普通高等教育"十二五"规划教材

全国高等医药院校规划教材

医药高等数学学习辅导

第3版

杨松涛　钱微微　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
全国高等医药院校规划教材

医药高等数学学习辅导

第3版

杨松涛　钱微微　主编
周永治　主审

科学出版社

内 容 简 介

本书是普通高等教育"十二五"规划教材、全国高等医药院校规划教材《医药高等数学》(第4版)的配套教材,也是本书的第3版.全书分10章,包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、微分方程与无穷级数.《医药高等数学》侧重于理论,本书侧重于理论知识的归纳总结、各类各层次习题的分析与解法,它有利于学生对高等数学的概念与理论的理解,有利于培养学生归纳总结、分析解决问题的能力,有利于学生对运算和方法的掌握,也有利于沟通教与学两个教学环节.

本书可供高等医药院校各专业层次的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

医药高等数学学习辅导 / 杨松涛,钱微微主编.—3版.北京:科学出版社,2012.5

普通高等教育"十二五"规划教材　全国高等医药院校规划教材

ISBN 978-7-03-034113-6

Ⅰ.医…　Ⅱ.①杨…　②钱…　Ⅲ.医用数学-高等数学-医学院校-教学参考资料　Ⅳ.①R311　②O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第077920号

责任编辑:杨　扬　曹丽英 / 责任校对:包志虹
责任印制:刘士平 / 封面设计:范璧合

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004年9月第　一　版　开本:787×1092　1/16
2012年5月第　三　版　印张:10　1/4
2012年5月第十五次印刷　字数:236 000

定价:21.90元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

《医药高等数学学习辅导》(第3版)
编写人员

主　编　杨松涛　钱微微

副主编　傅　爽　王蕴华　钟志强　曹　敏
　　　　　邵建华　路远芳　胡灵芝　黄　浩

主　审　周永治

编　委　(按姓氏笔画排序)

马　利　湖北中医药大学
王　力　天津中医药大学
王蕴华　天津中医药大学
石　莹　南京中医药大学
许华萍　浙江中医药大学
杨松涛　安徽中医学院
张忠文　甘肃中医学院
路远芳　安徽中医学院
陈素玲　山东中医药大学
邵建华　上海中医药大学
赵聪俐　天津中医药大学
胡灵芝　陕西中医学院
钟志强　南京中医药大学
钱微微　浙江中医药大学
黄　浩　福建中医药大学
黄爱武　湖南中医药大学
曹　敏　贵阳中医学院
覃　洁　广西中医药大学
傅　爽　山东中医药大学

第3版编写说明

《医药高等数学》、《医药数理统计》、《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》是全国18所中医药院校联合编写的数学系列教材．自2004年9月由科学出版社出版以来，该套教材发行面广，发行量大，在中医药院校受到广大师生的欢迎．为了更进一步提高该套教材的质量，编写组对前几版的教材进行分析、总结，根据科学出版社精品教材“五性”、“三基”的要求，对教材进行了认真的修改、补充，编写了第4版的《医药高等数学》、《医药数理统计》与第3版的《医药高等数学学习辅导》、《医药数理统计学习辅导》．该配套教材将更适应医药院校的医药类、管理类、信息类、人文类等专业的需要，定于2012年6月由科学出版社正式出版．

《医药高等数学学习辅导》（第3版）是《医药高等数学》（第4版）的配套教材，相应地也有10章．每章包括三大部分：一、内容提要与基本要求；二、习题解答（该章习题的解答过程）；三、增补习题解答（增补一些有代表性，有适当难度的习题）；书的最后编入一些院校有代表性的试卷．本辅导教材有利于学生对高等数学的概念与理论的理解，有利于对运算和方法的掌握，帮助学生在学好高等数学的同时培养自己分析解决问题的能力，也有利于教师的教学工作．

参加本教材编写的有：天津中医药大学、山东中医药大学、甘肃中医学院、陕西中医学院、安徽中医学院、南京中医药大学、上海中医药大学、浙江中医药大学、福建中医药大学、湖北中医药大学、湖南中医药大学、广西中医药大学、贵阳中医学院．

本教材编写过程中得到许多同行专家的关心与支持，在此一并表示感谢．

本教材尚有不少不足之处，恳请读者与同行批评指正．

编　者

2012年4月

目　　录

第一章

函数与极限

一、内容提要与基本要求

本章介绍了函数的概念、性质与表示法;数列的极限、函数的极限;函数的增量;函数的连续性.函数是高等数学中研究的主要对象,极限方法是高等数学的主要方法.极限是从量变认识质变,从近似认识精确,从有限认识无限的一种数学方法.本章必须掌握下面几方面的内容:

1. 正确理解函数的概念、性质,会求函数的定义域,能将复合函数分解为若干简单函数.

