高等院校教材同步辅导及考研复习用书

Spark 星火·燎原

丛书主编 马德高

# 离散数学
# 辅导及习题精解

（左孝凌版）

本册主编 徐晓静 孙明灿

LISAN SHUXUE

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

延边大学出版社
Yanbian university press

丛书主编 马德高

Spark® 星火·燎原

# 离散数学
# 辅导及习题精解

（左孝凌版）

本册主编 徐晓静 孙明灿

副主编 王 耘 孙 倩 夏 岩 燕德丽

LISAN SHUXUE

延边大学出版社
Yanbian university press

**图书在版编目(CIP)数据**

离散数学辅导及习题精解 ：左孝凌版 / 马德高主编
. -- 延吉 ：延边大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5634-1790-2

Ⅰ. ①离… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①离散数学—高等学校—
教学参考资料 Ⅳ. ①0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 136227 号

**离散数学辅导及习题精解**

---

**主编**：马德高
**责任编辑**：林景浩
**出版发行**：延边大学出版社
**社址**：吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**：133002
**网址**：http://www.ydcbs.com
E-mail：ydcbs@ydcbs.com
**电话**：0433-2732435　　**传真**：0433-2732434
**印刷**：莱州市电光印刷有限公司
**开本**：880×1230　1/32
**印张**：9.5　**字数**：270 千字
**版次**：2012 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-5634-1790-2

---

**定价**：23.80 元

# 前言

离散数学是计算机科学中的重要理论之一，是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程。离散数学以研究离散变量的结构和相互关系为主要目标，着重培养学生的抽象思维和逻辑推理能力，为学生提高专业理论水平打下坚实的数学基础。

我们编书的目的是给学习离散数学的读者，提供一些解题方法的指导和给出课后习题的一个参考解答。

为了方便读者使用，书中各章节次序和习题编号均与原教材相一致，共分九章，内容包含命题逻辑，谓词逻辑，集合与关系，函数，代数结构，格和布尔代数，图论，形式语言与自动机和纠错码初步。每章必包含三部分：本章知识结构及内容小结，经典例题解析和本章教材习题全解，针对部分高校把离散数学作为研究生入学考试的科目之一，部分章中加入了历年考研真题评析。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色。

一、**知识梳理清晰、简洁**：直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、**能力提升迅速、持续**：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高

效结合、浑然一体，一举完成。

三、内容深入浅出、易学易用：为适应广大学子的不同需求，本书进行了科学的编排，方便考生不仅可以在有教师指导的情况下使用更是自学备考的必备用书。



本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。有好的意见或建议可以发邮件至 xuxiaojing@sdjzu. edu. cn。

编者

# 目 录

# 第 1 章 命题逻辑

## 本章知识结构及内容小结

【内容提要】

一、知识点

1. 命题的概念、表示方法，联结词的逻辑意义。

2. 命题公式的递归定义，自然语言翻译成命题公式。

3. 真值表的构造，命题公式等价、重言式与蕴含式的概念，逻辑等价与逻辑蕴含的意义和证明方法，常用的逻辑等价公式和逻辑蕴含公式。

4. 联结词功能完全组的定义。

5. 命题公式的对偶式、析取范式、合取范式、主析取范式与主合取范式的定义与求解。

6. 命题逻辑的推理理论。

二、重点

1. 命题和联结词，常用联结词的真值表，命题符号化。

2. 合式公式的定义，永真式、永假式、可满足式的定义，公式与真值表的关系与构造方法。

3. 两个公式等价的定义，常用等价式，用等价式演算证明两个公式等价，用等价式演算解决实际问题。

4. 联结词功能完全组的定义。

5. 析取范式、合取范式、主析取范式、主合取范式的定义，主析取范式和主合取范式之间的关系，用等价式演算和真值表求公式的主析取范式和主合取范式、判断公式的类型(用真值表、等价式演算、主析取范式或主合取范式判断公式是不是永真式、永假式、可满足式)。

6. 逻辑推论的定义，判断推理的正确性，构造推理的证明，主要的推理方法：真值表法、直接证明法、间接证明法。常用推理规则：$P$ 规则、$T$ 规则、$CP$ 规则。

