最新修订版

XUESHENGSHIYONG

学生实用

数学中考必备

SHU XUE ZHONG KAO BI BEI

任 勇 主编

中国青年出版社

学生实用 （最新修订版）

数学中考必备

SHUXUEZHONGKAOBIBEI

总策划 张正武

主　编 任　勇

副主编 李　为　李红新

撰　稿 任　勇　李　为　李红新　谢振武
叶翠桃　龚　林　张建怀　许清龙
黄友供　吴建中　叶　琛　李名济
翁颖茵　陈媚娜　杨柳峰　丁桂红
陈宝龙　刘汉文　耿　锐

中国青年出版社

(京)新登字 083 号

责任编辑:郭 静

封面设计:吴本泓+马丽娜

图书在版编目(CIP)数据

学生实用数学中考必备/任勇主编.-北京:中国青年出版社,2004

ISBN 7-5006-5864-8

Ⅰ.学… Ⅱ.任… Ⅲ.数学课-初中-升学参考资料Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 062067 号

(最新修订版)

*

中国青年出版社 出版发行

社址:北京东四 12 条 21 号 邮政编码:100708

网址:www.cyp.com.cn

安阳市华豫印刷厂印刷 新华书店经销

*

787×1000 1/16 印张 25.5 1124 千字

2004 年 7 月北京第 1 版

2004年 7 月河南第 1 次印刷

定 价:20.50 元

前　　言

《学生实用数学中考必备》一书是专为参加中考测试的学生而编写的复习迎考的学习用书。

本书特点如下：

一、编写——注重实用好用通用

1.实用：一册在手，就有复习策略篇，知识系列篇，综合能力篇，应试技巧篇，模拟考试篇，答案提示篇。从初三总复习开始，一直伴随读者到中考结束，每个阶段都能在书中找到具体的材料。

2.好用：与中考总复习同步进行，“知识系列篇”可一课一节一练同步使用，“综合能力篇”和“应试技巧篇”可酌情使用，选题由浅入深，注意一题多解、一题多变、一题多用。注重典型性、全面性，贴近近年中考要求。

3.通用：顾及各地中考情况，涉及知识全面，可供各类地区使用。

二、内容——覆盖面广突出重点

1.覆盖面广：本书所选内容，覆盖初中数学各章节内容，注重单元过关，辅以中考典型问题，达到强化考点、解疑释难之功效。

2.突出重点：在注重基础知识的同时，突出对重点知识、常用方法、重要能力的训练，加强知识、方法、能力间的内在联系与应用。

三、新颖——突出应用创新综合

“突出应用创新综合”，是数学中考命题的趋势。本书在编写中，专门列出“复习策略篇”、“知识系列篇”、“综合能力篇”、“应试技巧篇”、“模拟考试篇”和“答案提示篇”，读者在使用时会有新颖之感。

本书由任勇主编、统稿。各篇章作者如下：第一篇：李为。第二篇：第一章：谢振武；第二章：叶翠桃；第三章：龚林；第四章：张建怀；第五章：许清龙；第六章：黄友供；第七章：吴建中；第八章：叶琛；第九章：李名济；第十章：翁颖茵；第十一章：陈媚娜；第十二章：杨柳峰。第三篇：第一章：丁桂红；第二章：丁桂红；第三章：陈宝龙。第四篇：任勇、李红新。第五篇：刘汉文。

在本书的编写过程中，我们参考了部分初中数学教辅类书籍，在此特表谢意。总策划张正武先生和中国青年出版社的编辑、审订人员也为本书的出版做了大量细致的工作，特此亦表谢意。

