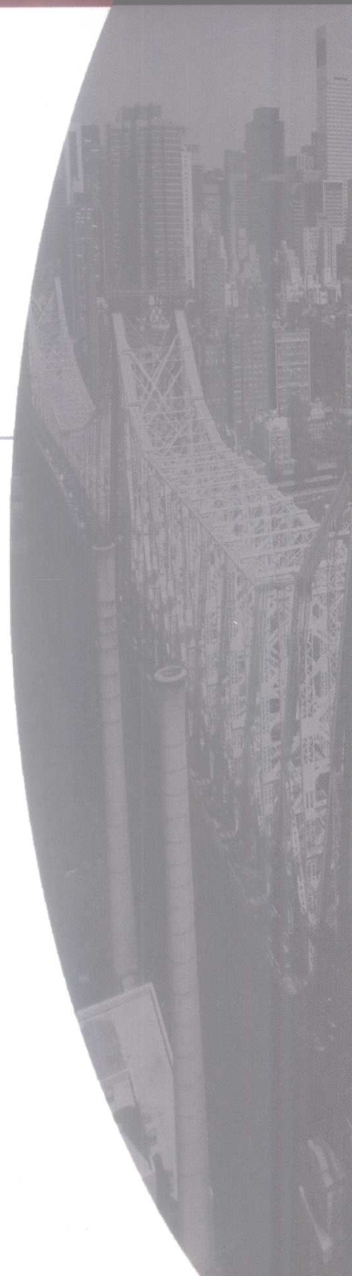
"十二五"应用型人才培养工程规划教材

应用高等数学

Applied Higher Mathematics



吴纯　谭莉　主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

"十二五"应用型人才培养工程规划教材

应用高等数学

主　编　吴　纯　谭　莉

副主编　汪祥莉　胡耀胜　汤茂林　谢瀛慧

参　编　粟勤农　易同贸　杨　军

韩光辉　吴振之　马晓燕　王文波

机械工业出版社

本书是为了适应新时期对高素质应用型专门人才的要求编写而成的，系湖北省教育科学“十一五”规划课题（课题编号 2010B332）研究成果.

本书共 8 章，主要内容包括：函数与极限、一元函数微分学及其应用、一元函数积分学及其应用、微分方程、多元函数微积分学及其应用、无穷级数、线性代数初步、数学软件 Mathematica 介绍及其应用.

本书可作为应用型本科及高职院校各专业教材，也可供相关技术人员自学参考.

图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学/吴纯，谭莉主编. —北京：机械工业出版社，2012.3
“十二五”应用型人才培养工程规划教材
ISBN 978-7-111-37173-1

Ⅰ.①应…　Ⅱ.①吴…②谭…　Ⅲ.①高等数学－高等职业教育－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 010318 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐
版式设计：刘　岚　责任校对：王　欣
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2012 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×240mm · 20.25 印张 · 346 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-37173-1
定价：39.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：（010）88361066
销售一部：（010）68326294
销售二部：（010）88379649
读者购书热线：（010）88379203

网络服务
门户网：http：//www.cmpbook.com
教材网：http：//www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　　言

为适应我国高等职业教育迅速发展，我们根据教育部制定的高职教育数学课程教学基本要求及教育部关于加强高职教育人才培养工作的意见编写了这本《应用高等数学》教材.

本书在编写中遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，突出基本概念、理论和方法，强调数学概念、原理与实际问题的联系，力求通俗易懂，深入浅出. 概念和结论的引入由具体到抽象、由特殊到一般，尽量从提出问题或引入具体易懂的例子阐明重要的概念、结论与方法，并用实例反映数学知识的应用.

参加本书编写的有，武汉商业服务学院胡耀胜（第1章）、谭莉（第2章、第6章）、吴纯（第3章、第5章）、汤茂林（第4章），武汉理工大学汪祥莉（第7章、第8章），以及武汉交通职业学院粟勤农，长江工程职业技术学院易同贸，武汉商业服务学院谢瀛慧、杨军、韩光辉，江汉大学吴振之，华中农业大学马晓燕，武汉科技大学王文波. 全书由吴纯统稿，谭莉、汪祥莉、胡耀胜、汤茂林、谢瀛慧参加了部分章节的审阅.

本书在编写过程中，得到了武汉商业服务学院教务处、基础课部及机械工业出版社的大力支持，在此一并表示感谢.

