国家级示范性高等院校精品规划教材

# 经济数学

## 下

JING JI SHU XUE

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO
JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/阚兴莉　张　甜

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

国家级示范性高等院校精品规划教材

# 经济数学

## （下）

主　编　阚兴莉　张　甜
副主编　王　慧　徐　鹏　杨立春

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

## 内容简介

本教材是在贯彻落实教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”要求的基础上，按照工科及经济管理类“数学基础课程教学基础要求”并结合当前大多数本专科院校的学生基础和教学特点进行编写的.本书全面而系统地讲解了线性代数和概率论与数理统计的内容，全书共12章，每章配有习题.

本教材举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为普通高等院校工科类、经管类有关专业的线性代数课程和概率论与数理统计课程的教材使用.

**图书在版编目(CIP)数据**

经济数学.下/阚兴莉，张甜主编.—天津：天津大学出版社，2012.1

国家级示范性高等院校精品规划教材

ISBN 978-7-5618-4279-9

Ⅰ.①经… Ⅱ.①阚…②张… Ⅲ.①经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第007151号

**出版发行** 天津大学出版社
**出 版 人** 杨欢
**地　　址** 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
**电　　话** 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
**网　　址** publish.tju.edu.cn
**印　　刷** 天津泰宇印务有限公司
**经　　销** 全国各地新华书店
**开　　本** 185mm×260mm
**印　　张** 14
**字　　数** 349千
**版　　次** 2012年2月第1版
**印　　次** 2012年2月第1次
**定　　价** 29.00元

---

# 前 言

众所周知，数学在经济科学、管理科学中有着十分广泛的应用，随着计算机技术的应用，数学在经济及其管理中的重要性日益突出. 为了适应“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的需要，选择一本既适合当前学生实际又符合教育部有关课程基础要求的数学教材是各校教学的当务之急. 特别对于培养实用型人才的一般院校、独立学院而言，目前国内尚缺乏这类教材. 为此，我们在吸收国内外有关教材优点的基础上，结合自己丰富的教学经验编写了这本《经济数学》教材. 本教材具有以下几个特点.

1. 内容安排上由浅入深，符合认知规律，结构严谨、叙述明确简练、逻辑清晰，尽可能通过实际背景引入数学概念，便于学生理解和掌握.

2. 本套教材充分考虑了内容的更新，选入了一些新颖的、能反映相应学科的新思想、新趋势的材料，充实教材内容，以适应教育发展和教学改革新形势的需要.

3. 教材是教师和学生赖以完成教学过程的主要工具. 所以本套教材对概念的引入、结论的推证、理论体系的完善、材料的安排以及例题、习题的选配等方面，都是从教学的实际要求出发，使其遵循教学活动自身的规律，方便教师的教与学生的学.

本书由阚兴莉、张甜任主编. 具体编写分工如下：第1、2章由湖北工业大学商贸学院的王慧编写；第3、4、5章由湖北工业大学商贸学院的张甜编写；第6、7、8章由湖北工业大学商贸学院的徐鹏编写；第9、10章由武汉纺织大学的杨立春编写；第11、12章由湖北工业大学商贸学院的阚兴莉编写. 最后由阚兴莉负责统稿. 在本书的编写、出版过程中，天津大学出版社的领导、编辑们对本书的编辑和出版给予了大力支持和热情帮助，编者在此对他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，加之编写时间较仓促，书中难免有错漏和不当之处，敬请专家、同行及读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编者

2011年11月

# 目　　录

# 第 1 章　行　列　式

## 1.1　行列式的定义

### 1.1.1　二阶行列式

**定义 1**　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式,它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

行列式中的横排称为行,竖排称为列. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$称为行列式的元素. 元素 $a_{ij}$的第一个下标 $i$ 称为行标,表明该元素位于第 $i$ 行;第二个下标 $j$ 称为列标,表明该元素位于第 $j$ 列. 由上述定义可知,二阶行列式是由 4 个数按一定的规律运算所得的代数和,这个代数和可以利用图 1-1(对角线法则)来表述. 图中,把 $a_{11}$到 $a_{12}$的实连线称为主对角线,把 $a_{12}$到 $a_{21}$的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便等于主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积.