本书是全体编撰人员精心设计、用心编写而成的，但由于时间稍紧，编写中恐有差错，恳请读者和专家批评指正，以便不断修正和完善。

《学生实用数学中考必备》编写组

2004年7月

目　录

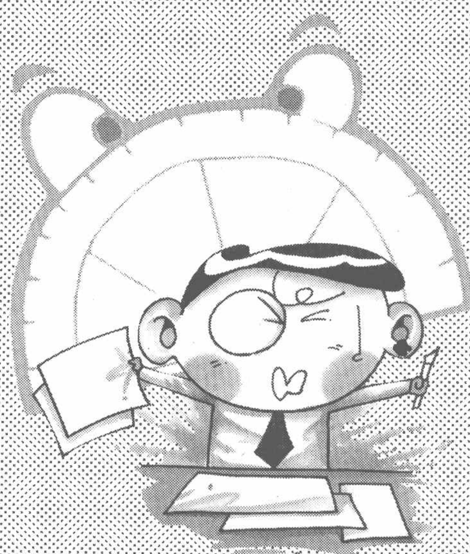
第一篇 复习策略篇

第一章 夯实基础，根深才能叶茂

第二章 工欲善事，还须利其之器

第三章 随机应变，处处皆有灵犀

第四章 紧锣密鼓，演习当打真仗



第一章　夯实基础，根深才能叶茂

——谈系统整理数学知识

俗话说："万丈高楼平地起".数学复习，也不例外.数学复习的指导文章很多，但几乎所有文章都谈到一点，就是要系统整理知识.大家认为，基础扎实，是数学中考取得成功的最重要的一环.著名数学教育家波利亚说过："货源充足和组织良好的知识仓库是一个解题者的重要资本"，可见数学知识是数学解题的出发点与凭借，只有打好数学知识的根基后，才能去建造巍峨数学王国的宏伟大厦.

数学知识如此重要，怎样才能牢固掌握好数学知识呢？

1.课本知识，牢固掌握

朱子有句诗曰："问渠哪得清如许，为有源头活水来."我们之所以提起它，是要说课本的重要性.课本如百源之头，各式各样的题型，都是课本内容的变化.虽然我们已逐章逐节地学完了课本知识，但平时学习一环扣一环，不少知识来不及消化，很少系统总结.因此，在初三总复习时，通过全面复习课本，加深和巩固已掌握的知识，弥补平时学习的不足，是完全必要的.

课本内容很多，复习时应做到"三抓"：

一抓基本知识的复习.对课本中的知识点进行全面整理，把分割学习的知识单点或知识片断组合成知识链、公式链、运算链，对整个课本知识有一个系统的认识.

回想一下几何的计算问题，很多都离不开构造直角三角形.解直角三角形一章的应用问题是大家非常熟悉的，也知道必须转化为解直角三角形的问题.但是还有许多的计算问题采用相同的方法.比如，有关垂径定理的计算题，一般给圆的一条弦就要想到作垂直于弦的垂线段，构造直角三角形.$R^2=(\frac{1}{2})^2+d^2$.其中，直角三角形的斜边是圆的半径 R，一条直角边是弦长的一半 $\frac{l}{2}$，另一条直角边是弦心距.再比如，求两圆的内(外)公切线问题也是构造直角三角形. $l_{外(内)}=\sqrt{d^2+(R\mp r)^2}$.若求两圆外公切线 $l_外$，斜边是两圆的外公切线 $l_外$，一条直角形是两圆的圆心距 d，另一条直角边是两圆半径的差 $R-r$；求两圆内公切线 $l_内$时，斜边是两圆内公切线 $l_内$，一条直角边是两圆的心距 d，而另一直角边却是两圆半径的和 $R+r$.还有正多边形和圆的计算问题也是转化为解直角三直形的问题.正多边形外接圆的半径 R_n 是直角三角形的斜边，一条直角边是正多边形内切圆半径也叫边心距 r_n，另一条直边是正多边形的边长的一半 $\frac{a_n}{2}$，即 $R_n^2=(\frac{a_n}{2})^2+r_n^2$.通过对知识进行重新整理，我们会发现很多知识变成了同一类问题，我们的头脑也清楚了，书也就越读越薄了.

二抓基本知识的深化.总复习时对课本知识的整理，就不能满足于会背诵、会证明，而应通过认真分析，掌握它们的本质，揭示联系，理清相近知识，易混知识，透彻理解知识，找出规律.

例 1　**如图 1－1－1 所示，AB 是⊙O 的直径，⊙O 过 AC 的中点 D，$DE\perp BC$，垂足为 E.**

(1)由这些条件，你能推出哪些正确结论？(要求：不再标注其他字母，找结论的过程中所连辅助线不能出现在结论中。不写推理过程，写出 4 个结论即可).

(2)$\angle ABC$ 为直角，其他条件不变，除上述结论外，你还能推出哪些新的正确的结论，并画出图形.

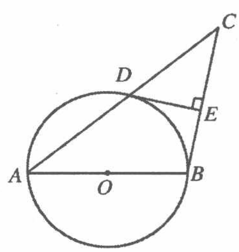


图 1－1－1

解：(1)① DE 是⊙O 的切线；② $AB=BC$；③ $\angle A=\angle C$；④ $DE^2=BE\cdot CE$；⑤ $CD^2=CE\cdot CB$；⑥ $\angle C+\angle CDE=90°$；⑦ $CE^2+DE^2=CD^2$.

(2)① $CE=BE=DE$，② $DE=\frac{1}{2}AB$；③ BC 是⊙O 的切线；④ $AC=\sqrt{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}DE$；⑤ $\angle A=\angle C=\angle CDE=45°$；⑥ $\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$；⑦ $BC^2=AC\cdot CD$；⑧ $S_{\triangle CDE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$；⑨ $DE\cdot AB=AD^2$.

