Yan Yuan
燕园教育

2013 考研专家指导丛书

考研数学必做主观题600题精析（经济类）

清华大学 王欢
北京大学 王德军 主编
首都师范大学 童武

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威

严格按照最新考试大纲，突出重点

赠送MP3盘

考研名师童武教授

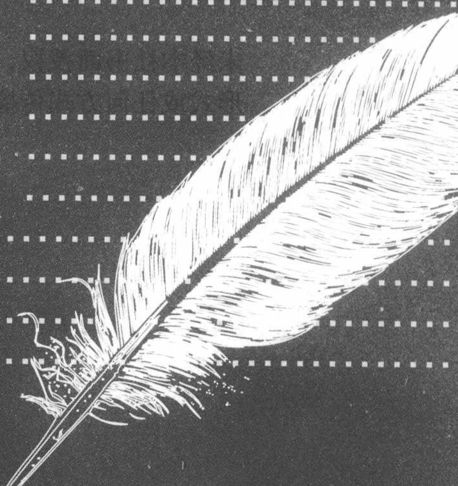
考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

Yan Yuan
燕园教育

2013
考研专家指导丛书

考研数学必做主观题600题精析（经济类）



清华大学 王 欢
北京大学 王德军
首都师范大学 童 武
主编

由多次参加命题及阅卷的专家亲自编写，内容系统、权威
严格按照最新考试大纲，突出重点

考研名师童武教授
赠送MP3盘 考研数学串讲视频+辅导讲义

中国石化出版社
HTTP://WWW.SINOPEC-PRESS.COM
教·育·出·版·中·心

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做主观题600题精析. 经济类 / 王欢，王德军，童武主编 .—北京：中国石化出版社，2012. 2
ISBN 978 -7 -5114 -1396 -3

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… ② 王… ③童… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 题解 Ⅳ. ①013 -44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 013246 号

中国石化出版社出版发行
地址:北京市东城区安定门外大街 58 号
邮编:100011　电话:(010)84271850
读者服务部电话:(010)84289974
http://www. sinopec-press. com
E-mail:press@ sinopec. com
北京科信印刷有限公司印刷
全国各地新华书店经销
*
787 × 1092 毫米 16 开本 12. 5 印张 304 千字
2012 年 3 月第 1 版　2012 年 3 月第 1 次印刷
定价:28. 00 元(赠送 MP3 盘)

前 言

中国加入WTO之后，改革开放逐步深化，经济发展速度日益加快，社会对科学技术、文化教育的需求不断向高层次迈进，我国对硕士研究生等高层次人才的需求越来越大，这方面的教育也在稳步发展，规模不断扩大、层次逐步齐全、教学质量不断提高、测试更加规范化，考生人数也在迅猛增加。

从测量学角度来说，全国硕士研究生入学统一考试应是"常模参照"考试，即选拔性考试。命题工作需坚持既有利于为国家选拔高层次的专门人才，又有利于高等学校教学的原则，强调在考查知识的基础上，重点考查考生分析问题和解决问题的能力，并且要采用科学的办法，保持考试水平的稳定性。

为了更好地帮助考生复习，顺利通过数学考试、赢取高分，我们根据国家教育部制订的最新考试大纲，基于多年参加阅卷和考研辅导班的教学实践经验，以及分析了近几年考题中的考点、难点、重点及命题套路，倾力推出这套考研专家指导丛书。本套丛书包括《考研数学历届真题权威解析(数学一)》、《考研数学历届真题权威解析(数学二)》、《考研数学历届真题权威解析(数学三)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学一)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学二)》、《考研数学历届真题考点与题型分类精解(数学三)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学一)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学二)》、《考研数学标准模拟试卷与精解(数学三)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学一)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学二)》、《考研数学最后冲刺超越135分(数学三)》、《考研数学名师名家高分复习全书(理工类)》、《考研数学名师名家高分复习全书(经济类)》、《考研数学名师名家高等数学辅导讲义》、《考研数学名师名家线性代数辅导讲义》、《考研数学名师名家概率论与数理统计辅导讲义》、《考研数学最新精选1000题(理工类)》、《考研数学最新精选1000题(经济类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(理工