将行列式的概念用于表达线性方程组的解,将会使其形式简化,便于记忆. 我们用已知的消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1-1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. & (1-2) \end{cases}$$

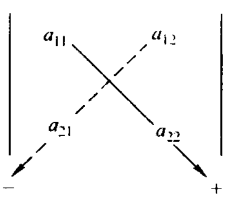

图 1-1

$(1-1)\times a_{22}-(1-2)\times a_{12}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}. \qquad (1-3)$$

$(1-2)\times a_{11}-(1-1)\times a_{21}$得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}. \qquad (1-4)$$

利用行列式的定义,记

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$D_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则式(1-3)、(1-4)可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1, \\ Dx_2 = D_2. \end{cases}$$

于是,在 $D\neq 0$ 的条件下,方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

**注** 从形式上看,这里分母 $D$ 是由方程组的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式),$x_1$ 的分子 $D_1$ 是用常数项 $b_1$,$b_2$ 分别替换 $D$ 中 $x_1$ 的系数 $a_{11}$,$a_{21}$ 所得的二阶行列式,$x_2$ 的分子 $D_2$ 是用常数项 $b_1$,$b_2$ 分别替换 $D$ 中 $x_2$ 的系数 $a_{12}$,$a_{22}$ 所得的二阶行列式. 后面讨论的三元线性方程组亦有类似的规律性,请读者学习时注意.

**例 1** 解方程组

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 = -5. \end{cases}$$

**解** $D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3-(-3)\times 4 = 15$,

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -30,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 15.$$

因 $D\neq 0$,故方程组有唯一解:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-30}{15} = -2,\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{15}{15} = 1.$$

## 1.1.2 三阶行列式

**定义 2** 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式,它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

由上述定义可见,三阶行列式是由 9 个数按一定的规律运算所得的代数和,这个代数和可利用图 1-2(对角线法则)或图 1-3(沙路法则)来表述.

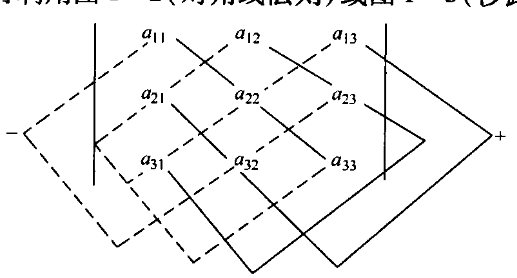


图 1-2

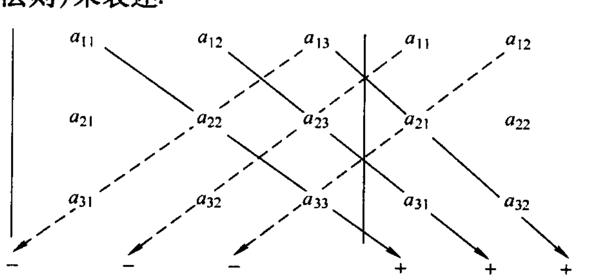


图 1-3

**例2** 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

**解** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times1\times3+(-3)\times(-2)\times5+1\times4\times1-1\times1\times5-(-3)\times4\times$

$$3-2\times(-2)\times1=75.$$

类似于二元线性方程组的讨论,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

用消元法求解方程组得

$$\begin{cases} Dx_1=D_1, \\ Dx_2=D_2, \\ Dx_3=D_3. \end{cases}$$

其系数行列式 $D\neq0$,则该方程组有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

以后将证明,在一定的条件下,具有 $n$ 个未知量的线性方程组也有类似的求解公式.

**例3** 解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=26, \\ 2x_1-4x_2-x_3=9, \\ x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$$

**解** 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5\neq0,\ D_1=\begin{vmatrix} 26 & -1 & 1 \\ 9 & -4 & -1 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}=55,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 26 & 1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 1 & 16 & 1 \end{vmatrix}=20,\ D_3=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 26 \\ 2 & -4 & 9 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix}=-15.$$

方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{55}{5}=11,\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{20}{5}=4,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-15}{5}=-3.$$

### 1.1.3 排列及其逆序数

为了把二阶、三阶行列式的概念推广到 $n$ 阶行列式，首先引入排列的概念.