这是一道源于教材的中考题，从这个题中我们至

少可从中看到教材中的三道例题的图形.如果我们还想充分发挥此例题的作用,还可以连结 OD、BD,大家将发现更多有价值的结论.这样一道证明题也就变成了更有趣的探索题.现在,必须扭转我们"背定义、套公式、记题型、解难题"的那种死板僵化的学习办法.

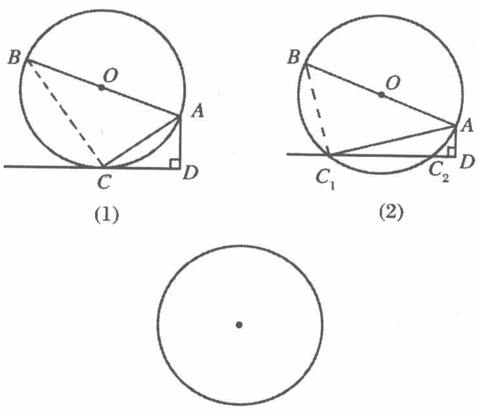
三抓基本知识的应用.在复习课本知识的同时,要认真研究例题和认真分析习题(有保存作业习惯的同学,可对照以前作业进行分析,效果更好),学会对课本上的例题和做过的习题按知识或解题方法进行初步归类,找出一般规律.

各地中考试题中基础知识和基本技能的考查大都占试卷总体的 80% ~ 85%,这符合新教材的特点,体现了新大纲的要求,即加强"双基".这些试题主要来源于对课本例题、习题进行一定的改编,如变换数字、变换字母、变换图形、变换条件等等方法,这提醒学生在学习中应充分利用教材,牢固掌握基础知识.

例 2 **如图 1-1-2(1),AB 是⊙O 的直径,AC 是弦,直线 CD 切⊙O 于点 C.$AD\perp CD$,垂足为 D.**

(1)求证:$AC^2=AB\cdot AD$;

(2)若将直线 CD 向上平移,交⊙O 于 C_1、C_2 两点,其他条件不变,可得到图 1-1-2(2)所示的图形,试探索 AC_1、AC_2、AB、AD 之间的关系,并说明理由.



(1) (2) (3)

图 1-1-2

(3)把直线 C_1D 继续向上平移,使弦 C_1C_2 与直径 AB 相交(交点不与 A_1B 重合)其他条件不变,请你在图 1-1-2(3)中画出变化后的图形标好相应字母,并试着写出与图 2 相应的结论,判断你的结论是否成立?若不成立,说明理由;若成立,请给予证明.

(1)证明:连结 BC

$$\left.\begin{array}{l}AB\text{ 是⊙}O\text{ 直径}\Rightarrow\angle ACB=90^\circ\\ AD\perp CD\Rightarrow\angle ADC=90^\circ\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\angle ACB=\angle ADC\\ \text{直线 }CD\text{ 切⊙}O\text{ 于点 }C\Rightarrow\angle ABC=\angle ACD\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\triangle ABC\backsim\triangle ACD$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$$

$$\Rightarrow AC^2=AB\cdot AD.$$

(2)AC_1、AC_2、AB、AD 之间的关系:

$AC_1\cdot AC_2=AB\cdot AD$.

理由是:连结 BC_1.

四边形 BC_1C_2A 是圆内接四边形

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle ABC_1=\angle AC_2D\\ \text{同(1)有}\angle AC_1B=\angle ADC_2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\triangle ABC_1\backsim\triangle AC_2D$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AC_2}=\frac{AC_1}{AD}$$

$$\Rightarrow AC_1\cdot AC_2=AB\cdot AD.$$

(3)画图:如图 1-1-3 所示

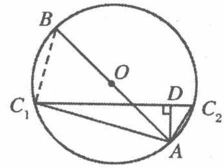


图 1-1-3

结论是:$AC_1\cdot AC_2=AB\cdot AD$

证明:连结 BC_1

$$\left.\begin{array}{l}\text{同(1)有}\angle AC_1B=\angle ADC_2\\ \angle B=\angle C_2\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\triangle ABC_1\backsim\triangle AC_2D$$

$$\Rightarrow\frac{AB}{AC_2}=\frac{AC_1}{AD}$$

$$\Rightarrow AC_1\cdot AC_2=AB\cdot AD.$$

这也是一道中考题.此题的问题(1)是教材中的例题的图形和条件,但要证明的结论不同.教材中是证明 AC 平分$\angle DAB$,假如我们复习时只是浅尝辄止,不去向纵深挖掘,那么,我们就无法超越自己.看一看此题的问题(2)吧!这是一个结论开放的问题,答案要自己寻托.看它的条件是把(1)的切线 CD 平移变成一条割线交⊙O 于 C_1、C_2,由(1)向(2)的变化是一个由特殊问题向一般问题的拓展.然而,同学们是否注意到图

(2)是学习垂径定理时一道典型习题的图形，图 1－1－3 又是这道典型习题的图形变式.