类)》、《考研数学必做客观题1800题精析(经济类)》、《考研数学必做主观题600题精析(理工类)》和《考研数学必做主观题600题精析(经济类)》。

本套书的编写特点如下:

1. 配合最新考试大纲,反映最新变化

本书在严格遵循最新考试精神和最新考试大纲要求的基础上,力求反映最新考试要求,紧扣全国硕士研究生入学数学考试的脉搏。

2. 注重考试技巧、高效突破难关

本书精辟阐明解题思路,全面展现题型变化,为考生全程领航和理性分析,引领考生高效通过考试难关。考生可以利用本套冲刺试卷进行考前模拟实战训练,检验自己的学习成果,及时进行查漏补缺,有针对性地进行复习备考。希望考生能在仿真的环境下进行模拟训练,这样效果最佳。

3. 教授亲自主笔,编写阵容强大

本书由一线专家和教授亲自编著。编者多年来一直从事考研数学的考前辅导工作,积累了丰富的教学辅导经验,对历年考试情况比较了解,对考生在复习和考试过程中可能遇到的问题把握得比较准确。

尽管在编写过程中经历了严格的编审程序,力求达到完美,但限于时间和水平,仍可能存在不足,纰漏之处希望广大考生和专家批评、指正。

编　者

目　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限与连续

1. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

【解析】

属 1^∞ 型

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[1+(\cos\sqrt{x}-1)]^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)}$

由于
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\pi}{x}(\cos\sqrt{x}-1)=\pi\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

故原式 $=e^{-\pi/2}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-x+x^2/2)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$.

【解析】 方法 1

$$\because\quad\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x=\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]=1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x^3}=(1+x^3)^{1/2}=1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

$$\therefore\qquad\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-\sqrt{1+x^3}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left[1+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-\left[1+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=-\frac{1}{3}$$

方法 2

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-(1+x^3)^{1/2}}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x-1}{x^3}-\lim_{x\to0}\frac{(1+x^3)^{1/2}-1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-1)e^x+\left(1-x+\frac{x^2}{2}\right)e^x}{3x^2}-\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{6x^2}e^x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$$

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

【解析】这是 n 项和式和极限，当各项分母均相同是 n 时，n 项和式

$$x_n=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

是函数 $\sin\pi x$ 在$[0, 1]$区间上的一个积分和，于是可由定积分 $\int_0^1 \sin\pi x\mathrm{d}x$ 求得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n$.

为了求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{i}}$，首先通过放缩化简 n 项和数列：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+0};$$

由于
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

据夹逼准则，有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\dfrac{i\pi}{n}}{n+\dfrac{1}{i}}=\frac{2}{\pi}$$

4. 设 $x_1=10$，$x_{n-1}=\sqrt{6+x_n}(n+1, 2, \cdots)$，试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限.

【证明】首先，显然有 $x_n>0$，$\{x_n\}$有下界.

证明 x_n 单调减：用归纳法. $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1$；设 $x_n<x_{n-1}$则

$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n$

由此，x_n 单调减. 由单调查有界准则，$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，求 a：在恒等式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$两边取极限，得 $a=\sqrt{6+a}$取得 $a=3$($a=-2$ 舍去，因为 $x_n>0$，$a\geqslant0$).

5. 设$f(x)=\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，$a_i\neq1$，$i=1$，$\cdots$，$n$.

求：(Ⅰ)$\lim\limits_{x\to0}f(x)$；(Ⅱ)$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

【解析】(Ⅰ)$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\exp\left[\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}\right]$$

$$=\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

(Ⅱ)记 $a=\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$

则
$$a\left(\frac{1}{n}\right)^{1/x}=\left(\frac{a^x}{n}\right)^{1/x}\leqslant f(x)\leqslant\left(\frac{na^x}{n}\right)^{1/x}=a$$

而
$$\lim_{x\to+\infty}a\left(\frac{1}{n}\right)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}a=a$$

∴
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a=\max(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

6. 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$$

的反函数及其定义域.

