GAODENG SHUXUE SIXIANG FANGFA DAOYIN

高等数学
思想方法导引

刘法贵 李亦芳 靳志勇 主编

兵器工业出版社

高等数学思想方法导引

刘法贵　李亦芳　靳志勇　主编

兵器工业出版社

内容简介

本书系统地介绍了高等数学中基本概念的内涵和数学思想，以及数学中一些基本问题与处理这些问题的方法和途径。内容包括极限与连续函数，一元函数微积分，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分，无穷级数和常微分方程等几个部分，每一部分从“基本思想简述”、“重点与难点”、“基本内容与问题”和“题型分析”四个方面展开论述，并配置了“练习题”。本书选材内容广，分析透彻，有助于读者充分吸收和消化数学知识，提高数学思维能力和增强数学意识。

本书可供理工科学生复习参考用，也可供参加硕士研究生考试的老生使用，同时，也是一本教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学思想方法导引/刘法贵等主编. 一北京:兵器工业出版社，1998.4

ISBN 7-80132-215-0

Ⅰ. 高… Ⅱ 刘… Ⅲ. 高等数学-数学方法 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 09123 号

兵器工业出版社 出版发行

(邮编 100081 北京市海淀区车道沟 10 号)

各地新华书店经销

中国科学院开封印刷厂印装

*

开本:850×1168 1/32 印张:9 字数:234.6 千字

1998 年 4 月第 1 版 1998 年 4 月第 1 次印刷

印数:1～2000 册 定价:12.50 元

前　言

高等数学是工科院校中一门重要的基础课，其中的知识、方法和技巧丰富多采，牢固地掌握数学知识，培育数学思想和增强数学意识，将使学习者在以后的工作实践中收益无穷。然而，在高等数学教学中，普遍存在着这样一个问题，即使会解决了某一具体问题，也不能从中发现其中的数学思想和解题技巧，鉴于此，作者根据自己的教学实践经验，编写了这本数学参考书。

这本参考书在编排上别具一格，我们舍弃一般数学参考书的编排格式，而是从数学思想和解题的基本技巧方面展开论述。本书的指导思想是抓住高等数学中的基本要旨，系统地对数学基本概念，数学基础知识，解题技巧和方法进行综合复习，使学习者通过这本书的学习以期达到融会贯通、举一反三之功效。

本书在编写过程中，参阅了国内不少数学教学参考书，从中汲取了许多营养，这些图书资料各有其独特之处，我们择其精华而取之。

本书原稿由丁天彪教授审阅，并提出了许多有价值的意见和建议，在此，我们表示感谢。

限于作者的水平和能力，难免书中有缺点和错误，而且，选题范围也不全面，殷切希望广大读者批评指教。

编　者

1997年10月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 极限与连续函数

高等数学的核心是微积分学，而微积分学中的基本概念，如连续、导数、积分等，都是以极限为基础，并且极限理论也推动了各种理论的发展，促使许多实际问题得以解决。连续是函数的一个重要性质，连续函数及其性质在微积分学理论中同样起着重要的作用。

在近代数学的许多分支中，一些重要概念与理论都是极限与连续函数概念的推广、延拓和深化。

一、基本思想简述

这一章主要涉及三方面的内容：函数、极限和连续。函数概念反映存在于物质世界中各种变数之间的联系以及它们的依赖关系。极限概念则是高等数学的“灵魂”，是学习以后各章内容的重要工具，因此，只有明确和熟悉掌握极限概念，才能顺利进行以后各部分内容的学习。连续概念作为函数的一个重要性质，也是微积分的基础概念。

牛顿和莱布尼兹微积分的创立极大地推动了数学的发展及其应用，也促进了社会现代文化的发展和进步。但在微积分创立之始，由于缺少坚实的理论基石，从而陷入了逻辑上不能自圆其说的两难境地，遭受到了包括数学家在内的人们严厉抨击，极限理论的创立和完善，使微积分找到了坚实的理论基石，纳入到了数学严格理论体系之中，由此可以看出极限理论在高等数学中的中心地位。

最后，尚须指出的是，这一章里有些内容是中学所学习内容的重复，但重复之目的是使初学者能从中学的常量数学（初等数学）过渡到变量数学（高等数学）的过程中有一个顺理成章的感性认识。

二、重点与难点

本章的重点内容是函数、反函数的概念、函数的性质、初等函

数、复合函数及其定义域的确定；极限的概念（包括数列极限与函数极限）、极限运算规则、无穷小与无穷大之间关系及其与极限关系、求极限方法与技巧；函数的连续性，连续函数的性质及函数的间断点及其分类。

