的实施	(48)
13.4.4 整体刚度矩阵的性质	(50)
13.5 刚架的整体刚度矩阵	(50)
13.5.1 单元定位向量与单元集成	(51)
13.5.2 铰结点的处理	(53)
13.6 等效结点荷载	(54)
13.7 计算步骤和算例	(57)
13.8 忽略轴向变形的矩形刚架的整体分析	(62)
* 13.9 桁架及组合结构的整体分析	(65)
13.9.1 桁架	(65)
13.9.2 组合结构	(69)
* 13.10 平面刚架程序的框图设计和源程序	(72)
13.10.1 平面刚架程序的框图设计	(72)
13.10.2 平面刚架源程序和算例	(81)
本章小结	(91)
思考题	(91)
习题	(92)
14 超静定结构总论和结构定性分析	(94)
14.1 超静定结构基本解法的分类和比较	(94)
* 14.2 力矩分配法与位移法联合解有侧移刚架	(95)
14.3 超静定结构的特性	(97)
14.3.1 多余约束的存在及其影响	(97)
14.3.2 各杆刚度改变对内力分布的影响	(98)
14.3.3 温度和沉降等变形因素的影响	(99)
* 14.4 关于计算简图的补充讨论	(100)
14.4.1 结构体系的简化	(100)
14.4.2 杆件的简化	(102)
14.4.3 结点的简化	(102)
14.4.4 支座的简化	(103)
* 14.5 静定结构内力和位移的定性分析	(104)
14.5.1 静定结构内力和位移定性分析的要求和判断依据	(104)
14.5.2 弯矩图和变形简图绘制的一些常用方法	(104)
* 14.6 结构的变形简图	(109)
14.6.1 变形简图的基本做法和基本杆	(109)
14.6.2 以结点角位移为主的结构的分析	(110)
14.6.3 以结点线位移为主的结构的分析	(112)
14.6.4 以结点角位移为主、但有结点线位移影响的结构的分析	(114)
* 14.7 超静定结构内力和位移的定性分析	(114)
14.7.1 其他思路的例子	(114)
14.7.2 拱的受力和变形特点	(116)
14.7.3 桁架的定性分析	(117)
14.8 多层多跨刚架的近似法	(119)
14.8.1 多层多跨刚架竖向荷载下的分层计算法	(119)
14.8.2 多层多跨刚架水平荷载下的反弯点法	(120)

本章小结	(124)
思考题	(124)
习题	(125)
15 结构的动力计算	(129)
15.1 动力计算概述	(129)
15.1.1 动力计算的特点	(129)
15.1.2 动力荷载的分类	(129)
15.1.3 动力计算的自由度	(130)
15.2 单自由度体系的自由振动	(131)
15.2.1 单自由度体系自由振动微分方程的建立	(131)
15.2.2 自由振动微分方程的解答	(132)
15.2.3 结构的自振周期和自振频率	(134)
15.2.4 阻尼对自由振动的影响	(137)
15.3 单自由度体系的受迫振动	(139)
15.3.1 单自由度体系受迫振动微分方程的建立	(139)
15.3.2 简谐荷载作用下结构的动力反应	(140)
15.3.3 一般荷载作用下结构的动力反应	(142)
15.3.4 阻尼对受简谐荷载受迫振动的影响	(144)
15.3.5 有阻尼时的杜哈梅积分	(146)
15.4 两个自由度体系的自由振动	(147)
15.4.1 两个自由度体系自由振动微分方程的建立	(147)
15.4.2 频率方程和自振频率	(149)
15.4.3 主振型及主振型正交性	(152)
15.4.4 两个自由度体系自由振动方程的一般解	(154)
15.5 两个自由度体系在简谐荷载下的受迫振动	(155)
15.5.1 柔度法	(155)
15.5.2 刚度法	(158)
* 15.6 一般多自由度体系的自由振动	(160)
15.6.1 柔度法	(160)
15.6.2 刚度法	(163)
15.6.3 主振型的正交性	(166)
* 15.7 多自由度体系在任意动荷载作用下的受迫振动——振型分解法	(168)
15.7.1 正则坐标与主振型矩阵	(168)
15.7.2 振型分解法	(169)
* 15.8 无限自由度体系的自由振动	(172)
* 15.9 计算频率的近似法	(174)
15.9.1 能量法求第一频率——瑞利(Rayleigh)法	(174)
15.9.2 集中质量法	(177)
本章小结	(178)
思考题	(179)
习题	(180)
*16 结构的稳定计算	(184)
* 16.1 两类稳定问题概述	(184)