【解析】(1) 在区域$(-\infty,1)$内，$y=x$的反函数就是它本身，又因函数$y=x$的值域为$(-\infty,1)$，故其反函数$x=y$的定义域也为$(-\infty,1)$，于是有$y=f^{-1}(x)=x(-\infty<x<1)$.

(2) 在区间$[1,4]$上由$y=x^2$解出$x=\pm\sqrt{y}$，因$x\in[1,4]$，故$x=\sqrt{y}$，又函数的值域为$[1,16]$，故其反函数定义域为$[1,16]$. 于是$y=f^{-1}(x)=\sqrt{x}(1\leqslant x\leqslant 16)$.

(3) 在区间$(4,+\infty)$上由$y=2^x$解出$x=\log_2 y$. 因函数$y=2^x$的值域为$(16,+\infty)$，故其反函数定义域为$(16,+\infty)$，于是$y=\log_2 x(16<x<+\infty)$.

综上所述，所求反函数也是一分段函数，它的表达式为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$$

7. 证明：函数$f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

【证明】利用不等式$2|ab|\leqslant a^2+b^2$，有

$$|f(x)|\leqslant 1+\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|\leqslant 2$$

故$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有界.

8. 设$f(x)$满足$af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中$a$，$b$，$c$是常数，且$|a|\neq|b|$. 试证：$f(x)$是奇函数.

【证明】在所给方程中，用$\dfrac{1}{x}$代替x得：$af\left(\dfrac{1}{x}\right)+bf(x)=cx$，联立原方程，消去$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx$$

又$|a|\neq|b|$，所以$f(x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}\left(\dfrac{a}{x}-bx\right)$. 将$-x$代入$f(x)$表达式得

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=-\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x)$$

所以$f(x)$为奇函数.

9. 设$f(x)$是在$(-\infty,+\infty)$上以T为周期的连续函数.

(1) 如果$f(x)$是奇函数，则函数$F(x)=\int_0^x f(x)\mathrm{d}t$也是以$T$为周期的周期函数；

(2) 如果$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则函数$G(x)=\int_a^x f(t)dt$可表示成线性函数与以$T$为周期的周期函数之和.

【证明】(1)由周期函数及奇函数的积分性质，得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{x}f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)$$

所以，$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x)=\int_a^x[f(t)-k+k]\,\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\,\mathrm{d}t+k(x-a)$$

由于 $k(x-a)$ 是线性函数，所以只需证明当 k 取某一值时 $g(x)=\int_a^x[f(t)-k]\,\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质，得

$$g(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\,\mathrm{d}t=\int_a^{x}[f(t)-k]\,\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\,\mathrm{d}t$$

$$=g(x)+\int_0^{T}f(t)\,\mathrm{d}t-kT$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $g(x+T)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

10. 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x)\,(a^2\neq1)$，其中 $\varphi(x)$ 是已知函数，在 $x\neq1$ 时有定义，求 $f(x)$ 的表达式.

【解析】题中给出了关于 $f(x)$ 及 $f(x)$ 的一个复合函数的等式，此类题目的解法一般是利用变量代换，设法得到一个方程组，然后解出 $f(x)$. 为此，令 $t=\frac{x}{x-1}$，则 $x=\frac{t}{t-1}$，代入原等式得

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right)$$

于是得到关于 $f(x)$，$f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ 的二元一次方程组：

$$\begin{cases}f\left(\frac{x}{x-1}\right)-af(x)=\varphi(x),\\ f(x)-af\left(\frac{x}{x-1}\right)=\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right),\end{cases}$$

解得 $f(x)=\frac{1}{1-a^2}\left[a\varphi(x)+\varphi\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$

11. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)$.