2. 正确理解函数的极限,能用 ε-δ 定义刻画函数的极限,理解 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 是否存在与 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义无关,了解极限的一些性质.

3. 熟练掌握极限运算法则,正确理解并熟练应用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

4. 了解无穷小量、无穷大量,掌握函数的极限与无穷小量的关系.

5. 正确理解函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点处连续的概念,会判断函数的连续性与间断点,了解初等函数的连续性,掌握闭区间上连续函数的性质.

二、习题一解答

1. 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $y=x+1$ 与 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;　　(2) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;

(3) $y=f(x)$ 与 $x=f(y)$;　　(4) $y=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 与 $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$;

(5) $y=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$;　　(6) $y=a^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}$.

解 (1) 不同. $y=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 不同. $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $y=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

(3) 相同.定义域和对应关系都相同.

(4) 不同.对应关系不同.

(5) 相同.定义域和对应关系都相同.

(6) 相同.定义域和对应关系都相同.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$,求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $[f(x)]^2$, $f[f(x)]$, $\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{n\text{次}f}$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{3}$,　$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$,　$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x+1}$,　$[f(x)]^2=\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$.

由于

$$f[f(x)]=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1},$$

又

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1},$$

假定对 $n=k$ 均有

$$\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{k\text{次}f} = \frac{x}{kx+1},$$

对于 $n=k+1$，

$$\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{k+1\text{次}f} = \frac{\frac{x}{kx+1}}{\frac{x}{kx+1}+1} = \frac{x}{(k+1)x+1},$$

故对于所有的 n，均有

$$\overbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}^{n\text{次}f} = \frac{x}{nx+1}.$$

3. 设 $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & -\infty < x \leqslant 0, \\ -2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f[f(-1)]$，$f[f(0)]$，$f[f(1)]$.

解 $f(-1)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=-2$，$f[f(-1)]=1$，$f[f(0)]=-2$，$f[f(1)]=-3$.

4. 求下列函数的反函数及其定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$；

(2) $y=2\sin 3x\quad x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$；

(3) $y=\frac{2^x}{2^x+1}$；

(4) $y=a\ln(bx-c)$；

(5) $y=\frac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$.

解 (1) $y=\sqrt{1-x^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}\quad(-2\leqslant x\leqslant 2)$.

(3) $y=\log_2\frac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$.

(4) $y=\frac{1}{b}(c+e^{\frac{x}{a}})\quad(-\infty<x<+\infty)$.

(5) $y=\frac{b-dx}{cx-a}\quad\left(x\neq\frac{a}{c}\right)$.

5. 求下列各题中所给函数构成的复合函数，再指出其定义域：

(1) $y=e^u$，$u=\sin x$；

(2) $y=\sqrt{u-1}$，$u=\lg x$；

(3) $y=u^2$，$u=\cos v$，$v=\frac{x-1}{x^2-5x+6}$；

(4) $y=a^u$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt[3]{w}$，$w=t^2-1$；

(5) $y=\arcsin u$，$u=1+e^x$

解 (1) $y=e^{\sin x}\quad(-\infty<x<+\infty)$.

(2) $y=\sqrt{\lg x-1}\quad(10\leqslant x<+\infty)$.

(3) $y=\cos^2\frac{x-1}{x^2-5x+6}\quad(-\infty<x<2)\cup(2<x<3)\cup(3<x<+\infty)$.

(4) $y=a^{\arctan\sqrt[3]{x^2-1}}\quad(-\infty<x<+\infty)$.

(5) 由于无论 x 取什么值，$u=1+e^x>1$，此时 u 值对 $y=\arcsin u$ 没有意义. 因此，$y=\arcsin u$ 与 $u=1+e^x$ 不能复合成复合函数.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=0$，$g[f(x)]=g(x)$，$f[f(x)]=f(x)$，$g[g(x)]=0$.