**定义 3** 把自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定的顺序排成一个数组，称为一个 $n$ 级排列，简称为排列，并把这个排列记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

例如 1234 和 4321 都是 4 级排列，而 21354 是一个 5 级排列.

一般地，自然数 $1,2,\cdots,n$ 可组成 $n!$ 个不同的 $n$ 级排列，即 $n$ 级排列的总数为 $n!$ 个.

**定义 4** 在一个 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$ 中，若 $i_t>i_s$（表明较大的数 $i_t$ 排在较小的数 $i_s$ 前面），则称数 $i_t$ 与 $i_s$ 构成一个逆序．一个 $n$ 级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

根据上述定义，可按如下方法计算排列的逆序数.

若在一个 $n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_t\cdots i_n$ 中，比 $i_t(t=1,2,\cdots,n)$ 小且排在 $i_t$ 后面的数共有 $t_i$ 个，则 $i_t$ 与该排列中其他数之间构成 $t_i$ 个逆序，而该排列中所有数的逆序数之和就是这个排列的逆序数．即

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n.$$

**例 4** 计算排列 3 2 5 1 4 的逆序数.

**解** $\tau(3\ 2\ 5\ 1\ 4)=2+1+2+0=5.$

**定义 5** 逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列.

**例 5** 求排列 $1\ 2\ 3\ \cdots\ n$ 和 $n(n-1)\cdots2\ 1$ 的逆序数，并指出其奇偶性.

**解** 因为 $\tau(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)=0$，所以 $1\ 2\ \cdots n$ 为偶排列.

又因为

$$\tau(n(n-1)\cdots21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

易见：当 $n=4k,4k+1$ 时，该排列为偶排列，当 $n=4k+2,4k+3$ 时，该排列为奇排列.

称 $1\ 2\ \cdots\ n$ 为自然序排列.

在 $n$ 级排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，将其中两个数 $i_s$ 和 $i_t$ 互换位置，其余各数位置不变而得到另一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$，这样的做法叫做一个对换.

比如 $3\ 1\ 5\ 2\ 4\xrightarrow{(5,2)}3\ 1\ 2\ 5\ 4$ 表示排列 3 1 5 2 4 经过(5,2)对换后变成了 3 1 2 5 4.

**定理 1** 每一个对换都改变排列的奇偶性.

**定理 2** $n\geqslant2$ 时，在 $n!$ 个 $n$ 级排列中，奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

**证** 设有 $p$ 个不同的 $n$ 级偶排列，$q$ 个不同的 $n$ 级奇排列，则 $p+q=n!$．对这 $p$ 个偶排列施行同一个对换 $(i,j)$，那么由定理 1 我们得到 $p$ 个奇排列，且 $p\leqslant q$. 同理，对 $q$ 个奇排列施行同一个对换 $(i,j)$，由定理 1 我们得到 $q$ 个偶排列，且 $q\leqslant p$，故 $q=p=\frac{n!}{2}$.

### 1.1.4 $n$ 阶行列式的定义

观察三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

易见:

(1)三阶行列式共有3! =6 项;

(2)每项都是取自不同行不同列的3个元素的乘积;

(3)每项的符号是:当该项的3个元素的行标按自然序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.

故三阶行列式可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 为对所有三级排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

**定义6** 由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式,它表示所有取自不同行、不同列的 $n$ 个元素乘积 $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,各项的符号是:当该项各元素的行标按自然序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 $n$ 级排列求和.

为方便起见,有时把 $n$ 阶行列式简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|_{n\times n}$,有时也简记为 $D$. 当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a_{11}|_{1\times 1}=a_{11}$. 我们也称代数和 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 为行列式 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 的展开式.