能充分利用好课本的例题、习题等进行研究性学习，这样一道叙述冗长且图形动态变化的中考压轴题又有何难呢？

2. 数学概念，抓住实质

学习数学概念，贵在抓住本质."等弧"这个概念不难理解吧？同学们先做一题看看.

例 3　**下列语句中，正确的是**　（　　）

A. 相等的圆心角所对的弧相等

B. 长度相等的弧是等弧

C. 等弧所对的圆周角相等

D. 在$\odot O_1$与$\odot O_2$中，分别有 40°的$\overset{\frown}{MN}$和$\overset{\frown}{M_1N_1}$，则$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{M_1N_1}$

"等弧"概念的实质是什么？一是必须在同圆或等圆中；二是能够互相重合，非本质属性是什么？那就是这两条弧与它们所处的两圆位置无关.

弄清本质与非本质属性，就不难得出答案为 C. 而实际上，很多同学都忽视了"等弧"的一个前提条件必须是"在同圆或等圆中".

要抓住概念的实质，可以从以下几方面进行.

一是通过概念的形式来理解数学概念. 数学概念是通过实例、模型、图形和计算而引入的，加强对概念形成的认识（初三数学复习时可以回顾形成的过程），可增强直观效果，有助于对概念的正确理解.

二是通过分层次来理解数学概念. 复习数学概念时，要学会用自己的语言（文字的、符号的、图形的）剖析每个概念的定义层次.

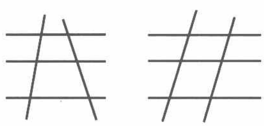


图 1-1-4

三是通过变式来理解数学概念. 几何概念要会画出它的变式图形（标准的、非标准的），如"平行线等分线段定理"的画图，图 1－1－4 是标准的，图 1－1－5 是非标准的. 又如"扇形"的概念，图 1－1－6 是各种扇形的变式图. 代数概念要学会等价的多种表达形式，如 a、b 不全为 0$\Leftrightarrow a^2+b^2\neq0\Leftrightarrow|a|+|b|\neq0$ 等.

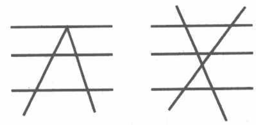


图 1-1-5
图 1－1－5

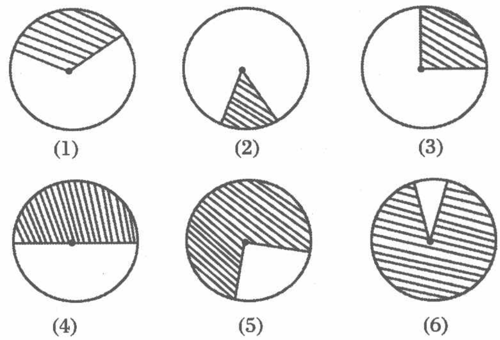


图 1－1－6

四是通过对比来理解数学概念. 如易混概念的对比（如平方的和与和的平方，不全为 0 和全不为 0）；对应概念的对比（如乘方与开方）；类似概念的对比（如代数中的"四个二次"、全等与相似）等.

五是通过知识系统化来理解数学概念. 如实数的分类、四边形的从属关系等.

六是通过运用数学概念来掌握概念本质. 如"锐角三角函数"的四个定义，是解直角三角形的应用问题的关键，其实"锐角三角函数"定义的实质就是直角三角形中边与角的关系. 解题时，就是要抓已知的边与角的关系. 一是要抓"已知角"（锐角）；二是要抓住"已知边"，"已知边"是直角三角形的斜边、还是"已知角"的"对边"或"邻边"；三是看"定义"，已知的边的比值是对应锐角的四个三角函数定义的哪一个？应用时，还要对"锐角三角函数"定义变式. 应该说，灵活运用概念及定义解题，是掌握概念本质的较高表现.

3. 公式定理，学会"应用"

学习公式定理，贵在学会"六用"：互用、逆用、连用、变用、巧用、活用.

勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 谁不知道，正用、逆用的例子较多. 再看一例：

例 4　**在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，已知 $a+b=m$，$ab=n$，求 c.**

由已知分别求 a、b，再由 $c^2=a^2+b^2$ 可求 c，但由

$c^2=(a+b)^2-2ab=m^2-2n$,

求得 $c=\sqrt{m^2-2n}$,多么简单明快.