16.1.1	分支点失稳	(184)
16.1.2	极值点失稳	(186)
* 16.2	稳定问题的分析方法——静力法和能量法	(186)
16.2.1	静力法	(187)
16.2.2	能量法	(188)
* 16.3	弹性压杆的稳定——静力法	(191)
16.3.1	等截面压杆	(191)
16.3.2	变截面压杆	(194)
* 16.4	弹性压杆的稳定——能量法	(196)
16.4.1	按单参数体系计算	(196)
16.4.2	按多参数体系计算	(198)
** 16.5	剪力对临界荷载的影响	(201)
** 16.6	组合压杆的稳定	(203)
16.6.1	缀条式组合压杆	(203)
16.6.2	缀板式组合压杆	(204)
** 16.7	圆环和圆拱的稳定	(205)
16.7.1	圆环和圆拱受均匀静水压力时的稳定	(206)
16.7.2	拱的临界荷载系数	(208)
** 16.8	窄条梁的稳定	(209)
	本章小结	(211)
	思考题	(212)
	习题	(212)
* 17	结构的极限荷载	(215)
* 17.1	极限荷载概述	(215)
* 17.2	极限弯矩、塑性铰和极限状态	(216)
17.2.1	理想弹塑性材料的矩形截面梁	(216)
17.2.2	有一个对称轴的任意截面梁	(217)
17.2.3	静定梁的极限荷载	(217)
* 17.3	超静定梁的极限荷载	(218)
17.3.1	超静定梁的破坏过程和极限荷载的特点	(218)
17.3.2	连续梁的极限荷载	(220)
* 17.4	比例加载时判定极限荷载的一般定理和基本方法	(221)
17.4.1	比例加载时极限荷载的几个定理	(221)
17.4.2	计算极限荷载的机构法和试算法	(222)
* 17.5	刚架的极限荷载	(224)
17.5.1	机构法	(225)
17.5.2	试算法	(225)
17.5.3	增量变刚度法的概念	(227)
	本章小结	(228)
	思考题	(229)
	习题	(229)
	附录 习题答案	(231)
	参考文献	(234)

12 渐近法和超静定结构的影响线

本章提要

本章介绍基于位移法原理的两种渐近解法:力矩分配法和无剪力分配法。

在力矩分配法和无剪力分配法中,总是重复着一个基本运算过程——单结点的锁住与放松。其中包括三个环节:(1) 根据荷载求各杆的固端弯矩和结点的约束力矩;(2) 根据分配系数求分配力矩;(3) 根据传递系数求传递力矩。

力矩分配法是本章的重点。

此外,介绍了剪力分配法;以连续梁为例,介绍超静定结构影响线和内力包络图的作法。

12.1 渐近法概述

前面介绍的计算超静定结构的两种基本方法——力法和位移法,都要求建立和求解联立方程。当未知量较多时,计算工作量较大,且在求得基本未知量后,还要利用杆端弯矩叠加公式求得杆端弯矩。本章所讨论的力矩分配法属于位移法类型的渐近解法。力矩分配法是直接从实际结构的受力和变形状态出发,根据位移法基本原理,从开始建立的近似状态,逐步通过增量调整来修正,最后收敛于真实状态。还有一种力矩迭代法,它与力矩分配法原理是一样的,是将位移法的平衡方程用杆端弯矩的形式表示,从杆端弯矩的近似数值开始,以全量的形式经过逐次代入、修正,最后收敛于杆端弯矩的真实解。

渐近法因为不必解算联立方程,计算步骤比较简单和规格化,且直接求得的是杆端弯矩,精度可以满足工程要求,因而在工程中应用很广泛。

力矩分配法适用于计算连续梁和无结点线位移刚架;力矩迭代法则适用于计算有结点线位移刚架。本书只讨论力矩分配法和与之属于同类的无剪力分配法,力矩迭代法的内容可参见参考文献^{[2],[3]}。