由于编者经验和水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者和同行批评指正.

编　者

目　录

第 1 章

函数与极限

极限是现代数学的最基本的概念，是学习微积分学的重要基础. 在后面的几章学习中可以看到，微积分中的重要概念都是通过极限来定义的. 本章将介绍极限的概念、性质及运算法则，在此基础上建立函数连续的概念，并讨论连续函数的性质.

1.1 初等函数

1.1.1 函数

1. 区间、绝对值、邻域

(1)区间

在研究函数等问题时，经常遇到不等式，为了便于理解，首先介绍一下区间的概念。

满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的集合称为**开区间**，用 (a, b) 表示，它在数轴上表示点 a 与点 b 之间(但不包括点 a 与点 b 两点)的线段.

满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的集合称为**闭区间**，用 $[a, b]$ 表示，它在数轴上表示点 a 与点 b 之间(包括点 a 与点 b 两点)的线段.

满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的一切实数 x 的集合称为**半开半闭区间**(也称为**半开区间**，或**半闭区间**)，分别用 $(a, b]$、$[a, b)$ 表示.

满足不等式 $x>a$、$x\geqslant a$、$x<b$、$x\leqslant b$ 及 x 可取任何实数值的集合称为无穷区间，它们分别用 $(a, +\infty)$、$[a, +\infty)$、$(-\infty, b)$、$(-\infty, b]$ 以及 $(-\infty, +\infty)$ 表示.

(2)绝对值

定义 1.1 数轴上的点 a 到原点的距离称为这个数的**绝对值**，记作 $|a|$.

规定 $$|a|=\begin{cases}a & a\geqslant 0,\\ -a & a<0.\end{cases}$$

(3)邻域

定义 1.2 设 a 为一个实数，$\delta>0$，那么满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切实数 x 的集合，称为以 a 为中心的 **δ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

$U(a,\delta)$也可用开区间$(a-\delta,a+\delta)$来表示. 它在数轴上表示为以点 a 为中心，以 δ 为半径的**开区间**.

有时要用到的邻域需要把邻域的中心去掉，将点 a 的 δ 邻域去掉点 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

2. 函数的定义

设 D 是一个数集，如果对属于 D 中的每一个数 x，依照某个对应关系 f，y 都有确定的数值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. x 叫做函数的**自变量**，数集 D 叫做函数的**定义域**. 对应关系 f 有时也称为**对应法则**. 函数 y 的取值范围 M 叫做函数的**值域**.

由定义可知，对应关系和定义域构成函数的两个要素.

3. 函数的定义域

在实际问题中，需要根据所考察问题的实际意义来确定其定义域. 对于不具有实际意义的抽象函数，其定义域是使得函数有意义的全体自变量的集合. 常见的有：

(1) 在分式函数中，分母不能为零；

(2) 在根式函数中，负数不能开偶次方；

(3) 在对数函数中，真数大于零；

(4) 在三角函数和反三角函数中，要符合它们的定义域；

(5) 在含有多种式子的函数中，应取各部分定义域的交集.

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应法则 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $y_0=y|_{x=x_0}=f(x_0)$.

例 1.1 求函数 $y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域.

解　这是两个函数之和的定义域，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可.

要使 $\sqrt{x^2-x-6}$ 有意义，必须满足：

$$x^2-x-6\geqslant 0,$$

即
$$(x-3)(x+2)\geqslant 0,$$

解得
$$x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3,$$

即 $\sqrt{x^2-x-6}$ 的定义域为 $(-\infty,\ -2]\cup[3,\ +\infty)$；

要使 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 有意义，必须满足：

$$\left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,$$

即
$$-7\leqslant 2x-1\leqslant 7,$$

解得
$$-3\leqslant x\leqslant 4,$$

即 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3,\ 4]$.

于是，所求函数的定义域为 $[-3,\ -2]\cup[3,\ 4]$.

例 1.2　下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $u=\sqrt{v}$.

解　(1)不是相同的函数，因为定义域不同；

(2)是相同的函数，因为对应法则与定义域都相同.

例 1.3　设 $f(x)=3x^2+2x-1$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应法则为

$$f(\quad)=3(\quad)^2+2(\quad)-1.$$

例 1.4　设 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

解
$$y\Big|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

例 1.5　设 $f(x+1)=x^2-3x$，求 $f(x)$.