难点是极限概念、求极限的方法与技巧。

需要指出的是，复合函数在高等数学中也占着十分重要的地位，即使初学者可以将一些具体的基本初等函数复合成为较复杂的复合函数，但要将一些抽象函数进行复合并理解其结果的意义并不是一件容易的事情，这主要体现在以后求积分的章节中。

极限理论作为中心内容，是比较难以理解和掌握的，极限是研究在确定的过程中某变量的变化趋势。并给出其精确描述。“变化趋势”是指：不管所确定的变化过程多么复杂，我们关心的只是变量变化的“终极目标”，“终极目标”存在，则称该“终极目标”为极限。极限概念的实质是：所确定的变化过程只要到达某一确定时刻之后，变数与常数差的绝对值可以小于预先给定的任意小的正数，也就是说，只要变化过程充分靠近规定的“时刻”，变数与常数要多接近就有多接近。

理解“要多接近就有多接近”这一含义须借助于距离的概念。通常，点 x 与 x_0 距离以 $|x-x_0|$ 表示之，$|x-x_0|<\varepsilon$ 意味着点 x 与 x_0 的距离小于 ε，若 ε 可以任意给定（不管大小），则 $|x-x_0|<\varepsilon$ 表明点 x 与 x_0 距离可以任意小，因为不管你给出怎样一个 ε，都有 $|x-x_0|<\varepsilon$。现在视 x_0 为不动点，x 为动点，$|x-x_0|<\varepsilon$ 就意味着 x 与 x_0 要多接近就有多接近，用数学语言讲，即为 x 以 x_0 为极限。

有一点需明确，x 充分靠近 x_0 $(x\to x_0)$ 的过程未必是“全过程的”，可以是跳跃式的，也可以是连续式的。如数列的极限，$n\to\infty$ 的过程就是一个跳跃式的过程。

无穷小量的概念与极限概念是联系在一起的：无穷小即是一个极限为零的量，它是一个变量，而不是一个具体确定的数。

极限的求法往往使初学者很感头痛，掌握和仔细体会以下几

个方面对求极限是有帮助的。

(1)深刻理解极限的概念，重要性质及运算法则；

(2)注意两个重要极限的运用及几个有关极限的重要定理；

(3)掌握极限与无穷小量之间的关系，利用等价无穷小求极限；

(4)注意总结，善于思考、归结。

三、基本内容与问题

1. 函数(包括基本初等函数、初等函数、复合函数、反函数和分段函数)概念，定义域和值域，函数的初等性质(有界性、周期性、奇偶性和单调性)。

2. 极限概念

(1)数列极限 $\varepsilon-N$ 定义：

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n = a\ (x_n\to a,\ n\to\infty)。$$

(2)函数极限 $\varepsilon-\delta$ 定义

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x) = A\quad (f(x)\xrightarrow{x\to x_0}A)。$$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当 $0<x-x_0<\delta(0<x_0-x<\delta)$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则定义右极限(左极限)

$$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0^+}f(x) = A\quad (f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0^-}f(x) = A)。$$

$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ Z>0$，当 $|x|>Z\ (x>Z,\ -x>Z)$，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则定义

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = A\quad (\lim_{x\to+\infty}f(x) = A, \lim_{x\to-\infty}f(x) = A)。$$

3. 极限存在准则

(1)夹逼准则　若 $F(x)$、$G(x)$、$H(x)$ 在 $x=x_0$ 某去心邻域内有定义，且满足

$$G(x)\leqslant F(x)\leqslant H(x),\quad \lim_{x\to x_0}G(x) = \lim_{x\to x_0}H(x) = A,$$

则 $$\lim_{x\to x_0} f(x)=A。$$

(2)单调有界准则　单调有界数列必有极限。

注 1　在(1)中,对数列也有相应的夹逼准则。

注 2　在(2)中,数列 x_n 的单调性和有界性是其有极限的充分条件,二者缺一不可。

注 3　在应用(2)解决实际问题时,只须验证"单调增加(减少)有上(下)界数列必有极限"。

(3)两个重要极限　若 $x\to x_0(x\to\infty)$,有$\square\to 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sin\square}{\square}=1,$$

$$\lim_{x\to x_0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e\quad\left(\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e。\right)$$

4.无穷小与无穷大

(1)无穷小与无穷大定义　在某一极限过程中(以下我们均以 $x\to a$ 为例说明),若

$$f(x)\to 0\quad (f(x)\to\infty),$$

则 $f(x)$ 为无穷小(大)量。

(2)无穷小量与无穷大量的关系　在自变量同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大。

(3)无穷小比较

在自变数 x 同一变化过程中(下面以 $x\to x_0$ 为例),$\alpha(x)$、$\beta(x)$均为无穷小量,则若

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 为高阶无穷小,记为 $\alpha=o(\beta)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等阶无穷小,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$，$(C\neq 0, C\neq 1)$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶但不等价无穷小；记为 $\alpha(x)=O(\beta(x))$；