7. 下列函数中，哪些是复合函数？如是，它们是怎样合成的？

(1) $y=\arccos(5+x^3)$；　(2) $y=x^3\cdot 3^x$；

(3) $y=\cos^3\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)$；　(4) $y=\lg\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$；

(5) $y=\dfrac{x}{3}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x$；　(6) $y=\ln\sin\sqrt{3x^2+\dfrac{\pi}{4}}$.

解　(1) 是. $y=\arccos u$，$u=5+x^3$.

(3) 是. $y=u^3$，$u=\cos v$，$v=\dfrac{x^2+1}{2}$.

(4) 是. $y=\lg u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\dfrac{x-1}{x+1}$.

(6) 是. $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{w}$，$w=3x^2+\dfrac{\pi}{4}$.

(2)、(5)题的函数不是复合函数。

8. 根据极限定义证明(打“”的是可选题，以下各章同)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$ (用“ε-N”语言证明)；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$ (用“ε-X”语言证明)；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}(5x+2)=12$ (用“ε-δ”语言证明).

证　(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正整数 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时，

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}.$$

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $X=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2\varepsilon}}$. 当 $|x|>X$ 时，

$$\left|\frac{1+x^3}{2x^3}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1}{2x^3}\right|=\frac{1}{2|x|^3}<\frac{1}{2X^3}=\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

(3) 对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$. 当 $0<|x-2|<\delta$ 时，

$$|5x+2-12|=5|x-2|<5\delta=\varepsilon,$$

$$\lim_{x\to 2}(5x+2)=12.$$

9. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to -1}(3x^3-5x+2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2+1}{x^4-3x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3}$；　(6) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ (m,n 为自然数)；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}}$；

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)^2}{x^2+3}$；　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x-3)^2}{x^5+4}$；

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+5}{x^3-8x^2+1}$；　(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}$ ($a>0$)；

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；　(16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；

(17) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)$； (18) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-1}(3x^3-5x+2)=3\lim\limits_{x\to-1}x^3-5\lim\limits_{x\to-1}x+2=4$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2+1}{x^4-3x^2+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}(x^4-3x^2+1)}=\dfrac{3}{-1}=-3$.

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\infty\left(因为\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-3}=0\right)$.

(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=4$.

(5) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt[4]{x}-\sqrt{3})(\sqrt[4]{x}+\sqrt{3})}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

(6) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(3x^2+3xh+h^2)h}{h}=3x^2$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-(x+1)}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}(1-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}-1}=-\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x+1}=-1$.

(8) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(\sqrt{2x+1}^2-3^2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}^2-2^2)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$

$$=\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{4}{3}.$$

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1}=\dfrac{m}{n}$ (m,n 为自然数).

(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=2$.

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+1)^2}{x^2+3}=\infty$.

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^3(x-3)^2}{x^5+4}=8$.

(13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+5}{x^3-8x^2+1}=0$.

(14) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ax}-1}{e^{ax}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{e^{ax}}}{1+\dfrac{1}{e^{ax}}}=1\ (a>0)$.

(15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$.

(16) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

(17) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{3}{x^3+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x+1-3}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}=-1$.

(18) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

10. 下列函数在给定条件下，哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $\dfrac{1+2x^2}{x}\quad(x\to0)$； (2) $\dfrac{\sin x}{x}\quad(x\to\infty)$；

(3) $\lg x\quad(x\to0^+)$； (4) $2x+5\quad(x\to-\infty)$；

(5) $\dfrac{x+1}{x^2-4}$ $(x\to 2)$；　　(6) $1-\cos 2t$ $(t\to 0)$.

解 (2),(6)为无穷小;(1),(3),(4),(5)为无穷大.

11. x^2，$\dfrac{x^2-1}{x^3}$，e^{-x} 何时是无穷大？何时是无穷小？

解 $x\to\infty$ 时，$x^2\to\infty$，$\dfrac{x^2-1}{x^3}\to 0$；

$x\to+\infty$ 时，$e^{-x}\to 0$；

$x\to-\infty$ 时，$e^{-x}\to\infty$；

$x\to\pm 1$ 时，$\dfrac{x^2-1}{x^3}\to 0$；

$x\to 0$ 时，$x^2\to 0$，$\dfrac{x^2-1}{x^3}\to\infty$.