解　令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，所以

$$f(t)=(t-1)^2-3(t-1)=t^2-5t+4,$$

则
$$f(x)=x^2-5x+4.$$

4. 反函数

在研究函数的同时，有时函数和自变量的地位会相互转换，于是就出现了反函数的概念.

例如，在函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 中，定义域和值域都是 $\mathbf{R}$，按照 x 和 y 的对应关系，任意给出一个 $y\in\mathbf{R}$，都有唯一确定的 $x=2y-1$ 与之对应.

一般地，设函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值，都可由 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值与之对应，这样就确定了一个以 y 为自变量的函数 x，该函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 显然，函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 M，值域为 D.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，故常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个平面直角坐标系内，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

因此，函数 $x=2y-1$ 是函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 的反函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$. 将函数改为 y，自变量改为 x，则函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 的反函数为 $y=2x-1$（图 1-1）.

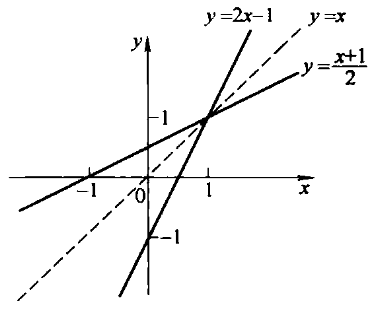


图 1-1

例 1.6 求 $y=x^3+2$ 的反函数.

解 由 $y=x^3+2$，得

$$x=\sqrt[3]{y-2},$$

所以，其反函数为

$$y=\sqrt[3]{x-2}\ (x\in\mathbf{R}).$$

5. 分段函数

在自然科学及工程技术中，用公式表示函数时，经常会遇到一个函数在不同的范围内用不同的式子表示的情况. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

是定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的一个函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当

$x<0$ 时，$f(x)=-x$.

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数叫做**分段函数**.

分段函数是用几个解析式子来表示的一个函数，而不是表示几个函数．求分段函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围内的表达式中进行计算．如在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-4)=-(-4)=4$.

6. 函数的几种特性

(1)奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $y=f(x)$ 叫做**奇函数**；如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $y=f(x)$ 叫做**偶函数**；如果函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，则称 $y=f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

例如，$y=x^3$ 是奇函数，$y=x^2$ 是偶函数.

奇函数的图像关于原点对称(如图1-2)；偶函数的图像关于 y 轴对称(如图1-3).

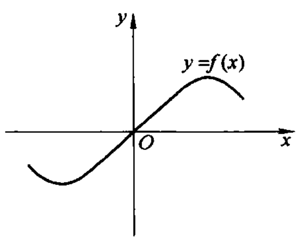


图　1-2

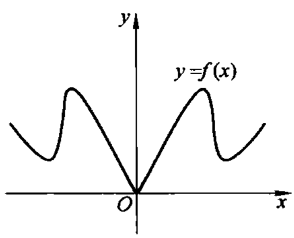


图　1-3

例1.7　判断下列函数的奇偶性：

1) $f(x)=x^2\cos x$；　　2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；　　3) $f(x)=x^2-x$.

解　1)因为

$$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x),$$

所以 $f(x)=x^2\cos x$ 为偶函数.

2)因为

$$f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x),$$

所以 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 为奇函数.

3）因为

$$f(-x) \neq \pm f(x),$$

所以 $f(x)=x^2-x$ 为非奇非偶函数.

（2）单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而增大，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是**单调增加的**，区间 (a, b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调增加区间**.

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而减小，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 与 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是**单调减少的**，区间 (a, b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调减少区间**.

显然，单调增加函数的图像沿 x 轴正向是逐渐上升的；单调减少函数的图像沿 x 轴正向是逐渐下降的.

图 1-4 所示为单调增加函数，图 1-5 所示为单调减少函数.

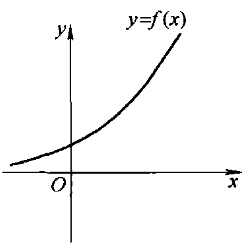


图 1-4

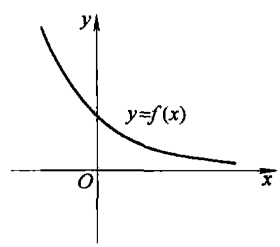


图 1-5

在整个区间上单调增加（减少）的函数，称为这个区间上的单调增（减）函数，这个区间称为这个函数的**单调区间**.