12.2 力矩分配法的概念

12.2.1 正负号规定

力矩分配法中对杆端转角、杆端弯矩、固端弯矩的正负号规定与位移法相同,即假设对杆端顺时针旋转为正。作用于结点的外力偶荷载和作用于转动约束的约束力矩,也假设对结点或约束顺时针旋转为正。

12.2.2 结点力偶的分配和传递

图 12.1(a)所示为一无结点线位移的单结点刚架。在刚结点 A 作用有力偶荷载 M 。用位移法计算时,基本未知量为刚结点 A 的角位移 Δ_1 ,位移法方程为

$$k_{11}\Delta_1 + F_{1P} = 0 \quad (a)$$

由 $\bar{M}_1$ 图[图 12.1(b)]有

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{AB} &= 4i_{AB} \\ \bar{M}_{AC} &= 3i_{AC} \\ \bar{M}_{AD} &= i_{AD} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

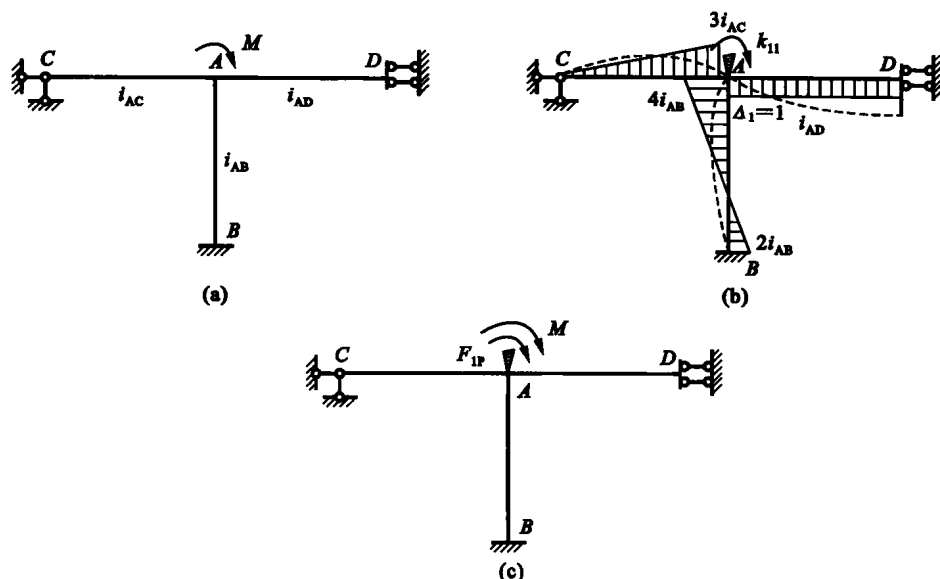


图 12.1 结点力偶的分配

(a) 结点力偶作用于单结点的刚架; (b) 位移法的 $\bar{M}_1$ 图; (c) 位移法的 M_P 图

$$k_{11} = 4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD} \quad (c)$$

由 M_P 图[图 12.1(c)]有

$$F_{1P} + M = 0 \quad F_{1P} = -M \quad (d)$$

将式(c)及式(d)代入式(a), 解出

$$\Delta_1 = \frac{-F_{1P}}{k_{11}} = \frac{M}{4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD}} \quad (e)$$

将 Δ_1 的解代入叠加公式 $M = \bar{M}_1 \Delta_1 + M_P$, 可得各杆杆端弯矩:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= \bar{M}_{AB} \Delta_1 = 4i_{AB} \Delta_1 = \frac{4i_{AB}}{4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD}} M \\ M_{AC} &= \bar{M}_{AC} \Delta_1 = 3i_{AC} \Delta_1 = \frac{3i_{AC}}{4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD}} M \\ M_{AD} &= \bar{M}_{AD} \Delta_1 = i_{AD} \Delta_1 = \frac{i_{AD}}{4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD}} M \end{aligned} \right\} \quad (f)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{BA} &= \bar{M}_{BA} \Delta_1 = 2i_{AB} \Delta_1 = \frac{2i_{AB}}{4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD}} M \\ M_{DA} &= \bar{M}_{DA} \Delta_1 = -i_{DA} \Delta_1 = \frac{-i_{DA}}{4i_{AB} + 3i_{AC} + i_{AD}} M \end{aligned} \right\} \quad (g)$$