勾股定理有各种变形形式,如

$a^2=(c+b)(c-b)$,

$c^2=(a+b)^2-2ab$,

$2ab=(a+b+c)(a+b-c)$,

$2ab=(b+c-a)(a+c-b)$,

$\frac{1}{2}ab=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$($p$ 为 $\triangle ABC$ 的半周长).

你会证明和应用吗?

简单的勾股定理就有如此"多用",其他公式定理也一定会"变化多端",大有"用"处.

4.串联知识,编织网络

渔网能捕鱼,是由于由纵横编织成网的缘故.整理数学知识也应从纵横两方面进行.纵的方面,是按知识系统进行整理,使知识系统化、条理化.如平行四边形的性质和判定.横的方面,是按专题进行整理,可从解题思路、解题规律、解题技巧上总结规律.如几何比例式或等积式证法研究.当然,在串联知识时,要防止"眉毛胡子一把抓"的倾向,要知道胡乱编织是不能成网的.

例 5 **如图 1-1-7,已知 CD、CE 分别是 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高和中线,试就此图,思考下列问题:**

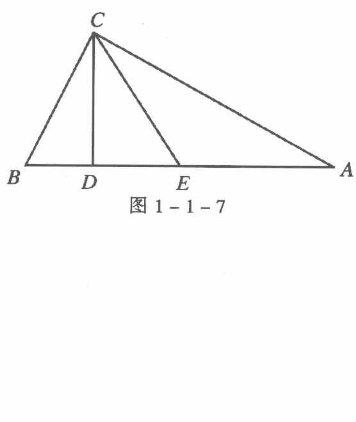


图 1-1-7

(1)若 $AC=4$,$BC=3$,则 $AB=$________,$CD=$________,$CE=$________;

(2)图中的相似三角形有________对;

(3)图中等腰三角形有________个;

(4)图中$\angle A$与$\angle ACD$的关系是________,图中有这种关系的角还有________;

(5)$\triangle ABC$ 的外接圆半径________,内切圆半径________;

(6)图中面积相等的三角形有________;

(7)若 $BC:AC=1:2$,则 $BD:AD=$________;(8)若$\angle A=30°$,以点 E 为圆心,DE 为半径的$\odot E$与 AC 的关系是________.

此题再现了分解在教材中直角三角形的有关概念、定理,既复习了基础知识,又熟练了基本技能,在此基础上进一步深化,构建了一个关于直角三角形的知识网络.

5.突出重点,突破难点

在全面复习、整理归纳的基础上,下一步就是要突出重点知识,突破难点知识.每个学生应在头脑中形成三个系统:重要概念有哪些(形成概念系统),重要定理有哪些(形成定理系统),重要公式有哪些(形成符号系统).抓住重点,不要以它为中心,前后左右牵动一片,形成以重点知识为中心的"知识圈".每个学生在数学学习中难免有自己的难点,整理知识时还应强攻这个难点(必要时可请老师个别指导,或请教班上的"小先生"),突破这个难点,及时搬掉这个障碍.有的同学认为,突破难点,就是"钻进题海攻难题",这是不可取的.切记:中考迫近抓双基,偏题难题姑弃之.

第二章　工欲善事，还须利其器

——谈其熟练掌握数学方法

学习数学，离不开解题．用什么样的观点去看待数学解题，并采用什么样的思想和方法去解决数学问题，这对于一个初三数学总复习的学生来说，是十分重要的．数学思想和方法，就像工匠精良的工具．有了精良的工具，工匠就能干好他的活儿．

1．解题需要一定的方法

解题一定要讲究方法．事实上，我们解决任何一道数学题，都伴随着这样或那样的方法，没有方法的解题是不存在的，只不过有繁与简、通法与特法之分罢了．因此，要提高解题能力，就要掌握一定的解题方法．

义务教育数学教学大纲把数学思想和方法作为初中数学的基础知识的一部分，这有利于揭示知识的实质，有利于提高学生的数学素养．因此，同学们在复习时要加强对数学思想方法的学习，并逐步体会、领悟直至应用．

例 1　**下列方程：**

①$(\frac{x}{x-1})^2-5(\frac{x}{x-1})+6=0$；

②$x^2+x+1=\frac{2}{x^2+x}$；

③$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{5}{2}$；

④$3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$.