例如，指数函数 $y=e^x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 内是单调增加的. 而幂函数 $y=x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的，在 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的，所以在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数.

例 1.8 判断函数 $f(x)=2x^2+1$ 的单调性.

解 任给 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= 2(x_1^2-x_2^2) \\ &= 2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0, \end{aligned}$$

即
$$f(x_1)>f(x_2),$$

故在 $(-\infty, 0)$ 内 $f(x)=2x^2+1$ 为减函数；

同理，可得 $f(x)=2x^2+1$ 在 $(0, +\infty)$ 内为增函数.

(3)周期性

对于函数$f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得对于其定义域内的每一个x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$是周期函数，T称为其**周期**.

显然，如果T是$f(x)$的周期，则nT(n是整数)均为其周期. 一般提到的周期均指最小正周期.

我们常见的三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$都是以2π为周期；$y=\tan x$，$y=\cot x$都是以π为周期.

(4)有界性

设函数$f(x)$在区间(a, b)内有定义，如果存在一个正数M，使得对于任意$x\in(a, b)$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，那么称$f(x)$在(a, b)内**有界**；如果不存在这样的正数M，那么称$f(x)$在(a, b)内**无界**.

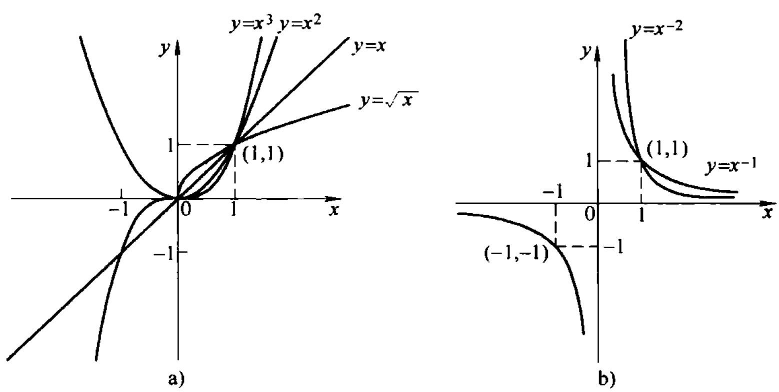
例如，函数$y=\sin x$，存在正数$M=1$，使得对于任意的$x\in\mathbf{R}$，均有$|\sin x|\leqslant 1$，所以函数$y=\sin x$在其定义域$\mathbf{R}$内是有界的.

1.1.2 基本初等函数

我们学过的幂函数$y=x^{\alpha}$(α为实数)、指数函数$y=a^{x}$($a>0$且$a\neq 1$)、对数函数$y=\log_a x$($a>0$且$a\neq 1$)、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

1. 幂函数$y=x^{\alpha}$(α为实数)

(1) 当$\alpha>0$时，函数经过两定点$(0, 0)$和$(1, 1)$，图像在第Ⅰ象限内单调增加且无界(图 1-6a).



a)　　b)

图 1-6

（2）当 $\alpha<0$ 时，函数经过定点(1，1)，图像在第 I 象限内单调减少且无界(图 1-6b).

2. 指数函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)

它的定义域为($-\infty$，$+\infty$)值域为(0，$+\infty$)，图像经过定点(0，1).

（1）当 $0<a<1$ 时，函数单调减少且无界(图 1-7a).

（2）当 $a>1$ 时，函数单调增加且无界(图 1-7b).

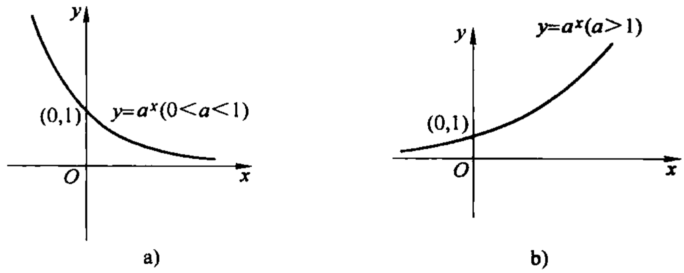


图 1-7

3. 对数函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)

它的定义域为(0，$+\infty$)，值域为($-\infty$，$+\infty$)，图像经过定点(1，0).

（1）当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界(图 1-8a).

（2）当 $a>1$ 时，函数单调递增且无界(图 1-8b).