M 图等于 $\bar{M}_1$ 图[图 12.1(b)]乘以 Δ_1 。

以上是用位移法基本体系计算结点力偶荷载作用于单结点刚架的过程。

下面将对这个问题给以新的解释, 为此, 先提出几个名词和概念。

(1) 转动刚度 S_{AB}

式(b)中, 在 $\Delta_1 = 1$ 作用下, 任一杆 AB 的杆端弯矩表达式可写成

$$\bar{M}_{AB} = S_{AB}$$

S_{AB} 称为 AB 杆 A 端的转动刚度, 它在数值上等于使 AB 杆 A 端(也称近端)产生单位转角时所需施加的力矩, 也表示杆端对转动的抵抗能力。

杆端转动刚度的数值也就是第 11 章位移法中等截面杆在杆端转动单位转角时的弯矩形常数。

表 11.1 等截面杆的形常数编号 1、3、5 给出了三种等截面杆 AB 在 A 端的转动刚度 S_{AB} 的数值, 见图 12.2。

关于 S_{AB} , 应当说明以下两点:

① 在 S_{AB} 中, A 端是施力端, 也称近端, B 端称为远端。

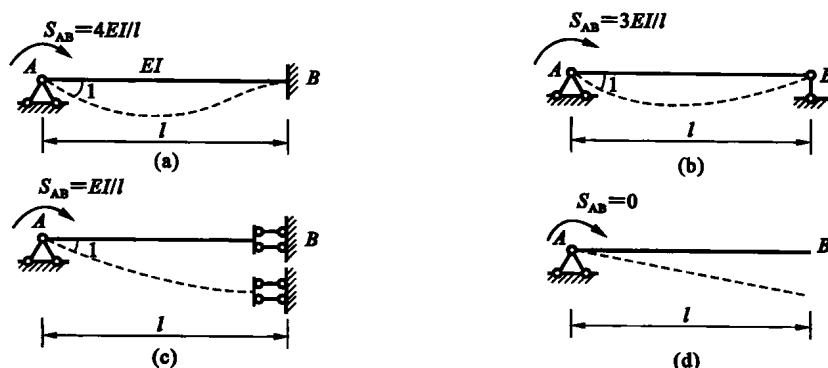


图 12.2 转动刚度

(a) 远端固定; (b) 远端铰支; (c) 远端滑动; (d) 远端自由

② S_{AB} 的数值与杆件的线刚度 $(i = \frac{EI}{l})$ 和远端支承情况有关, 远端支承情况不同, S_{AB} 的数值也不同。

图 12.2 中, AB 杆 A 端转动刚度 S_{AB} 的值如下 (令 $\frac{EI}{l} = i$):

$$\text{远端固定:} \quad S_{AB} = 4i \quad (12.1)$$

$$\text{远端铰支:} \quad S_{AB} = 3i \quad (12.2)$$

$$\text{远端滑动:} \quad S_{AB} = i \quad (12.3)$$

$$\text{远端自由:} \quad S_{AB} = 0 \quad (12.4)$$

(2) 分配系数

由式(f)可以看出, 刚结点 A 在力偶荷载 M 作用下, 结点 A 上各杆在 A 端的弯矩与各杆 A 端的转动刚度成正比。

对结点 A 上某杆 A_j 来说, 可以用以下公式表示计算结果:

$$M_{A_j} = \mu_{A_j} M \quad (12.5)$$

$$\mu_{A_j} = \frac{S_{A_j}}{\sum_A S} \quad (12.6)$$

这里, μ_{A_j} 为杆 A_j 在 A 端的分配系数, 是将结点 A 作用的外力偶荷载 M 分配到结点 A 上各杆 A 端弯矩的比例, 其中 j 可以是 B, C, D 等。分配系数 μ_{A_j} 数值上为杆 A_j 的转动刚度与交于 A 结点各杆在 A 端的转动刚度之和的比值。

因此, 结点 A 的力偶荷载 M 是按各杆的分配系数分配到各杆的 A 端。

同一结点上, 各杆分配系数之间存在如下关系:

$$\sum_A \mu = \mu_{AB} + \mu_{AC} + \mu_{AD} = \frac{S_{AB} + S_{AC} + S_{AD}}{\sum_A S} = 1 \quad (12.7)$$

