大学数学应用与提高丛书

丛书主编 蔡光兴 李子强

概率统计——应用与提高（第二版）

方 瑛 费锡仙 主编

y x z

科学出版社

大学数学应用与提高丛书

丛书主编　蔡光兴　李子强

概率统计应用与提高

（第二版）

方　瑛　费锡仙　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为《大学数学应用与提高丛书》之一，是根据全国高等工科学校概率论与数理统计课程教学大纲和研究生入学考试大纲要求编写的概率论与数理统计课程辅助教材. 全书共十一章，第一至五章为概率论部分，第六至十章为数理统计部分，第十一章为 SAS 系统简介. 每章含教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题，并附有参考答案.

本书具有丛书的共同特点：重视数学方法，注重学生应用能力的培养与提高，通过典型例题介绍各种解题思路、方法和计算技巧，通过内容提要、疑难解答帮助读者把概率论与数理统计中的概念融会贯通，通过内容应用与提高、练习题与自测题训练，进一步拓宽解题思路，提高综合应用能力.

本书为高等学校本、专科学生的概率论与数理统计课程辅助教材，也可供成人教育和自学概率论与数理统计的学生学习使用，对报考硕士研究生的考生来说，本书无疑具有重要的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计应用与提高/方瑛，费锡仙主编. —2 版. —北京：科学出版社，2012.9
(大学数学应用与提高丛书)
ISBN 978-7-03-035522-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①方… ②费… Ⅲ. ①概率统计—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 209791 号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：蔡 莹
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

南京展望文化发展有限公司排版
武汉市科利德印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16
2012 年 8 月第 二 版 印张：16 1/4
2012 年 8 月第一次印刷 字数：395 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

《概率统计应用与提高》出版以来，深受广大师生喜爱. 本书的体系结构科学合理、例题经典丰富，既适合初学者巩固提高，也适合考研学生使用.

这次再版，依照新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和研究生入学考试大纲对内容提要进行了部分重写；参考近几年的研究生考试题目，对典型例题、应用与提高部分的例题进行了更新和补充；对练习题做了适当删减、自测题做了部分调整，方便学生得到更多阶梯式的帮助.

本书由方瑛、费锡仙任主编，黄斌、常涛、杨金娥任副主编. 各章编写人员如下：第一、五章，费锡仙、杨金娥；第二章，常涛；第三章，蔡振锋；第四章，董秀明；第六章，万祥兰；第七章，陈洁；第八章，李家雄；第九章，熊淑艳、张水坤；第十章，黄斌；第十一章，胡二琴. 此外费锡仙、常涛、李家雄、万祥兰、董秀明、胡二琴对本书进行了校对和整理工作. 最后由李逢高、方瑛、费锡仙统稿并定稿.

限于编者水平，书中疏漏和错误在所难免，恳请同行和读者不吝指正.

编　者

2012 年 7 月

前　言

《大学数学应用与提高丛书》是与高等学校学生必修的三门大学数学课程：高等数学、线性代数、概率论与数理统计相配套的辅助教材. 编写这套丛书主要基于三方面的原因：第一，高等教育改革的实施，这三门大学数学课程授课时数在减少，受到时间的限制，概念的深入探讨、知识的融会贯通、知识面的扩展必受到一定影响，因此，学生们渴望有一套弥补上述不足、切合实际的辅助教材；第二，后续课程及研究生入学考试对三门大学基础数学课程在教学大纲范围内有深化趋势，因此，对大批报考硕士研究生的学生而言，他们渴望有一套针对性强的考研复习资料；第三，进入 21 世纪，社会对人才提出了更高要求，大学数学教育的作用不再仅仅是学习基础知识，为后续课程或其他科学打基础、提供工具，更重要的是传授数学思路、数学方法，培养学生的创新意识，提高学生的数学素养、数学思维能力、计算数学能力和应用数学能力. 为此，我们组织了一批有着丰富教学经验和开拓创新精神的教师编写了这套辅助教材. 丛书分三册：《高等数学应用与提高》、《线性代数应用与提高》、《概率统计应用与提高》，丛书主编为蔡光兴、李子强，副主编为郑列、朱永松. 在内容上，丛书各册每章含有：

（1）教学基本要求. 每章教学的基本要求.

（2）内容提要. 每章基本概念、理论、方法的归纳，在学习或复习中起提纲挈领的作用.

（3）典型例题. 根据章节知识点，给出若干典型例题，介绍各种解题思路、方法和计算技巧. 通过例题，使读者做到举一反三，提高独自解题能力.