7. 命题逻辑的应用示例。

三、难点

1. 正确地进行命题符号化，尤其需要注意逻辑联结词与日常自然用语中的有关联结词的共同点和不同点及正确地使用条件联结词以及两个表达“或”的两种逻辑意义。

2. 判断公式的类型，判断等价式是否成立，判断逻辑推论关系是否成立。

3. 求公式的主析取范式和主合取范式。

4. 构造推理的证明(包括使用附加前提证明法、归谬法)。

四、内容提要

**命题:** 具有非真必假(不可兼)的陈述句。

**真值:** 一个命题总具有一个"值",称为真值。真值只有真和假两种,分别记为 $T$ 和 $F$。



**原子命题:** 不能分解为更简单的陈述句。

**复合命题:** 由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题。

**命题标识符:** 大写字母、带下标的大写字母、数字等表示命题的符号。

**命题常量:** 一个表示确定命题的命题标识符。

**命题变元:** 仅表示任意命题的位置标志的命题标识符。

**原子变元:** 表示原子命题的命题变元。

**指派:** 当命题变元 $P$ 用一个特定的命题取代时,$P$ 才能确定真值,也称对 $P$ 进行指派。

**真值表:** 在命题公式中,对每一个命题变元的每一种可能的真值指派,以及由此确定出的命题公式的真值所列成的表。

引进五个特定的符号表示五个常用联结词,它们是$\neg$(否定)、$\wedge$(合取)、$\vee$(析取)、$\rightarrow$(条件)、$\rightleftarrows$ 或 $\leftrightarrow$(双条件),此处还有四个其他联结词$\overline{\vee}$、$\xrightarrow{c}$、$\downarrow$ 和 $\uparrow$。五个常用联结词及$\overline{\vee}$、$\xrightarrow{c}$、$\downarrow$ 和 $\uparrow$ 的真值表如表 1－1 和表 1－2 所示。

**表 1－1**

| $P$ | $\neg P$ |
|---|---|
| $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ |

**表 1－2**

| $P$ | $Q$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \rightarrow Q$ | $P \rightleftarrows Q$ | $P \overline{\vee} Q$ | $P \xrightarrow{c} Q$ | $P \downarrow Q$ | $P \uparrow Q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

**原子命题公式:** 单个命题变元和命题常元称为原子命题公式,简称原子公式。

**命题公式(合式公式):** 定义如下:

(1) 单个原子公式是合式公式;

(2) 如果 $A$ 是合式公式,则$\neg A$ 是合式公式;

(3) 如果 $A$ 和 $B$ 是合式公式,则$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$ 和$(A \rightleftarrows B)$ 都是合式

公式；

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)，(2)，(3) 所得到的包含命题变元，联结词和括号的符号串是合式公式。

**逻辑相等**：给定两个命题公式 $A$ 和 $B$，设 $P_1,P_1,\cdots,P_n$ 为所有出现在 $A$ 和 $B$ 中的原子变元，若给 $P_1,P_1,\cdots,P_n$ 任一组真值指派，$A$ 和 $B$ 的真值都相同，则称 $A$ 和 $B$ 是等价的或逻辑相等，记为 $A\Leftrightarrow B$。

**子公式**：如果 $X$ 是合式公式 $A$ 的一部分，且 $X$ 本身也是一个合式公式，则称 $X$ 是公式 $A$ 的子公式。

**置换原则**：设 $X$ 是合式公式 $A$ 的子公式，若 $X\Leftrightarrow Y$，如果将 $A$ 中的 $X$ 用 $Y$ 来置换，所得公式 $B$ 与公式 $A$ 等价，即 $A\Leftrightarrow B$。