12. $x\to 1$ 时,下列函数中哪个是 $1-x$ 的高阶无穷小？哪个是 $1-x$ 的等阶无穷小？

(1) $(1-x)^{\frac{3}{2}}$；　(2) $\dfrac{1-x}{1+x}$；　(3) $2(1-\sqrt{x})$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\frac{1}{2}}=0$，所以当 $x\to 1$ 时，$(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 较 $1-x$ 为高阶无穷小.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1-x}{1+x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1-x}{1+x}$ 与 $1-x$ 是同阶无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(1-\sqrt{x})}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1+\sqrt{x}}=1$，所以当 $x\to 1$ 时，$2(1-\sqrt{x})$ 与 $1-x$ 等价，即 $2(1-\sqrt{x})\sim(1-x)$.

13. 设有函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+a)^2-a^2}{x}, & x<0,\\ x-2, & 0<x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}, & x>1.\end{cases}$$

(1) 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；　(2) a 为何值时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在；

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

解 (1)
$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+a)^2-a^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2ax}{x}=\lim_{x\to-\infty}(x+2a)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}=1.$$

(2) 因为
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-2)=-2,$$
$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+a)^2-a^2}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+2a)=2a,$$
所以

$a=-1$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

(3) 因为
$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-5x+4}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+2)}=-1,$$
$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=-1,$$
所以

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-1$.

14. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，试确定 a,b 的值.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b+1}{x+1}.$$

因为极限存在，所以 $1-a=0$，即 $a=1$，从而

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{-(1+b)x-b+1}{x+1}=-(1+b).$$

由给定条件知 $-(1+b)=0$，所以 $b=-1$.

15. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin4x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$；

(6) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{a}{2^n}(a\neq0)$；

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2\sin x}{x+\sin x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$；

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}$；

(12) $\lim\limits_{x\to0}(1+2\tan x)^{\cot x}$；

(13) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{x+2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{\sin4x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3x}{\frac{\sin4x}{4x}\cdot4x}=\frac{3}{4}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}}{\frac{\sin4x}{4x}}=\frac{3}{4}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin3x}{3x}\cdot\frac{3x}{\cos3x}}{\frac{\sin5x}{5x}\cdot5x}=\frac{3}{5}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to0}x=0$，而 $\sin\frac{1}{x}$ 为有界函数，即 $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$，所以

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

(5) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=2$.

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\frac{a}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\cdot a=a(a\neq0)$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x+2\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+2\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{3}{2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\sqrt{\sin\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}}=-1$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=e^k$.

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{1-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

(12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\tan x)^{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2\tan x)^{\frac{1}{2\tan x}}]^2=e^2$.

(13) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{-1}=e^{-1}$.

(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^3$.

*16. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}$ (n,m 为正整数)；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$；　(4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$；　(5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\sin(\Delta x)}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=A$ (A 为常数)，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=\begin{cases}0, & n>m,\\ 1, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$

(3)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^3 x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2 x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

(4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

(5) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\sin(\Delta x)}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

(6) 因为 $e^x-1\sim x(x\to 0)$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\sin x}{x(\sqrt{1+f(x)\sin x}+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f(x)=A,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2A$.

17. 判断下列函数在 $x=0$ 处的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x>0;\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x^2+1, & x>0.\end{cases}$

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^x=1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,$$

又

$$\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0),$$

所以

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在,因此,$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(3) 因为

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x-1)=-1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x^2+1)=1,$$

所以

$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在,因此,$f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

18. 确定下列函数的间断点,并指出它们属于哪类间断点,如属可去间断点,则补充函数的定义使其连续:

(1) $y=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$;　　(2) $y=\frac{x}{\sin x}$;

(3) $y=\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$;　　(4) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 2^x, & x>0;\end{cases}$　　(6) $y=\cos\frac{1}{x}$.

解　(1) $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$ (k 为整数)为无穷间断点,属第二类间断点.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}\frac{x}{\sin x}=\infty(k\neq0)$,$k=0$ 时,$\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$,所以 $x=k\pi$ ($k=\pm1,\pm2,\cdots$)为无穷间断点,属第二类间断点;$x=0$ 为可去间断点,属第一类间断点.

可补充定义 $y=\begin{cases}\frac{x}{\sin x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则此时 y 在 $x=0$ 点连续.

(3) 因为

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2,$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x-2}=\infty,$$

所以 $x=2$ 为无穷间断点,属第二类间断点;$x=1$ 为可去间断点,属第一类间断点

可补充定义 $y=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}, & x\neq1,\\ -2, & x=1,\end{cases}$ 则 y 在 $x=1$ 点连续.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,所以 $x=0$ 为可去间断点,属第一类间断点.