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\,\pi)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin[(\sqrt{n^2+1}-n)\pi+n\pi]$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$$

这里用到当 $n\to\infty$ 时，$\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\sim\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to0\,(n\to\infty)$，又 $|(-1)^n|=1$ 是有

界量，根据有界量乘无穷小仍是无穷小量知$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2+1}\pi)=0$.

12. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

【解析】由于

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2},$$

又因为$\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$，且

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$$

根据有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小，所以

原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$

13. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}(m,\ n\in N^*)$.

【解析】因当$x\to 0$时，$\ln(1+x^n)\sim x^n$，$\ln^m(1+x)\sim x^m$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^n)}{\ln^m(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{x^m}=\begin{cases}\infty, & n<m,\\ 1, & n=m,\\ 0, & n>m\end{cases}$$

14. 设$x_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解析】因为$\dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+1}\leqslant\dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n+\frac{k^2}{n^2}}\leqslant\dfrac{e^{\frac{k+1}{n}}}{n}(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$，所以

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}\leqslant x_n\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}$$

又因为

$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=e^{\frac{1}{n}}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}},\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1-e)e^{\frac{1}{n}}\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}=e-1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=1\cdot(e-1)=e-1$$

由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e-1$

15. 求$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdots(10+n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$.

【解析】令$x_n=\dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdots(10+n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}$，则$0<x_n=\dfrac{11}{1}\cdot\dfrac{12}{2}\cdot\dfrac{13}{5}\cdots\dfrac{10+n}{3n-4}\cdot\dfrac{1}{3n-1}$

显然，当$n>7$时就有$3n-4>10+n$，此时(即当$n>N=7$时)

$$0<x_n<\frac{C}{3n-1},$$

其中 $C=\frac{11}{1}\cdot\frac{12}{2}\cdot\frac{13}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{17}{17}$. 若取 $y_n=0$, $z_n=\frac{C}{3n-1}$, 则 $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$，故所求极限为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

16. 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$.

【解析】原式 $=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(1-x^{x-1})}{1-x+\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x[1-e^{(x-1)\ln x}]}{1-x+\ln x}$

$$=-\lim_{x\to1}\frac{x[e^{(x-1)\ln x}-1]}{1-x+\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{-x(x-1)\ln x}{1-x+\ln x}$$

（因 $e^{(x-1)\ln x}-1\sim(x-1)\ln x$，$x\to1$ 时）

$$\xlongequal{\text{洛必达}}-\lim_{x\to1}\frac{(2x-1)\ln x+(x-1)}{(1/x)-1}=-\lim_{x\to1}\left[\frac{(2x^2-x)\ln x+x(x-1)}{1-x}\right]$$

$$=1-\lim_{x\to1}\frac{(2x^2-x)\ln x}{x-1}\xlongequal{\text{洛必达}}1-\lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln x+(2x-1)}{-1}$$

$$=1+\lim_{x\to1}[(4x-1)\ln x+(2x-1)]=1+1=2$$

17. 求 $\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1-\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}}{\varphi^2}$（$n$ 为正整数）.

【解析】原式 $\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{\varphi\to0}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varphi}{\varphi}+\frac{2}{\cos2\varphi}\frac{\sin2\varphi}{2\varphi}+\cdots+\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\right)\right.$

$$\left.\cdot\cos\varphi\sqrt{\cos2\varphi}\cdots\sqrt[n]{\cos n\varphi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(1+2+\cdots n)=\frac{n(n+1)}{4}$$

18. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

【解析】利用 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$，分别取 $n=1, 2, \cdots$，求和得 $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

故 $$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$$

19. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$.