其中可以用换元法来解的方程的个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

同学们可试试看，四个方程均可用换元法来解．

换元法是一种手段，其目的就是转化．

例 2　**如图 1－2－1，已知 AB 是半圆 O 的直径，C 是圆上一点，$CD\perp AB$，垂足为 D．$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 相切于 E，$\odot O_1$ 与 CD、AB 分别相切于 F、G，如果 $AB=16$，$AC=4$，求 $\odot O_1$ 的半径．**

连结 O_1F、O_1G、BC、O_1O，由 Rt$\triangle ACD\backsim$Rt$\triangle ABC$，可得 $AD=1$，可以证明四边形 $FDGO_1$ 是正方形，设 $\odot O_1$ 的半径为 x，$O_1G=x$，$OG=7-x$，$O_1O=8-x$，在 Rt$\triangle O_1GO$ 中，由勾股定理，得 $x^2+(7-x)^2=(8-x)^2$，解得 $x=3$，即 $\odot O_1$ 的半径为 3．

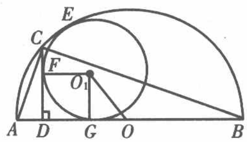


图 1－2－1

本例考查了两圆的位置关系、相似三角形、四边形、勾股定理等方面知识的综合运用能力，特别是在计算过程中引入方程的思想，通过构造方程来求解．

构造方程就是构造法的一种．

2．解题没有固定的方法

不同的人解同一道数学题有着许许多多不同的解法，同一个人解同一道数学题也可得到不同的解法．再好的解题法也只是相对而言的，不存在可以解任何数学题的方法．只有具体问题具体分析，才能不断提高解题水平．从考试角度看，试题（尤其是解答题）一般都有两种以上解法，考查学生思维能力．因此，初三总复习阶段应重视从不同角度审视问题，加强一题多解训练．

例 3　**如图 1－2－2，抛物线的对称轴是 $x=1$，它与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于点 C，点 A、C 的坐标分别是 $(-1,0)$、$(0,\frac{3}{2})$．**

求此抛物线对应的函数解析式

解法 1：设所求的函数解析式为

$y=ax^2+bx+c$，则

$$\begin{cases}a-b+c=0\\c=\frac{3}{2}\\-\frac{b}{2a}=1\end{cases}$$

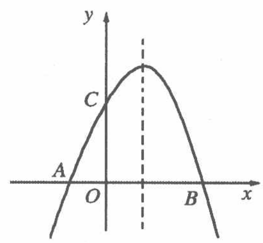


图 1－2－2

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$b=1$，$c=\frac{3}{2}$

$\therefore$ 所求函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$；

解法2：$\because$ 抛物线的对称轴是直线 $x=1$，它与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,0)$

$\therefore$ 可设所求的函数解析式是 $y=a(x+1)(x-3)$，将点 $C(0,\frac{3}{2})$ 代入上式，解得 $a=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 所求的函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$；

解法3：$\because$ 抛物线的对称轴是直线 $x=1$

$\therefore$ 可设所求的函数解析式为 $y=a(x-1)^2+h$

将点 $A(-1,0)$、$C(0,\frac{3}{2})$ 代入上式，得

$$\begin{cases}4a+h=0\\ a+h=\frac{3}{2}\end{cases},$$

解得 $a=-\frac{1}{2}$，$h=2$

$\therefore$ 所求的函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$；

由此说明，通过一题多解训练，能够帮助同学们从多角度去扩大思维线索，不断拓宽了解题思路，增强了运用数学知识的能力。

例4 **如图1－2－3，在Rt△ABC中，AB＝AC．∠BAC＝90°，O为BC的中点，(1)写出点O到△ABC的三个顶点的距离关系(不要求证明)．(2)如果点M、N分别在线段AB、AC上移动，在移动中保持AN＝BM．请判断△OMN的形状，并证明你的结论．**

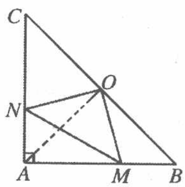


图1－2－3

分析：本题的解答是让同学们自己猜想，第(1)小题只要掌握直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，即可得到第(1)小题的结论 $OA=OB=OC$．第(2)小题是让同学们在给定条件下，通过观察、分析方能得到猜想和论证．猜测△OMN是等腰直角三角形．第(2)小题的证法有很多．

证明1：如图1－2－3，连结 AO．

$\because AC=AB$，$OC=OB$，

$\therefore AO\perp BC$，即 $\angle AOB=90°$．$\angle CAO=\angle BAO$．

又 $\because \angle BAC=90°$．

$\therefore \angle B=45°$

$\therefore \angle NAO=\angle B$，又 $\because AN=BM$，$OA=OB$，

$\therefore \triangle ANO\cong\triangle BMO$．

$\therefore ON=OM$． ①

$\angle NOA=\angle MOB$，

$\therefore \angle NOA+\angle AOM=\angle MOB+\angle AOM$．

$\therefore \angle NOM=\angle AOB=90°$ ②

由①和②，可知△OMN是等腰直角三角形．

证法2：如图1－2－4，把Rt△ABC补全为正方形$ABGC$，分别延长NO、MO，交BG、GC于点E、F，连结ME、EF、FN．利用正方形$ABGC$和已知条件，可证明四边形$MEFN$也是正方形，再利用正方形对角线的性质可推得△OMN是等腰直角三角形．