**注** (1) 由于所有 $n$ 级排列的总数有 $n!$ 个,故 $n$ 阶行列式是 $n!$ 项的代数和;

(2)由于在所有的 $n$ 级排列中,奇排列和偶排列的个数相同,故在代数和 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中正负项各占一半;

(3)由于乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中各因子的相对顺序可以改变，因此当乘积中各因子的列标按自然序排列时，一般表示为 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，这样的乘积项仍然是行列式 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 展开式中的一项，而且可以证明，项前的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}$，于是 $n$ 阶行列式又可以定义为

$$D=|a_{ij}|_{n\times n}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

我们还可以证明，当乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中各因子的相对顺序随意改变时，一般表示为 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，这样的乘积仍然是行列式 $|a_{ij}|_{n\times n}$ 的展开式中的一项，而且项前的符号为 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，于是 $n$ 阶行列式又可以定义为

$$D=|a_{ij}|_{n\times n}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\(\text{或}j_1j_2\cdots j_n)}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

**例 6** 计算 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

**解** 一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，现考察不为零的项．$a_{1j_1}$ 取自第一行，但第一行中只有 $a_{11}\neq0$，故只可能取 $a_{1j_1}=a_{11}$（其中 $j_1=1$）．又 $a_{2j_2}$ 取自第二行，而该行只有 $a_{21}$ 及 $a_{22}$ 不为零．因 $a_{1j_1}=a_{11}$ 取自第一列，故 $a_{2j_2}$ 不能取自第一列，从而 $a_{2j_2}=a_{22}$（其中 $j_2=2$），同理可得 $a_{3j_3}=a_{33}$，$a_{4j_4}=a_{44}$，$\cdots$，$a_{nj_n}=a_{nn}$，因此

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(1\ 2\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

具有这种从主对角线以上（下）各元素都为零的特征的行列式称为下（上）三角形行列式．此例说明下三角形行列式的值等于对角线上各元素的乘积．同理可得，上三角形行列式的值也等于主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，对角形行列式（主对角线以外的元素均为零的行列式）的值等于主对角线上各元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\0&a_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们也不难得到

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n(n-1)\cdots 2\ 1)} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}.$$

**例7** 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

**解** 根据定义,$D$ 是 $4!=24$ 项的代数和,然而在这个代数和里,除了 $acfh,adeh,bdeg,bcfg$ 这4项外,其余项都至少含有一个因子0,因而等于0;当上述4项中各因子的行标按自然序排列后,其对应的列标依次是1 2 3 4,1 3 2 4,4 3 2 1,4 2 3 1,因此

$$D = (-1)^{\tau(1234)}acfh + (-1)^{\tau(1324)}adeh + (-1)^{\tau(4321)}bdeg + (-1)^{\tau(4231)}bcfg$$
$$= acfh - adeh + bdeg - bcfg.$$

## 习 题 1.1

1. 求下列排列的逆序数:

(1)2413;　　(2)3712456;

(3)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$;　　(4)$13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

2. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{vmatrix}$.

3. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中,下列各乘积项前应取什么符号?

(1)$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$;　　(2)$a_{32}a_{53}a_{26}a_{11}a_{44}a_{65}$.

4. 用定义计算行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

# 1.2 行列式的性质及其运算

## 1.2.1 行列式的性质

利用行列式的定义来计算较高阶行列式,计算量是相当大的,因此有必要研究行列式的性质,以简化行列式的计算,此外,这些性质在理论上也具有重要意义.

**定义7** 将行列式 $D$ 的行与列互换后所得到的行列式,称为 $D$ 的转置行列式,记为 $D^{\mathrm{T}}$ 或 $D'$,即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质1** 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

**证** 设 $D^{\mathrm{T}}$ 中位于第 $i$ 行第 $j$ 列的元素为 $b_{ij}$,显然有 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,根据 $n$ 阶行列式的定义,有

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \\ &= D. \end{aligned}$$

由性质1知,行列式中的行与列具有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列也同样具有.

**性质2** 交换行列式的两行(列),行列式变号.

**证** 设交换行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \text{第 } s \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

的第 $i$ 行和第 $s$ 行 $(1\leqslant i<s\leqslant n)$,得行列式