(3) 传递系数

传递系数 C 表示当杆件近端有转角时, 杆件远端弯矩与近端弯矩的比值。

图 12.1(a) 中, 力偶荷载加于结点 A , 结点 A 转动, 使各杆在 A 端 (近端) 产生弯矩, 同时也使各杆远端产生弯矩, 远端弯矩见式(g)。

由式(f)和式(g), 可得:

$$\frac{M_{BA}}{M_{AB}} = C_{AB} = \frac{1}{2} \quad \frac{M_{CA}}{M_{AC}} = 0 \quad C_{AC} = 0 \quad \frac{M_{DA}}{M_{AD}} = C_{AD} = -1$$

上式中, C_{A_j} ($j = B, C, D$) 称为传递系数, 即远端弯矩与近端弯矩的比值:

$$C_{A_j} = \frac{M_{jA}}{M_{A_j}} \quad (12.8)$$

由式(12.8)可以看出, 在等截面杆件中, 传递系数 C 随远端的支承情况而不同, 数值如下:

$$\text{远端固定:} \quad C = \frac{1}{2} \quad (12.9)$$

远端铰支: $C = 0$ (12.10)

远端滑动: $C = -1$ (12.11)

我们可用下式表示传递系数的应用:

$$M_{jA} = C_{Aj} M_{Aj} \quad (12.12)$$

式中 C_{Aj} ——杆 Aj 由 A 端到 j 端的传递系数。

现在把图 12.1(a) 所示问题的过程重新解释如下:

当结点 A 作用有力偶荷载 M 时, 结点 A 上各杆近端得到按各杆的分配系数乘以 M 的近端弯矩, 也称分配弯矩; 各杆的远端则有传递系数乘以近端弯矩的远端弯矩, 也称传递弯矩。

以上是用力矩的分配和传递的概念解决结点力偶荷载作用下的计算问题, 故称力矩分配法。现再用例题加以说明。

【例 12.1】 图 12.3(a) 所示无结点线位移刚架, 在结点 A 有力偶荷载 $M = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$ 作用, 试用力矩分配法计算各杆杆端弯矩。

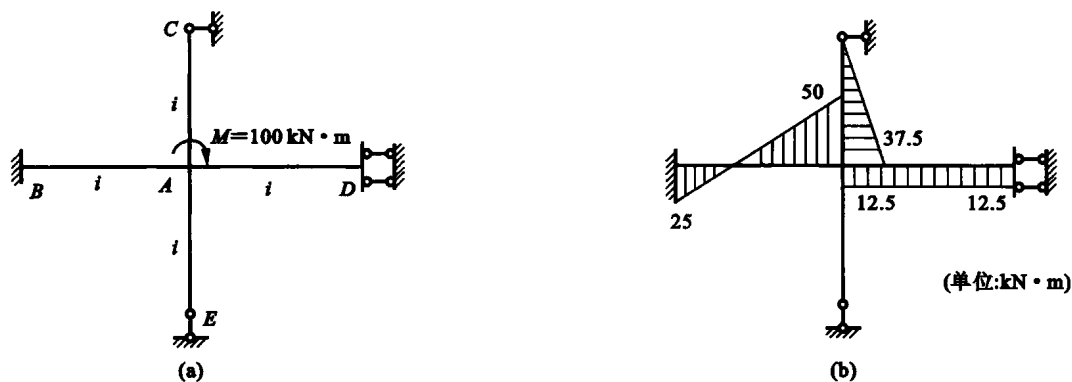


图 12.3 力偶的分配与传递
(a) 原结构及荷载; (b) 弯矩图

【解】

(1) 计算各杆转动刚度及分配系数

由式(12.1)~式(12.4), 可得各杆转动刚度:

$$S_{AB} = 4i_{AB} = 4i$$

$$S_{AC} = 3i_{AC} = 3i$$

$$S_{AD} = i_{AD} = i$$

$$S_{AE} = 0$$

由式(12.6), 可得各杆的分配系数:

$$\mu_{AB} = \frac{S_{AB}}{\sum_A S} = \frac{4i}{4i + 3i + i} = 0.5$$

$$\mu_{AC} = \frac{S_{AC}}{\sum_A S} = \frac{3i}{8i} = 0.375$$

$$\mu_{AD} = \frac{S_{AD}}{\sum_A S} = \frac{i}{8i} = 0.125$$

$$\mu_{AE} = \frac{S_{AE}}{\sum_A S} = \frac{0}{8i} = 0$$

(2) 计算各杆杆端弯矩

由式(12.5)可得各杆分配弯矩:

$$M_{AB} = \mu_{AB} M = 0.5 \times 100 = 50 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AC} = \mu_{AC} M = 0.375 \times 100 = 37.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AD} = \mu_{AD}M = 0.125 \times 100 = 12.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{AE} = \mu_{AE}M = 0 \times 100 = 0$$

由式(12.9)~式(12.11)可得各杆传递弯矩:

$$M_{BA} = C_{AB}M_{AB} = \frac{1}{2} \times 50 = 25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{CA} = C_{AC}M_{AC} = 0 \times 37.5 = 0$$

$$M_{DA} = C_{AD}M_{AD} = -1 \times 12.5 = -12.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在结点力偶荷载作用下,所求得的各杆的分配弯矩及传递弯矩即杆端弯矩。

根据杆端弯矩值,画出弯矩图,如图 12.3(b)所示。

12.3 单结点的力矩分配——基本运算

单结点力矩分配的物理概念可用实物模型来说明。

图 12.4(a)所示为一连续梁的模型。连续梁为一薄钢片,用砝码加荷载 P 后,连续梁的变形如图 12.4(a)虚线所示。我们要求计算的是 P 作用后出现这个变形时的杆端弯矩。

在一般荷载作用下,用力矩分配法直接计算各杆的杆端弯矩的步骤如下:

(1) 设想我们先在结点 B 加一个控制转动的约束(用螺丝夹紧)阻止结点 B 的转动(即 $\theta_B = 0$),这时结点 B 相当于固端;然后再加砝码。这时,只有 AB 一跨发生变形,如图 12.4(b)中虚线所示。这表明结点约束把连续梁 ABC 分成两根在结点 B 为固端且具有独立变形的单跨梁 AB 和 BC 。 AB 段受荷载 P 作用后产生变形,相应地产生固端弯矩; BC 段无荷载作用,没有变形。杆 AB 在 B 端的固端弯矩 M_{BA}^F 与在结点 B 约束中的约束力矩 M_B (称为约束力矩)平衡,因此,结点 B 的约束力矩可以通过结点 B 的力矩平衡方程求得。

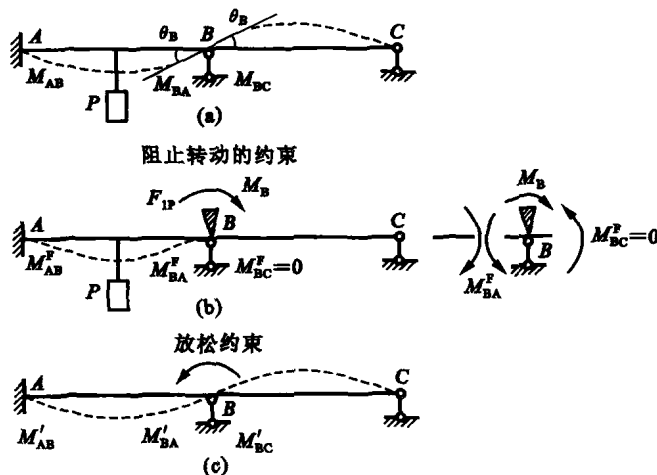


图 12.4 单结点力矩分配的概念

(a) 原结构; (b) 结点 B 加约束; (c) 放松结点 B 的约束

由图 12.4(b)可以看出,杆 BC 的固端弯矩 $M_{BC}^F = 0$,杆 BA 的固端弯矩为 M_{BA}^F 。由 $\sum M_B = 0$,可知结点 B 的约束力矩 $F_{1P} = M_{BA}^F + M_{BC}^F = M_{BA}^F$ 。在力矩分配法中,约束力矩通常用 M_B 表示,即 $F_{1P} = M_B$ 。约束力矩在数值上为结点上各杆固端弯矩之和,符号规定以顺时针转向为正。