（4）疑难解答. 提出若干疑难问题，并给予解答，帮助读者正确理解概念、理论与方法，培养学生正确思考问题、解决问题的能力.

（5）应用与提高. 结合本章知识内容，给出在实际应用中的实例及本章中难度较高的综合题或研究生考试题.

（6）练习题. 作为基本训练，训练学生各种能力.

（7）自测题. 用于自我检测，及时了解自己的水平.

（8）上机实验. 上机实验都集中放在书末，学生可在教师指导下上机练习，或自学用，以增强学生计算应用能力.

本套丛书具有如下共性：

（1）立足基础. 通过教学要求、内容提要、典型例题、疑难解答，使学生对本章所要求掌握的基本概念、基本方法做到融会贯通.

（2）重视数学思想方法、综合应用数学能力的训练与培养. 通过典型例题、提高题、训练题来培养学生的数学解题能力和数学知识的综合运用能力.

（3）突出应用与数学建模思想. 通过实例，培养学生将实际问题转化为数学问题的数学建模能力，并运用数学知识加以解决的应用能力.

（4）设置了数学实验，注重数学软件在高等数学、线性代数、概率统计中的操作与应用，

以提高学生学习兴趣,培养学生运用软件与数学知识解决实际问题的能力.

《概率统计应用与提高》作为《大学数学应用与提高丛书》之一,具有丛书的共同特点与章节编写体系,按通用的教材内容,结合教材与教学改革的需要,展开编写,每章含教学基本要求、内容提要、典型例题、疑难解答、应用与提高、练习题与自测题,并在书末专门用一章讲述统计应用与实验.通过这些内容的教学,使学生对基本概念、基本方法做到融会贯通,并能将实际问题转化为数学模型,提高学生运用数学知识与数学软件解决实际问题的能力及综合运用能力.

本书由李逢高、方瑛主编,刘磊、许松林任副主编.各章编写人员如下:第一章,李逢高、费锡仙;第二章,方瑛、耿亮;第三章,朱永松、黄毅;第四章,杨策平、肖岸纯;第五章,周启元、李逢高;第六章,方瑛、熊淑艳;第七章,刘磊、李家雄;第八章,李子强、张水坤;第九章,郑列、张凯凡;第十章,黄斌、熊苹;第十一章,许松林、蔡光兴.蔡振峰、常涛、贺方超等年轻教师参与了习题部分的编写及习题答案的校对工作.最后由蔡光兴、李逢高、方瑛统稿,蔡光兴定稿.

由于编者水平有限,时间仓促,书中疏漏和不足之处在所难免,恳请读者和专家批评指正,以便再版时予以修正.

编　者

2005 年 1 月

目　录

第一章　随机事件和概率

一、教学基本要求

(1) 理解随机事件的概念,了解样本空间的概念,掌握事件的关系与运算.

(2) 理解概率、条件概率的概念,掌握概率的基本性质,会计算古典类型概率和几何型概率,掌握概率的加法公式、乘法公式、减法公式、全概率公式以及贝叶斯公式(也称逆概公式).

(3) 理解事件的独立性的概念,掌握用事件独立性进行概率计算;理解独立重复试验的概念,掌握事件的概率计算方法.

二、内容提要

(一) 随机试验与随机事件

1. 随机现象

在个别实验或观察中其结果呈现不确定性,在大量重复试验中其结果具有统计规律性的现象.

2. 随机试验

具有下列 3 个特点的试验称为随机试验(简称试验),一般记为 E:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个,而每次究竟会出现哪一个结果在试验之前不能确定.

(3) 事先知道试验可能出现的所有结果.

3. 样本点与样本空间

随机试验 E 的每一个可能结果称为一个样本点,一般记为 w_i ($i=1, 2, \cdots, n$ 或 $1, 2, \cdots$).

随机试验 E 的所有可能结果构成的集合称为样本空间,一般记为 Ω.

样本空间可以是数集,也可以不是数集;样本空间可以是有限集,也可以是无限集;样本空间的元素是由试验的目的所确定的.

4. 随机事件

样本空间 Ω 的子集称为随机试验 E 的随机事件(简称事件),一般记为 $A, B, C, \cdots$ 或 $A_1, A_2, \cdots$.

特别地,$\varnothing$ 称为不可能事件;Ω 称为必然事件;只含有一个样本点的集合称为随机试验 E 的一个基本事件.

注: 严格地说,事件是指 Ω 中满足某些条件(统计规律性)的子集. 当 Ω 是由有限个元素或无穷可列个元素组成时,每个子集都可作为一个事件. 若 Ω 是由不可数无限个元素组成

时,某些子集必须排除在外. 只是这种不可容许的子集在实际中几乎不会遇到,今后讲的事件都指容许考虑的那种子集.