可补充定义 $y=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq0,\\ \mathrm{e}, & x=0,\end{cases}$ 则 y 在 $x=0$ 点连续.

(5) 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}y=\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-1)=-1$,$\lim\limits_{x\to0^+}y=\lim\limits_{x\to0^+}2^x=1$,所以 $x=0$ 为函数的跳跃间断点,属第一类间断点.

(6) 因为当 $x\to0$ 时,函数值在 -1 与 1 之间变动无限多次,所以 $x=0$ 为函数的振荡间断点,属第二类间断点.

19. 确定常数 A 的值,使下列函数在指定点处连续:

(1) $f(x)=\begin{cases}Ax^3, & x\geqslant1,\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处;

(2) $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq0,\\ A, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处;

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin Ax}{x}, & x\neq0,\\ 5, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处.

解 (1) 因为

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}Ax^3=A,\quad \lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(2x-1)=1,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续,则应满足

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=f(1)$,即

$$A=1=A\cdot1,$$

所以,$A=1$.

因此,当 $A=1$ 时,$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

(2) 因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{-1},$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则应满足

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0),\text{即 } e^{-1}=A.$$

因此当 $A=e^{-1}$时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(3) 因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin Ax}{x}=A,$$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则应满足

$$\lim_{x\to0}f(x)=f(0),\text{即 } A=5.$$

因此当 $A=5$ 时,$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

20. 根据初等函数的连续性,求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\tan\frac{\pi x}{4}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{\sin x}{x}$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\frac{\pi}{2}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\tan\frac{\pi x}{4}=(1^2+1)\tan\frac{\pi\cdot1}{4}=2$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=e^0=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+ax)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}]=\ln e^a=a$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)=\ln1=0$.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+1)-\ln n]\}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\ln e=1$.

21. 证明方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

证 令 $f(x)=x2^x-1$,则 $f(0)=-1<0$,$f(1)=1>0$.又因为 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,所以由根的存在定理得至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(\xi)=0$,即方程 $x2^x=1$ 至少有一根介于 0 和 1 之间.

22. 求证在区间$(0,2)$内至少有一点 x_0,使得 $e^{x_0}-2=x_0$ 成立.

证 令 $f(x)=e^x-2-x$,则 $f(0)=-1<0$,$f(2)=e^2-4>0$.又因为 $f(x)$ 在$[0,2]$上连续,所以由根的存在定理得至少存在一点 $x_0\in(0,2)$,使得 $f(x_0)=0$,即 $e^{x_0}-2-x_0=0$.故在区间$(0,2)$内至少有一点 x_0,使得 $e^{x_0}-2=x_0$ 成立.

三、增补习题解答

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 10x-12, & x>2,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

解 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，函数 $y=1-2x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1)$，其反函数为 $y=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}$；

当 $x\in[-1,2]$ 时，函数 $y=x^3$ 的值域为 $[-1,8]$，其反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，函数 $y=10x-12$ 的值域为 $(8,+\infty)$，其反函数为 $y=\dfrac{1}{10}(x+12)$，

所以

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & x<-1,\\ \sqrt[3]{x}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{1}{10}(x+12), & x>8.\end{cases}$$

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$.

解 由于

$$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\cdot\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2},$$

又因为

$$\left|-2\sin\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2,$$

故 $2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$ 为有界函数，而

$$0\leqslant\left|\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|<\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\to 0(x\to+\infty),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=0,$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})=0.$$

3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

解 由于 $\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(1+\dfrac{3}{x^2-2}\right)^{x^2}$，令 $\dfrac{x^2-2}{3}=u$，则 $x^2=3u+2$，于是

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u+2},$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{u\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{u}\right)^{3u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)^{2}\right]=e^3.$$

4. 适当选取 a，使函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 是连续函数.

解 显然，当 $x<0$ 时，$f(x)=e^x$ 是连续的；当 $x>0$ 时，$f(x)=a+x$ 也是连续的. 只需考察分界点 $x=0$ 处连续性. 因为在 $x=0$ 左、右两侧，函数表达式不同，要分别考察 $x=0$ 处左、右极限.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}e^x=e^0=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(a+x)=a.$$

因此，取 $a=1$，则

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)=1.$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 连续，于是 $f(x)$ 处处连续.

5. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解　将所讨论的序列适当放大和缩小.

因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

从本题可看出,无穷多个无穷小量相加,其和为 1. 可见,无限项的和与有限项的和有本质的差别.