**重言式**：给定命题公式 $A$，若对分量的任一指派，其对应的真值永为 $T$，则称命题公式 $A$ 为重言式或永真式。

**矛盾式**：给定命题公式 $A$，若对分量的任一指派，其对应的真值永为 $F$，则称命题公式 $A$ 为矛盾式或永假式。

**可满足式**：给定命题公式 $A$，若对分量进行指派，至少存在一个真值为 $T$，则称命题公式 $A$ 为可满足式。

**蕴含式**：当且仅当 $P\rightarrow Q$ 是一个重言式时，称 $P$ 蕴含 $Q$，并记为 $P\Rightarrow Q$。

**联结词功能完全组**：对于任何一个命题公式，都能由仅含这些联结词构成的命题公式等价表示，而使用比这些联结词再少的联结词所构成的命题公式不能对给定的公式作等价表示，这样的联结词组就是联结词功能完全组。

**对偶式**：在给定的仅含有$\neg$，$\wedge$，$\vee$ 的命题公式中，将 $\vee$ 换成 $\wedge$，将 $\wedge$ 换成 $\vee$，$T$ 和 $F$ 互换，所得公式 $A^*$ 称为 $A$ 的对偶式。

**合取范式**：具有型式为 $A_1\wedge A_2\wedge\cdots\wedge A_n(n\geqslant 1)$ 的一个命题公式，其中 $A_1$，$A_2,\cdots,A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的析取式。

**析取范式**：具有型式为 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n(n\geqslant 1)$ 的一个命题公式，其中 $A_1$，$A_2,\cdots,A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的合取式。

**小项**：$n$ 个命题变元的合取式，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

**大项**：$n$ 个命题变元的析取式，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

**主析取范式**：对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式。

**主合取范式**：对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式。

**有效结论**：设 $A$ 和 $C$ 是两个命题公式，当且仅当 $A\rightarrow C$ 为一重言式，即 $A\Rightarrow C$，称 $C$ 是 $A$ 的有效结论。或 $C$ 可由 $A$ 逻辑地推出。这里 $A$ 可以有 $n$ 个前提 $H_1,H_2,\cdots,H_n$，即 $A=H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_n$。

**$P$ 规则**：前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

**$T$ 规则**：在推导中，如果有一个或多个公式，重言蕴含着公式 $S$，则公式 $S$ 可以引入

推导之中。

**相容**:假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_m$,对于 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 的一些真值指派,如果能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 的真值为 $T$,称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是相容的。

**不相容**:假设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 中的命题变元为 $P_1,P_2,\cdots,P_m$,对于 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 的每一组真值指派,使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 的真值均为 $F$,称公式 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 是不相容的。

**直接证法**:由一组前提,利用一些公认的推理规则,根据已知的等价或蕴含公式,推演得到有效的结论。

**间接证法**:

(1) 要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$,只要证明 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 与 $\neg C$ 不相容。

(2) 要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow (R \rightarrow C)$,如能证明 $(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge R) \Rightarrow C$,即证得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow (R \rightarrow C)$,这个证明称为 $CP$ 规则。

**定理 1.1**:任何两个重言式(矛盾式)的合取或析取,仍是一个重言式(矛盾式)。

**定理 1.2**:一个重言式(矛盾式),对同一分量都用任何合式公式置换,其结果仍为一重言式(矛盾式)。

**定理 1.3**:设 $P,Q$ 为两个命题公式,$P \Leftrightarrow Q$ 当且仅当 $P \rightleftarrows Q$ 为一个重言式。

**定理 1.4**:设 $P,Q$ 为任意两个命题公式,$P \Leftrightarrow Q$ 的充要条件是 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$。

**定理 1.5**:在真值表中,一个公式的真值为 $T$ 的指派所对应的小项的析取,即为此公式的主析取范式。

**定理 1.6**:在真值表中,一个公式的真值为 $F$ 的指派所对应的大项的合取,即为此公式的主合取范式。

## 经典例题解析

**例 1** 符号化下列命题。

(1) 张三和李四是兄弟。

(2) 除非 4 是奇数,否则 5 不是奇数。

(3) 如果晚上做完作业且没有其他的事,他就会去看电视或听音乐。

【分析】 给定一个命题进行符号化,就是要把这个命题表达成合乎规定的命题表达式,因此在具体表达时,首先要列出原子命题,然后根据给定命题的含义,把所设的原子命题用适当的联结词连接起来,在这个过程中,确定原子命题和选用联结词,主要应根据命题的实际含义,而不拘泥于原句形式,如在本题(1) 中:需要区分联结词“和”的实际意义,是联结的两个独立的句子还是句子成分,在(2) 中,这个句子的实际含义是,5 是奇数必定推出 4 是奇数,至于 4 是奇数时 5 是不是奇数,在命题中未曾涉及。所以 4 是奇数是 5 是奇数的必要条件。此外,在命题符号化的过程中,必须注意消除自然语言中的歧义性,例如在(3) 中,看电影或听音乐,可以是兼而有之,也可以是或此则