【解析】设 $x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$. 因为 $x_{n+1}=x_n\cdot\frac{2n+1}{2n+2}<x_n$，且 $x_n>0$，所以由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

又因为

$$\frac{1}{x_n}=\frac{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}>\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=x_n\cdot(2n+1),$$

即 $x_n^2<\dfrac{1}{2n+1}$，所以 $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

20. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

【解析】先将 n 项乘积化简为下述形式：

$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n}=2^{[1-(1/2)^n]}$，

再在上式两端求极限，得到

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2})=\lim_{n\to\infty}2^{[1-(1/2^n)]}=2$$

21. 已知 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2+ax+b}=1$，求 a 与 b 的值.

【解析】因为 $x\to1$ 时，$\sin(x-1)\sim x-1$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2+ax+b}=1$. 又因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$. 由此得 $1+a+b=0$. 把 $b=-1-a$ 代入原式得

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1+a)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1+a}=1$$

因为 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to1}(x+1+a)=0$，故得 $a=-2$，$b=1$.

22. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\ln(1+x^2)}{x\sin x^n}=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x^n}{e^{x^2}-1}=0$，求正整数 n 的值.

【解析】用等价无穷小代换分别得到：

$$\lim_{x\to0}\frac{(x^2/2)\cdot x^2}{x\cdot x^n}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^{3-n}=0,\quad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot x^n}{x^2}=\lim_{x\to0}x^{n-1}=0,$$

因而 $3-n>0$，$n-1>0$. 由 $1<n<3$ 得 $n=2$.

23. 已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求常数 a 和 b 的值.

【解析】因为分母为 x^2，将 $\ln(1+x)$ 展至2阶带拉格朗日型余项的麦克劳林公式：

$$\ln(1+x)=x-(1/2)x^2+o(x^2),$$

则

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x-(1/2)x^2+o(x^2)-(ax+bx^2)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-a)x-(1/2+b)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$$

于是必有 $1-a=0$，$-(1/2+b)=2$，解之得：$a=1$，$b=-5/2$.

24. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 问 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处是否连续？

【解析】注意到 $\lim\limits_{x\to0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$，应先计算 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的左、右极限：

$$f(0+0)=\lim_{x\to0+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{1-(1/2^{\frac{1}{x}})}{1+(1/2^{\frac{1}{x}})}=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-1$$

因 $f(0+0)\neq f(0-0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限不存在，因而在 $x=0$ 处不连续.

25. 试确定 a，b 的值，使 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 和可去间断点 $x=1$.

【解析】(1) 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，则必要求

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty，即\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{(-a)(-1)}{e^0-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

因此，当 $a=0$，$b\neq 1$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点.

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 存在. 因为

$$\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=e\left(e^{x-1}-\frac{b}{e}\right)/[(x-a)(x-1)],$$

又当 $x\to 1$ 时，$x-1\to 0$，$e^{x-1}-1\sim x-1$，所以当 $b=e$ 时，有

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(e^{x-1}-1)}{(x-a)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{e(x-1)}{(x-a)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e}{x-a}=\frac{e}{1-a}$$

第二章　导数与微分

1. 设$f''(x)<0$，$f(0)=0$，证明对任何$x_1>0$，$x_2>0$，有$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

[证法一]用拉格朗日中值定理证，不妨设$x_2>x_1>0$，要证的不等式是

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$$

在$[0,\ x_1]$上用中值定理，有

$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1$，$0<\xi<x_1$；

在$[x_2,\ x_1+x_2]$上用中值定理，又有

$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1$，$x_2<\eta<x_1+x_2$；

由$f''(x)<0$，$f'(x)$单调减，而$\xi<x_1<x_2<\eta$，有$f'(\xi)>f'(\eta)$. 由此，

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1)$$

[证法二]作为函数不等式来证明. 要证

$$f(x_1+x),\ f(x_1)+f(x),\ x>0$$

令$\varphi(x)=f(x_1)+f(x)+f(x)-f(x_1+x)$，则$\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$

由$f''(x)<0$，$f'(x)$单调减，$f'(x)>f'(x_1+x)$，$\varphi'(x)>0$，由此，

$\varphi(x)>\varphi(0)=f(x_1)+f(0)-f(x_1)=0(x>0)$，改$x$为$x_2$即得证.