5. 事件的关系和运算

(1) 事件的包含. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 包含于事件 B,记为 $A \subset B$.

(2) 事件相等. 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,同时事件 B 的发生也导致事件 A 发生,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A = B$.

(3) 事件的并. 事件 A 与 B 至少发生一个而构成的事件 C 称为 A 与 B 的并,记为

$$C = A \cup B$$

(4) 事件的交. 事件 A 与 B 同时发生而构成的事件 D 称为 A 与 B 的交,记为

$$D = A \cap B \quad 或 \quad D = AB$$

(5) 事件的差. 事件 A 发生同时 B 不发生而构成的事件 H 称为 A 与 B 的差,记为

$$H = A - B$$

(6) 事件的互不相容(或互斥). 在同一次试验中事件 A 与 B 不能同时发生称为事件 A 与 B 互不相容或互斥,记为 $A \cap B = \varnothing$.

特别地,对于事件 A, B, C,若 $AB = \varnothing$, $AC = \varnothing$, $BC = \varnothing$,则称事件 A, B, C 两两互不相容.

显然若 A, B, C 两两互不相容一定有 $ABC = \varnothing$.

(7) 对立事件. 如果 $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \varnothing$,即每次试验,事件 A, B 中必有一个发生且仅有一个发生,则称事件 A 与 B 对立,或称 B 与 A 互为的对立事件,记为

$$B = \bar{A} \quad 或 \quad A = \bar{B}$$

显然 $\bar{B} = \bar{\bar{A}} = A$.

(二) 频率和概率

1. 统计概率(频率)

在相同条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数,比值 n_A/n 称为事件 A 发生的频率,也称为统计概率,记为 $f_n(A)$.

频率 $f_n(A)$ 具有下列基本性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$

(2) $f_n(\Omega) = 1$

(3) 若 A_1, A_2, …, A_k 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

2. 概率

概率是用来度量随机事件发生的可能性的一个数值,从经典概率观来说,概率就是频率稳定性,离开了大量重复试验,就不能理解概率.

定义 1　设 E 是随机试验,Ω 是它的样本空间,对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数 $P(A)$,称为事件 A 的概率, $P(\cdot)$ 满足下列三条:

(1) $P(A) \geqslant 0$, A 为任一事件.

(2) $P(\Omega)=1$

(3) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$是两两互不相容的事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

这个性质称为概率的可列可加性.

3. 概率的性质

(1) $P(\varnothing)=0$, $\varnothing$是不可能事件.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互不相容,则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

这个性质称为概率的有限可加性.

(3) 对任何事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

(4) 对任何事件 A,有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(5) 对任意两事件 A, B,总有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)$$

特别地若 $A \subset B$,则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$,且 $P(A) \leqslant P(B)$.

(6) 对任意两事件 A, B,有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

对任意事件 A, B, C,有

$$\begin{aligned}&P(A \cup B \cup C)\\=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)\end{aligned}$$

此结论可以推广.

(三) 古典概型(等可能概型)及几何概型

1. 古典概型

定义 2　若随机试验 E 满足下列两个特点:

(1) 试验 E 的样本空间 Ω 的元素只有有限个,即

$$\Omega=\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$$

(2) 试验 E 中每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P\{w_1\}=P\{w_2\}=\cdots=P\{w_n\}$$

这类随机试验称为古典型随机试验,研究古典型随机试验的数学模型称为古典概型.

2. 概率的古典定义

定义 3　在古典概型中,如果样本空间 Ω 的基本事件总数为 n,事件 A 包含的基本事件数为 k,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中包含的基本事件总数}}$$

3. 古典概型计算中常用的排列组合知识

排列：

(1) 在有放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列，其排列总数为 n^r 种.

(2) 在不放回选取中，从 n 个元素中取出 r 个元素进行排列，其排列总数为 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$，记为 P_n^r或 A_n^r.

组合：

(1) 从 n 个元素中取出 r 个元素而不考虑其次序，称为组合，其总数为 $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，记为$\dbinom{n}{r}$或 C_n^r.

(2) 把 n 个不同的元素分为 k 个部分，第 1 部分 r_1 个，第 2 部分 r_2 个，…，第 k 部分 r_k 个且 $r_1+r_2+\cdots+r_n=n$，则所有分法总数为$\dfrac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$.