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 为低阶无穷小；

(v) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=C$，$(C\neq 0, k>0)$，称 $\alpha(x)$ 比 $\beta(x)$ 为 k 阶无穷小。

(4)当 $x\to 0$ 时，几个常用等价无穷小：

$x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim \mathrm{tg}x\sim \mathrm{arctg}x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim\dfrac{1}{\lambda}[(1+x)^\lambda-1]$，$\lambda\neq 0$。

5. 极限四则运算、等价无穷小、罗必达法则、化为定积分、泰勒展式等六法求极限，求不定式 $\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$0\cdot\infty$，$\infty-\infty$，0^0，∞^0，1^∞ 等极限。

定理 1 有限个无穷小之和仍为无穷小。

注 4 无限个无穷小的和未必是无穷小。

定理 2 有界函数与无穷小乘积仍为无穷小。

定理 3 有限个无穷小乘积仍为无穷小。

定理 4 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B,$$

$$\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)=AB,$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)。$$

注 5 $\lim cf(x)=c\lim f(x)$，c 为常数，$\lim(f(x))^n=[\lim f(x)]^n$，$n$ 为正整数。

定理 5 若 $\lim f(x)=A$，则 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为无穷小量。

定理 6 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$，而 $\lim\varphi(x)=a$，$\lim\psi(x)=b$，则 $a\geqslant b$。

定理 7 如$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则存在$x_0$的一个邻域$D(x_0)$,使当$x\in D(x_0)$,$f(x)>0$。

定理 8

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0},n=m,(b_0\neq 0);\\ 0,n>m;\\ \infty,n<m。\end{cases}$$

定理 9 当$x\to x_0$时,$\alpha,\beta,\gamma,\delta$为无穷小量,且$\alpha\sim\gamma,\beta\sim\delta$,则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha u(x)}{\beta v(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\gamma u(x)}{\delta v(x)}。$$

定理 10(罗必达法则) 若在某极限过程中(以$x\to x_0$为例),$f(x)\to 0(\infty)$,$g(x)\to 0(\infty)$,且$f(x)$,$g(x)$在$x=x_0$某邻域内可导,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K(\text{有限或}\pm\infty),$$

则
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K。$$

6. 函数连续性定义(在$x=x_0$和区间上连续性定义及左、右连续定义)。

(1)下列叙述是等价的:

(i)$f(x)$在$x=x_0$连续;

(ii)$f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$;

(iii)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;

(iv)$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$。

(2)初等函数在其定义域上都是连续的。

(3)函数间断点x_0及其分类。

(i) $f(x_0-0)=f(x_0+0)\Rightarrow$可去间断点;

(ii) $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)\Rightarrow$跳跃间断点;

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Rightarrow$无穷间断点;

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在也不为$\infty$，$\Rightarrow$振荡间断点。

左、右极限都存在的间断点称为第一类间断点，否则称为第二类间断点。

(4)闭区内上连续函数性质：

零点定理 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，则必存在$c\in(a,b)$，使$f(c)=0$。

介值定理 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)<f(b)$（或$f(b)<f(a)$），$\forall\ \mu\in(f(a),f(b))$（或$f(b),f(a)$），则存在$c\in(a,b)$，使$f(c)=\mu$。

有界定理 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$，$\forall\ x\in[a,b]$。

最值定理 $f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上一定有最大值和最小值。

注 6 零点定理可作如下推广：

$f(x)$在$[a,+\infty)$（或$(-\infty,b]$）上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$（或$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$）存在，则若$f(a)$与$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$（或$f(b)$与$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$）异号，则必存在$c\in(a,+\infty)$（或$c\in(-\infty,b)$），使$f(c)=0$。

注 7 若$f(x)$在$[a,b]$上连续，$f(a)\cdot f(b)<0$，且$f(x)$在$[a,b]$上单调，则存在唯一$c\in(a,b)$，使$f(c)=0$。

四、题型分析

1. 函数的定义域

求函数$f(x)$的定义域也就是确定使$f(x)$有意义的x的范围，这里要注意$f(x)$是几个式子之和的形式。在这种形式下求出各式的定义域，即可确定出$f(x)$的定义域（各式定义域的交）。