2. 证明方程$\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$在区间$(0,\ +\infty)$内有且仅有两个不同实根.

【证明】

记$k=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x\mathrm{d}x}>0$，方程化为$\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-k$

令$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. 由$f'(x)=0$解得唯一驻点$x=\mathrm{e}$，且$f'(x)$在此由正变负，$x=\mathrm{e}$是极大点也是最大点，最大值为$f(\mathrm{e})=k>0$；又由$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，知$f(x)$在$(0,\ \mathrm{e})$与$(\mathrm{e},\ +\infty)$各有且仅有一个零点，即$f(x)$在$(0,\ +\infty)$有且仅有两个零点.

3. 设$f(x)$在$[a,\ b]$上可导，且$f'(x)\leqslant M$，$f(a)=0$，证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2.$$

【证明】

由题设对$\forall x\in[a,\ b]$，可知$f(x)$在$[a,\ b]$上满足拉氏微分中值定理，于是有

$$f(x)=f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a),\ \xi\in(a,\ x)$$

$\because\ f'(x)\leqslant M$，$\therefore\ f(x)\leqslant M(x-a)$. 由定积分比较定理，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2$$

4. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

【证明】利用拉格朗日中值定理可得到结果：由 $f(x)\neq c$，有 $f(x)\neq f(a)$. 因而 $\exists x_0\in(a, b)$，$f(x_0)\neq f(a)$

若 $f(x_0)>f(a)=f(b)$，在 $[a, x_0]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists \xi\in(a, x_0)\subset(a, b)$，

$$f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0;$$

若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$，在 $[x_0, b]$ 上使用拉格朗日中值定理，则 $\exists \xi\in(x_0, b)\subset(a, b)$，

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$$

5. 假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在二阶导数，并且

$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间 (a, b) 内 $g(x)\neq 0$;

(2) 在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

【证明】(1)反证法. 假设 $\exists c\in(a, b)$，使 $g(c)=0$，则由罗尔定理，$\exists \xi_1\in(a, c)$ 与 $\xi_2\in(c, b)$，使 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$；从而由罗尔定理，又 $\exists \xi\in(\xi_1, \xi_2)\subset(a, b)$，$g''(\xi)=0$. 这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾.

(2) 即证 $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$ 在 (a, b) 存在零点，注意

$$f(x)g''(x)-f''(x)g(x) 在 (a, b)=(f(x)g'(x)-f'(x)g(x))',$$

考察 $f(x)g''(x)-f''(x)g(x)$ 在 (a, b) 的原函数，令

$\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，$\Rightarrow\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 可导，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 由罗尔定理，$\exists \xi\in(a, b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$.

亦即

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

6. 试证明方程 $xe^{2x}-2x-\cos x=0$ 有且仅有两个实根，并且是一正、一负.

【证明】利用零点存在定理及导数的性质.

令 $F(x)=xe^{2x}-2x-\cos x$，有

$F(0)=-1<0$，$F(1)=e^2-2-\cos 1>0$，$F(-1)=-e^{-2}+2-\cos 1>0$，

所以在 $(-1, 0)$ 与 $(0, 1)$ 内，$F(x)=0$ 各至少有一实根，$f'(x)=2xe^{2x}+e^{2x}-2+\sin x$，故当 $x<-1$，$f'(x)<0$，而 $F(-1)>0$，故在 $(-\infty, -1)$ 内，$F(x)=0$ 无实根. $F''(x)=4xe^{2x}+4e^{2x}+\cos x$，可见在 $(-1, +\infty)$ 内 $f''(x)>0$，所以在 $(-1, +\infty)$ 内 $f(x)=0$ 至多有两个实根，而前面已证 $F(x)=0$ 至少有两个实根. 故 $F(x)=0$ 有且仅有两个实根，且一正一负.