(3) 若 n 个元素有 n_1 个具有特征"1"，n_2 个具有特征"2"，…，n_k 个具有特征"k"，且

$$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$$

则从这 n 个元素中取出 r 个使具有特征"i"的元素有 r_i $(1\leqslant i\leqslant k)$ 个，且

$$r_1+r_2+\cdots+r_k=r$$

则所有取法总数为 $\dbinom{n_1}{r_1}\dbinom{n_2}{r_2}\cdots\dbinom{n_k}{r_k}$.

乘法原理 某过程可以分成甲、乙两个阶段分段进行，进行甲阶段有 m 种方法，进行乙阶段有 n 种方法，那么完成整个过程有 $m\times n$ 种方法.

加法原理 某过程可用甲、乙两种途径各自独立完成，完成甲种途径有 m 种方法，完成乙种途径有 n 种方法，那么完成整个过程有 $m+n$ 种方法.

4. 几何概型

定义 4 若随机试验 E 满足下列两个特点：

(1) 试验 E 的样本空间 Ω 的元素组成 m 维空间中的一有界区域，例如 Ω 是直线上某个有限区间、平面或空间上某个度量有限的平面或空间区域等；

(2) 试验 E 中每个基本事件发生的可能性相同即样本空间 Ω 中每个样本点的发生具有某种等可能性.

这类随机试验称为几何型随机试验，研究几何型随机试验的数学模型称为几何概型.

5. 概率的几何定义

定义 5 在几何概型中，记 $L(\Omega)$ 和 $L(D)$ 分别表示 Ω 和 D 的 m 维体积(一维体积是长度，二维体积是面积，三维体积是普通的体积)，记事件 A 表示"在区域 Ω 中随机地取一点，而该点落在 Ω 的某子区域 D 中"，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{L(D)}{L(\Omega)}$$

这种概率称为几何概率.

$$\Omega = \{H, T, HH, HT, TH, TT, HHT, \cdots\}$$
$$A = \{TH, TTTH, TTTTTH, \cdots\}$$

例 2　一个工人生产了 4 个零件，记 A_i 表示他生产的第 i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 个零件是正品，利用事件的关系与运算表达下列事件：

(1) A："没有一个零件是次品"；

(2) B："至少有一个零件是次品"；

(3) C："仅仅只有一个零件是次品"；

(4) D："至少有两个零件不是次品"。

解　(1)
$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \bigcap_{i=1}^{4} A_i$$

(2) 显然 B 与 A 互为对立事件，即
$$B = \overline{A} = \overline{\bigcap_{i=1}^{4} A_i} = \bigcup_{i=1}^{4} \overline{A}_i$$

(3)
$$C = \overline{A}_1 A_2 A_3 A_4 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 A_4 \cup A_1 A_2 \overline{A}_3 A_4 \cup A_1 A_2 A_3 \overline{A}_4 = \bigcup_{i=1}^{4} \left[\overline{A}_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} A_j \right) \right]$$

(4) D 的对立事件 $\overline{D}$ 为"至多一个正品"，即："没有一个正品"或"仅仅只有一个正品"，也即
$$\overline{D} = \left(\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A}_i \right) \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{4} \left[A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \overline{A}_j \right) \right] \right.$$

所以
$$D = \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{4} \overline{A}_i \right) \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{4} \left[A_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \overline{A}_j \right) \right] \right\}}$$

注：本例的结论也可以推广到生产了 n 个零件的上述事件的情形，结论具有一般性，只需将 4 换成 n 即可.

例 3　以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件 $\overline{A}$ 为(　　).

A. 甲种产品滞销，乙种产品畅销　　B. 甲、乙两种产品均畅销

C. 甲种产品滞销　　D. 甲种产品滞销或乙种产品畅销

解　应选 D. 利用事件的关系及运算律即可. 不妨记 B 为"甲种产品畅销"，C 为"乙种产品滞销"，显然 $\overline{B}$ 为"甲种产品滞销"，$\overline{C}$ 为"乙种产品畅销"，而 $A = B \cap C$，所以
$$\overline{A} = \overline{B \cap C} = \overline{B} \cup \overline{C}$$
即"甲种产品滞销或乙种产品畅销".

例 4　某人射击 3 次，以 A_i $(i = 1, 2, 3)$ 表示事件"第 i 次击中目标"，则事件"没有一次击中目标"的正确表示为(　　).

A. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$　　B. $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cup \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_3 \overline{A}_1$

C. $A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$　　D. $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$

解　应选 D. 因为“没有一次击中目标”是

$$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$$

或者先考虑它的对立事件,“至少有一次击中目标”,即 $A_1\cup A_2\cup A_3$,因此“没有一次击中目标”就是 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$. 而选项 B 表示“至少有两次没有击中目标”,选项 C 表示“恰有一次击中目标”.