(2) 连续梁的真实状态是在结点 B 没有约束,也不存在约束力矩[图 12.4(a)]。因此,必须对图 12.4(b)所示解答加以修正。为符合实际,我们放松结点 B 处的约束,梁在结点 B 可以转动,转角为 θ_B ,结点 B 处的约束力矩即由 $M_B(F_{1P})$ 回复到零,这就相当于在结点 B 加了一个力偶荷载($-M_B$)。力偶荷载 $-M_B$ 使梁产生的变形如图 12.4(c)中虚线所示。在结点 B 的力偶荷载 $-M_B$ 作用下,结点 B 各杆在近端(B 端)有分配弯矩 M_{BA}' 和 M_{BC}' ;同时在远端(A 端)有传递弯矩 M_{AB}' 。

(3) 将图 12.4(b)与(c)两种情形叠加,就得到图 12.4(a)所示的实际变形和受力状态。因此,把图 12.4(b)与(c)的杆端弯矩叠加,就得到实际的杆端弯矩[图 12.4(a)],例如 $M_{BA}^F + M_{BA}' = M_{BA}$ 。

现在把一般荷载作用时力矩分配法的物理概念和计算步骤简述如下：

第一步，先在刚结点 B 加上阻止转动的约束，把连续梁分解为具有固定端的单跨梁，求出杆端的固端弯矩。结点 B 各杆固端弯矩之和为约束力矩 M_B 。

第二步，去掉约束，相当于在结点 B 施加一力偶荷载 $-M_B$ ，这时可求出各杆在 B 端的分配弯矩和远端的传递弯矩。

叠加以上两步的各杆杆端弯矩，就得到各杆实际的杆端弯矩。

【例 12.2】用力矩分配法计算图 12.5(a) 所示连续梁的弯矩图， EI = 常数。

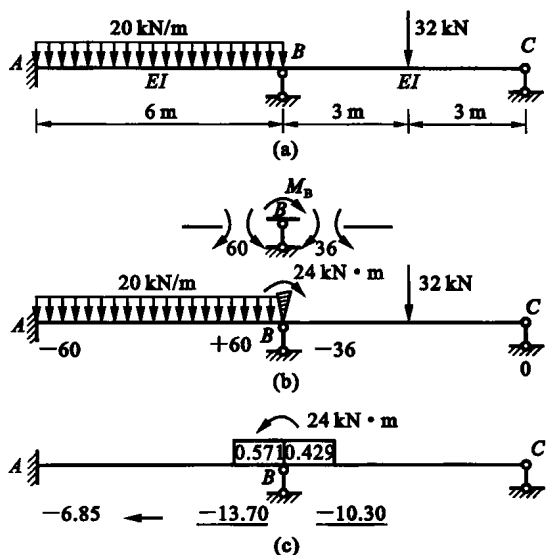


图 12.5 单结点力矩分配的过程

(a) 原结构及荷载；(b) 约束结点 B 转动求固端弯矩和约束力矩；
(c) 放松结点 B 约束求分配弯矩和传递弯矩

【解】

(1) 先在结点 B 加上阻止转动的约束[图 12.5(b)]。

计算由荷载产生的固端弯矩(对杆端顺时针旋转为正号)，并将计算所得固端弯矩数值写在各杆端的下方，固端弯矩的计算如下：

$$M_{AB}^F = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{20 \times 6^2}{12} = -60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA}^F = +\frac{ql^2}{12} = +\frac{20 \times 6^2}{12} = +60 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{3}{16}Pl = -\frac{3 \times 32 \times 6}{16} = -36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

在结点 B 处，各杆端弯矩总和为约束力矩 M_B ：

$$M_B = 60 - 36 = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

(2) 放松结点 B 。

这相当于在结点 B 施加一个力偶荷载 $-24 \text{ kN} \cdot \text{m}$ [图 12.5(c)]。结点 B 上作用的力偶荷载，按分配系数分配于两杆的 B 端，并使 A 端(远端)产生传递力矩。具体演算如下：