例 1 求函数$f(x)=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$定义域。

解 函数$f(x)$由$\sqrt{x+2}$与$\dfrac{1}{\ln(1-x)}$两部分组成，因此求$f(x)$定义域，即先求$\sqrt{x+2}$与$\dfrac{1}{\ln(1-x)}$的定义域，然后取二者都

有意义的 x 的公共区域即可。

欲使 $\sqrt{x+2}$ 有意义，只须 $x+2\geqslant 0$，即 $x\geqslant -2$。

欲使 $\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ 有意义，只须 $1-x>0$，$\ln(1-x)\neq 0$，即 $x<1$，$x\neq 0$。

因此，$f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|-2\leqslant x<1, x\neq 0\}$。

例 2 当 $0<u<1$ 时，$f(u)$ 有意义，求 $f(\sin 2x)$ 的定义域。

解 设 $u=\sin 2x$，则由 $0<u<1$ 时，$f(u)$ 有意义，有 $0<\sin 2x<1$，，从而 $f(\sin 2x)$ 定义域为

$$\{x\,|\,n\pi < x < n\pi+\frac{\pi}{2}, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}。$$

例 3 已知 $f(x)$ 定义域为 $\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2\}$，求 $f(x)=f(x+\alpha)+f(x-\alpha)\quad(\alpha>0)$ 定义域。

解 由于 $f(x)$ 有意义的 $x\in[0,2]$，因此，欲使 $f(x)$ 有意义，须使 $0\leqslant x+\alpha\leqslant 2$，$0\leqslant x-\alpha\leqslant 2$，也就是

$$-\alpha\leqslant x\leqslant 2-\alpha,\ \alpha\leqslant x\leqslant 2+\alpha。$$

于是，$F(x)$ 定义域为 $\begin{cases}[\alpha, 2-\alpha], & \text{当}\ \alpha<1, \\ x=1, & \text{当}\ \alpha=1, \\ \text{空集}, & \text{当}\ \alpha>1。\end{cases}$

2. 由 $f[g(x)]=F(x)$，求 $f(x)$

解这一类题目，实际上是引进一个代换，问题就得以解决了。具体解题步骤：

1° 设 $u=g(x)$，求出 $x=G(u)$；

2° 代 $x=G(u)$，$u=g(x)$ 人 $f(g(x))=F(x)$ 得到 $f(u)=F(G(u))$，最后换 u 为 x 即可。

例 4 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)\ (x>0)$，求 $f(x)$。

解 设 $u=\dfrac{1}{x}$，则有 $x=\dfrac{1}{u}$，因此有

$$f(u)=\frac{1}{u}\left(1+\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}\right)=\frac{1}{u^2}\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)$$

从而，$$f(x)=\frac{1}{x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),x>0。$$

例 5 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求 $f(x+1)$。

解 设 $u=x+1$，则 $f(u)=\frac{1-u}{1+u}=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2}$，从而 $f(x+1)=-\frac{x}{x+2}$。

3. 求反函数

这一类题目需要注意的是求分段函数的反函数，求分段函数的反函数只要我们实行“各个击破”原则，将各个分函数视为一个“整体”函数去考虑，问题即可迎刃而解。

例 6 求函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$ 的反函数。

解 先求 $y=x(-\infty<x<1)$ 的反函数，它的反函数仍是其本身，即 $y=x,-\infty<x<1$。

再求 $y=x^2(1\leqslant x\leqslant 4)$ 的反函数，它的反函数为 $y=\sqrt{x},1\leqslant x\leqslant 16$。

最后求 $y=2^x(4<x<+\infty)$ 的反函数，它的反函数为 $y=\log_2 x,16<x<+\infty$。

故 $y=f(x)$ 反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x, & -\infty<x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty。\end{cases}$$

4. 求极限

求极限题目难度要大一些，我们下面给出求极限的一些基本的常用工具。

(1)基本极限

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} +\infty, & r>1, \\ 1, & r=1 \\ 0, & |r|<1, \\ \text{不定}, & r\leqslant -1. \end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a>0.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \infty, & n>m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m, (a_0\neq 0, b_0\neq 0)。 \\ 0, & n<m, \end{cases}$$

(2)重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}。$$

(3)常用等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\mathrm{tg}x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\arcsin x\sim x$，$\mathrm{arctg}x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$，$\mathrm{e}^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$。

在利用等价无穷小求极限时，一般来讲，仅适用于函数是乘积形式，而对于函数是和式情形，通常是不能使用等价无穷小的，例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2},$$

但下面的做法是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^2} = 0。$$

(4)极限重要性质和定理

两边夹定理，单调有界数列必有极限，有界量与无穷小量乘积仍为无穷小等等。

(5)罗必达法则

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbook.com