(二) 古典概型及几何概型

例 5　一批灯泡有 10 只,其中 3 只是坏的,从中任取 5 只检查. 问:

(1) 5 只都是好的概率为多少?

(2) 5 只中有 2 只坏的概率为多少?

解　这种取法是组合数,10 只中取 5 只的总取法是 $n=\binom{10}{5}$.

(1) 设 $A=\{5$ 只都是好的$\}$,则 $n_A=\binom{7}{5}$,

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}}=\frac{1}{12}$$

(2) 设 $B=\{5$ 只中有 2 只坏的$\}$,则 $n_B=\binom{7}{3}\binom{3}{2}$,

$$P(B)=\frac{n_B}{n}=\frac{\binom{7}{3}\binom{3}{2}}{\binom{10}{5}}=\frac{5}{12}$$

例 6　证明:从 1, 2, …, n 中任取两个数字之差的绝对值为 k 的概率为

$$\frac{n-k}{\binom{n}{2}}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

证　首先记 A_k 为“任取两个数字之差的绝对值为 k”,则 k 的所有可能的取值为 1, 2, …, $n-1$,下面以每个数字为考察对象,讨论其所有差的绝对值(不重复),即

对　象	差的绝对值(从小到大排列)
1	$1,\ 2,\ \cdots,\ n-2,\ n-1$
2	$1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$
⋮	⋮
$n-1$	1

从表中可以看出

“差的绝对值为 1”有 $(n-1)$ 种可能；

“差的绝对值为 2”有 $(n-2)$ 种可能；

……

“差的绝对值为 $(n-1)$” 只有 1 种可能，

综上
$$P(A_k)=\frac{n-k}{\binom{n}{2}}$$

例 7　某城市的小汽车共 10 000 辆，牌照编号只从 00001 到 10000. 问事件 A“偶然遇到的该市一辆小汽车，其牌照号码中有数字 8”的概率为多少.

解　假设只在此 10 000 辆车的范围内讨论此问题，若牌照编号只从 00001 到 10000，我们可以假设车牌号对应 $\boxed{5\mid 4\mid 3\mid 2\mid 1}$ 中 5 个位置，显然位置 1，2，3，4 对应可以放 0，1，2，…，9 共 10 个数字中的任何一个数字，而位置 5 只能放 0 或 1 两个数字，并且位置 5 若放 1，则位置 1，2，3，4 上的数字只能全为 0，因为现在讨论的车牌号只在 00001 到 10000 范围之内研究.

这个问题可以认为是对 0，1，…，9 共 10 个数字做 4 次有放回抽取(在 1，2，3，4 四个位置上)，总的抽取次数为 $n=10^4$，对于事件 A，即牌照号码中有数字 8，显然位置 5 上不可能出现 8，只能是位置 1，2，3，4 上至少出现一个 8，这个事件直接考察较为复杂，可以利用其对立事件来考察，即位置 1，2，3，4 上没有一个 8 的次数 $n_{\bar{A}}=9^4$，所以
$$P(A)=\frac{10^4-9^4}{10^4}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^4\approx 0.3439$$

例 8　在整数 0～9 中任取 4 个，能排成一个四位偶数的概率是多少?

解法 1　记 A 为“一个四位偶数”，0，1，2，…，9 共 10 个数字，依题意任取 4 个数字排成一个数的可能数 $n=P_{10}^4$，而要能排成一个 4 位偶数就有两种情形，即：① 当个位数为 0 时，可能数 $n_1=P_9^3$；② 当个位数不为 0 时，可能数 $n_2=C_4^1\cdot C_8^1\cdot P_8^2$，因此
$$P(A)=\frac{n_1+n_2}{n}=\frac{P_9^3+C_4^1C_8^1\cdot P_8^2}{P_{10}^4}=\frac{41}{90}$$

解法 2　记号同上，任取 4 个数字排成一个数的可能数 $n=P_{10}^4$ 或 $C_{10}^4P_4^4$，而排成“偶数”的可能数 $n_3=C_5^1P_9^3$，其中有一部分是“三位偶数”的可能数 $n_4=C_4^1\cdot P_8^2$，因此“四位偶数”的可能数
$$n_5=n_3-n_4=C_5^1P_9^3-C_4^1P_8^2$$
因此
$$P(A)=\frac{n_3-n_4}{n}=\frac{C_5^1\cdot P_9^3-C_4^1\cdot P_8^2}{P_{10}^4}=\frac{41}{90}$$

例 9　在区间(0，1)内任取两个数，求事件 A“两数之和小于$\frac{6}{5}$”的概率.