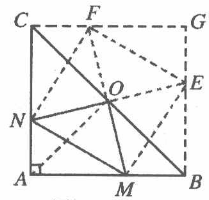


图1－2－4

证法3：如图1－2－5，当 $AN\neq\frac{1}{2}AC$ 时，过点 O 作 $OE\perp AC$，$OF\perp AB$，垂足分别为E、F，则可证明E、F分别是AC、AB的中点，四边形$AFOE$是正方形．结合已知条件，用ASA可证得△$OEN\cong$△OFM，再用全等三角形的性质和等量代换，可推得△OMN是等腰直角三角形．当 $AN=\frac{1}{2}AC$ 时，ON与OE重合，OM与OF重合，猜想显然也成立．

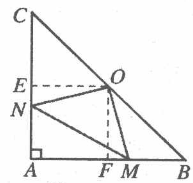


图1－2－5

证法4：如图1－2－6，过点C作AB的平行线交MO的延长线于点D，连结DN．先用AAS或ASA证明△$OCD\cong$△OBM，再用SAS证明△$DCN\cong$△NAM，结合等量代换可推得△ONM是等腰直角三角形且点O是斜边DM的中点，再用等腰直角三角形的三线合一可证明得猜想．

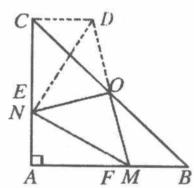


图1－2－6

证法5：辅助线的做法如图1－2－5．可设 $AB=AC=2a$，$AN=BM=x$，利用勾股定理可求得

$ON=OM$

$=\sqrt{a^2+(a-x)^2}=\sqrt{2a^2-2ax+x^2}$，

$NM=\sqrt{x^2+(2a-x)^2}=\sqrt{4a^2-4ax+2x^2}$，

再结合逆定理可证得．

3．大法必须熟练掌握

数学解题中的大法，是指解题中一些通用的、常用的方法．这些方法是人们长期解题所得出的经验．初中数学中常用的数学方法是消元法、换元法、配方法、待

定系数法;常用的数学思想是函数思想、方程思想和数形结合思想.近年中考数学试题都注意了这方面的考查.

例 5 **若 $a=3-\sqrt{10}$,则代数式 a^2-6a-2 的值为( )**

A.0 B.1 C.-1 D.$\sqrt{10}$

解:$\because a=3-\sqrt{10}$ 可变形为 $a-3=-\sqrt{10}$,注意到 a^2-6a-2 中一次项系数为 -6,于是对它施行配方变换,$a^2-6a-2=(a-3)^2-11$,视 $a-3$ 为一整体,代入得

原式 $=(-\sqrt{10})^2-11=-1$.选 C.

这是河北省的一道中考题,巧妙运用整体思想和配方法进行解题.

例 6 **当 x 取实数时,A 是 $x,3x-1,\dfrac{1}{x}$ 三者中的最小值,则 A 的最大值为______.**

解:做出三个函数的图像,A 的取值为图中的实线,在 A_0 点达到最大值,解方程组

$$\begin{cases} y=x, \\ y=\dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

可得 A 的最大值为 A_0 的纵坐标 1.

数与形的结合,形象直观,便于思考.

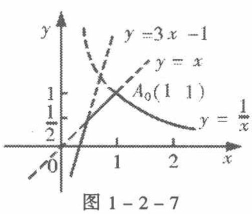


图 1-2-7

4.小法必须灵活运用

数学解题中的小法,是指解题中一些特殊的解题方法.这些方法在解决某些具体问题时,常常显示出它的优越性.

例 7 **已知 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,求 $\dfrac{x^3+x+1}{x^5}$ 的值.**

解:以对偶数 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$、$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 为两根构造方程 $t^2-t-1=0$,则 $x+1=x^2$,于是

原式 $=\dfrac{x^3+x^2}{x^5}=\dfrac{x+1}{x^3}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

这里我们用了一种特殊的解题方法——构造法.常用于构造方程、函数、图形等.

例 8 **解方程 $\sqrt{2x^2-3x+7}-\sqrt{2x^2-3x+2}=1$.**

解:由此方程的特征,可设

$\sqrt{2x^2-3x+7}=1+a$, ①

$\sqrt{2x^2-3x+2}=a(a\geqslant 0)$. ②

①^2 - ②^2,得 $a=2$,

进一步解得 $x_1=2,x_2=-\dfrac{1}{2}$.