杆 AB 和 BC 的线刚度相等，都为 i ：

$$i = \frac{EI}{l}$$

转动刚度(远端固定时为 $4i$ ，远端铰支时为 $3i$)

$$S_{BA} = 4i_{AB} = 4i$$

$$S_{BC} = 3i_{BC} = 3i$$

分配系数

$$\mu_{BA} = \frac{S_{BA}}{S_{BA} + S_{BC}} = \frac{4i}{4i + 3i} = 0.571$$

$$\mu_{BC} = \frac{S_{BC}}{S_{BA} + S_{BC}} = \frac{3i}{7i} = 0.429$$

校核：

$$\sum \mu = \mu_{BA} + \mu_{BC} = 1$$

分配系数写在图 12.5(c) 结点 B 上面 BA 和 BC 端的方框内。

分配弯矩

$$M'_{BA} = 0.571 \times (-24) = -13.70 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M'_{BC} = 0.429 \times (-24) = -10.30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

分配弯矩写在各杆分配系数下面，并在分配弯矩下面画一横线[图 12.5(c)]，表示结点已放松，达到平衡。

传递弯矩(远端固定时，传递系数为 $\frac{1}{2}$ ；远端为铰支时，传递系数为 0)

$$M'_{AB} = \frac{1}{2} M'_{BA} = \frac{1}{2} \times (-13.70) = -6.85 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M'_{CB} = 0$$

用箭头表示弯矩传递的方向。

以上运算即结点力偶荷载作用的运算,结果表示于图 12.5(c)。

(3) 将以上(1)和(2)的结果叠加,即得到各杆最后的杆端弯矩。

实际演算时,可将以上步骤汇集在一起,按图 12.6(a)的格式演算。下面画双横线表示各杆杆端弯矩的最后结果。注意在结点 B 应满足平衡条件

$$\sum M = 46.30 - 46.30 = 0$$

根据所求得杆端弯矩值(正号为对杆端顺时针旋转)以及弯矩图应画在受拉一侧的画图规定,可画出梁的 M 图,如图 12.6(b)所示。

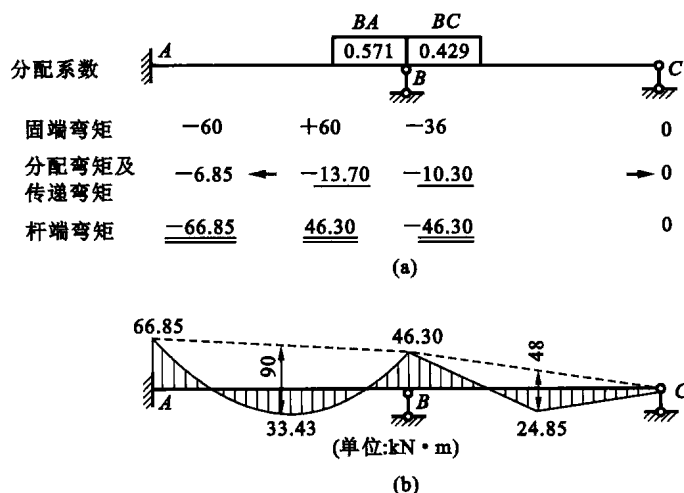


图 12.6 力矩分配的计算格式和 M 图

(a) 力矩分配的计算格式; (b) M 图

【例 12.3】用力矩分配法计算图 12.7(a)所示刚架,画弯矩图。各杆线刚度的相对值示于图中。

【解】

(1) 计算转动刚度和分配系数

转动刚度

$$S_{AB} = 3i = 3 \times 2 = 6$$

$$S_{AC} = 4i = 4 \times 1.5 = 6$$

$$S_{AD} = 4i = 4 \times 2 = 8$$

$$\sum_A S = 6 + 6 + 8 = 20$$

分配系数

$$\mu_{AB} = \frac{S_{AB}}{\sum_A S} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$\mu_{AC} = \frac{S_{AC}}{\sum_A S} = \frac{6}{20} = 0.3$$

$$\mu_{AD} = \frac{S_{AD}}{\sum_A S} = \frac{8}{20} = 0.4$$

$$\sum_A \mu = \mu_{AB} + \mu_{AC} + \mu_{AD} = 0.3 + 0.3 + 0.4 = 1$$

(2) 固端弯矩

$$M_{AB}^F = \frac{ql^2}{8} = \frac{15 \times 4^2}{8} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$