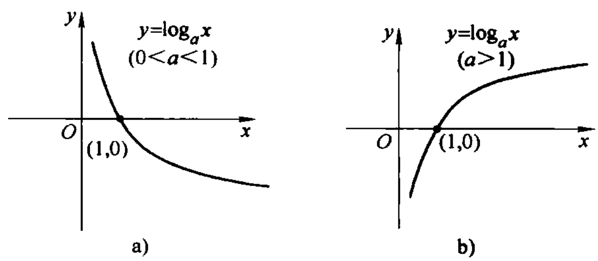


图 1-8

4. 三角函数

（1）正弦函数 $y=\sin x$

定义域为($-\infty$，$+\infty$)，值域为[-1，1]，奇函数，周期为 2π，有界(图 1-9).

（2）余弦函数 $y=\cos x$

定义域为($-\infty$，$+\infty$)，值域为[-1，1]，偶函数，周期为 2π，

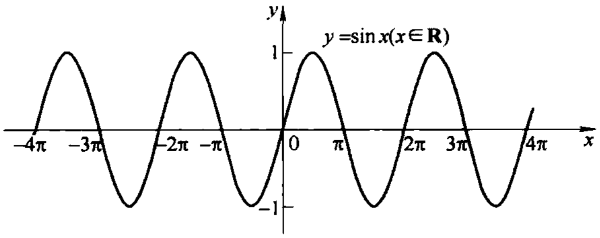


图 1-9

有界(图 1-10).

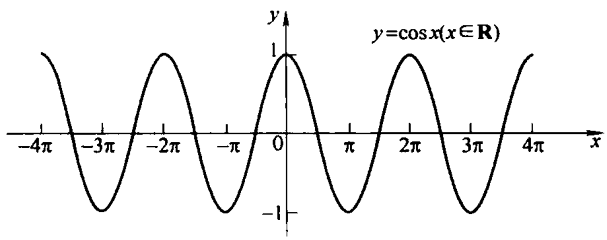


图 1-10

(3) 正切函数 $y = \tan x$

定义域为$\left\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，奇函数，周期为 π，无界(图 1-11).

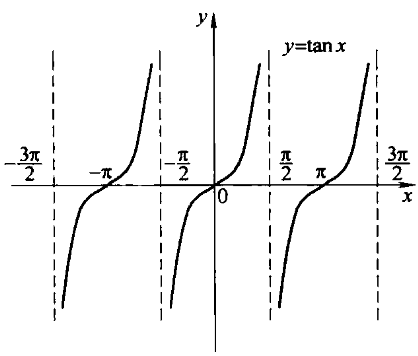


图 1-11

(4) 余切函数 $y = \cot x$

定义域为$\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty, +\infty)$，奇函数，周期为 π，无界(图 1-12).

5. 反三角函数

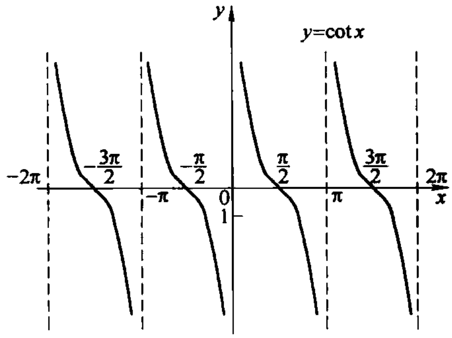


图 1-12

(1)反正弦函数 $y=\arcsin x$

定义域为$[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，奇函数，单调增加，有界(图 1-13).

(2)反余弦函数 $y=\arccos x$

定义域为$[-1, 1]$，值域为$[0, \pi]$，非奇非偶函数，单调减少，有界(图 1-14).

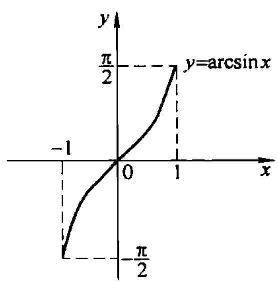


图 1-13

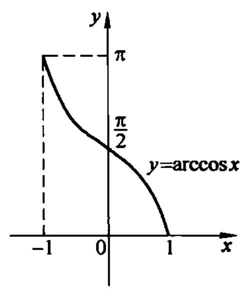


图 1-14

(3)反正切函数 $y=\arctan x$

定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，奇函数，单调增加，有界(图 1-15).

(4)反余切函数 $y=\text{arccot}\, x$

定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$，非奇非偶函数，单调减少，有界(图 1-16).