这里我们也用了一种特殊的方法——增量法.若 $a>b$,可令 $a=b+t$,其中 t 称为增量,用上述变换进行解题的方法,称之为增量法,它在初中数学解题中有一些应用.

总之,数学解题是一个矛盾的统一体.解题要有一定的方法,却没有固定的方法.不定中有定,定中又相对不定."大法"和"小法"也是相对而言的,对整个数学解题来说"小法"的某种方法,可能在解决某一类问题时便是"大法".如特殊值法,在整个数学解题来说是小法,而对选择、填空题而言则是大法.运用得好,妙不可言.

第三章　随机应变,处处皆有灵犀

——谈逐步培养数学能力

九年制义务教育数学教学大纲中着重指出:“知识、技能和能力三者的关系是互相依存,互相促进的,能力是在知识的教学和技能训练过程中,通过有意识的培养而得到发展的;同时,能力的提高又会加速加深对知识的理解和技能的掌握”.因此,同学们在重视基础知识、基本方法的学习上,还应加强基本技能的训练和能力的培养,这是教学大纲对我们提出的迫切要求,也是素质教育提出的更高要求.

数学中考主要考查学生“四能力”:运算能力、空间想象能力(空间观念)、逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力.其中发展思维能力是培养能力的核心.

1.数学运算能力的培养

近几年的中考,对数学运算的要求高了,形成逐级提高的三个层次:一是运算要熟练、准确;二是运算要简捷、迅速;三是运算与推理相结合.中考数学答案中反映出学生计算错误多,尤其是选择题、填空题,往往因稍有疏忽引起计算错误而不得分.因此,重视运算,加强运算训练,是十分重要的.

(1)熟记数据,有利运算.复习数学时,要有意记住一些常用数据(如1—20的平方数,勾股数值等),在解题时能直接代入或得出结果,甚至帮助我们分析问题,对数学运算是十分有利的.

(2)掌握知识,正确运算.正确的运算源于对数学概念、公式、法则和定理的正确掌握.如果我们在学习中只求运算结果的正确,不注意运算过程的依据以及正确、简洁的表达,那么就会胡乱地运算,得到错误的结果.如错误地运用运算顺序,得到计算错误:$(-3)^2\div(-2)^2\times(-2)^{-2}=(-3)^2\div(-2)^{2+(-2)}=(-3)^2\div1=9$.

(3)熟练技能,迅速运算.正确运算解决了一个“对”的问题,在运算中还要解决一个“快”的问题,做到“对而又快”.这就要求同学们熟练实数运算;熟练整式、分式、根式的运算;熟练因式分解、解方程与解不等式;熟练运用基本概念、性质、公式、法则;熟练掌握一些口算、心算的方法.

(4)全面审视,合理运算.运算不仅要正确迅速,还应当合理,做到“既对又快且巧”.合理化运算是一种简捷运算,它可以节省时间和精力,而且由于避免了繁琐的运算,更能保证减少错误.运算合理化通常通过①分析局部,联系整体;②引入参数;③一题多解;④寻找规律;⑤换序运算;⑥活用公式等方法来实现.

例1　已知 $abc=1$,化简

$$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ac+c+1}.$$

有的同学可能就原式求公分母(即各分母的积,实质上并非最低公倍式)进行通分,因而陷入繁琐的运算之中.若注意利用已知条件 $abc=1$,把第一式分母中的1用 abc 代入,第三式分母中的 ca 用 $\frac{1}{b}$ 代入,分别化简后便与第二式同分母,这时只要把三个分子相加,约分即得1.

(5)多法配合,巧妙运算.数学中的许多方法都能为运算服务,如利用图形简化运算(如本文例8),利用整体思想简化运算(如本文例7),利用构造法简化运算(如本文例9)等.

2.数学想象能力的培养

想象能力对初中生来说,虽不是主要能力,但我们不能失去培养它的时机.在初中培养一定的想象能力,不仅对初中学习有利,而且也为高中学习打好基础.初中复习阶段可以通过平面几何、函数图像、解直角三角形和某些应用题的学习,初步培养想象能力.

近几年中考,数学新教材中新增的内容如直观空间图形知识也在试题中出现,虽只是以中低档题型出现,也应引起同学们足够的重视.

让我们看几道试题:

例2　**如图1-3-1,圆柱的轴截面 $ABCD$ 是边长为4的正方形,动点 P 从 A 点出发,沿着圆柱侧面移动到 BC 的中点 S 的最短距离为**　(　　)

A.$2\sqrt{1+\pi^2}$　　B.$2\sqrt{1+4\pi^2}$

C.$4\sqrt{1+\pi^2}$　　D.$2\sqrt{4+\pi^2}$