彼。所以在进行符号翻译时，必须明确含义，以便确定是选用联结词$\overline{\vee}$还是选用联结词$\vee$。总之，对于具有歧义性的自然语言，在进行命题符号化以前，必须明确含义，删除歧义，这是命题翻译的关键之点。

解:(1) 设 $P$:张三和李四是兄弟。

$$P$$

(2) 设 $P$:4 是奇数。$Q$:5 是奇数。

$$Q \to P$$

(3) 设 $P$:他晚上做完了作业。$Q$:他晚上没有其他事情。$L$:他看电视。$M$:他听音乐。

$$(P \wedge Q) \to (L \overline{\vee} M)$$



例 2　求公式$(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$的所有成真赋值和成假赋值。

【分析】　可以用两种方法求公式的成真赋值和成假赋值。一种是真值表法，另一种是主范式法。在公式的主析取范式中包含多少小项，该公式就有多少成真赋值，其中的每个小项的成真赋值就是公式的成真赋值。在公式的主析取范式中包含多少大项，该公式就有多少成假赋值，其中的每个大项的成假赋值就是公式的成假赋值。

解:解法一:公式$(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$的真值表如表 1－3 所示。

**表 1－3**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \overline{\vee} Q$ | $(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |

由真值表可以看出，当 $PQR$ 赋值为 $TTT$，$TFF$，$FTF$，$FFT$ 时公式为真，当 $PQR$ 赋值为 $TTF$，$TFT$，$FTT$，$FFF$ 时公式为假。总结为当赋值中有奇数个 $T$ 时，公式为真，当赋值中有偶数个 $T$ 时，公式为假。

解法二:公式$(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$的主析取范式如下:

$(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$

$\Leftrightarrow((P \overline{\vee} Q) \wedge \neg R) \vee (\neg(P \overline{\vee} Q) \wedge R)$

$\Leftrightarrow(((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge \neg R) \vee (\neg((P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)) \wedge R)$

$\Leftrightarrow(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge R)$

$\Leftrightarrow(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge P \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (Q \wedge \neg Q \wedge R)$

$\Leftrightarrow(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$

主析取范式中小项$(P \wedge Q \wedge R)$,$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$,$(\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$,$(\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$的成真赋值分别为 $TTT$,$TFF$,$FTF$,$FFT$,它们即为公式$(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$的所有成真赋值,其余赋值 $TTF$,$TFT$,$FTT$,$FFF$ 即为公式$(P \overline{\vee} Q) \overline{\vee} R$的所有成假赋值。也可以通过主合取范式求成真赋值和成假赋值。

**例 3** 判断下列公式的类型。

(1) $(P \rightarrow Q) \rightleftarrows P$。

(2) $\neg(Q \rightarrow P) \wedge P$。

(3) $(P \vee Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$。

【分析】 可以用三种方法判断公式的类型。第一种方法是真值表法。若真值表的最后一列全是 $T$,则该公式是永真式;若真值表的最后一列全是 $F$,则该公式是永假式;若真值表的最后一列既有 $T$ 又有 $F$,则该公式为非永真的可满足式。第二种方法是公式演算法。若该公式等价于 $T$,则它是永真式;若该公式等价于 $F$,则它是永假式。第三种方法是主范式法。设公式中有 $n$ 个命题变元。若该公式的主析取范式中包含了所有的 $2^n$ 个小项,则该公式是永真式;若该公式的主析取范式不包含任何的小项,则该公式为永假式;若该公式的主析取范式中包含小项的数目是小于 $2^n$ 的正整数,则该公式是非永真的可满足式。也可以通过公式的主合取范式判断它的类型。若该公式的主合取范式中包含了所有的 $2^n$ 个大项,则该公式是永假式;若该公式的主合取范式不包含任何的大项,则该公式为永真式;若该公式的主析取范式中包含大项的数目是小于 $2^n$ 的正整数,则该公式是非永真的可满足式。

**解**:解法一:题中公式的真值表如表 1－4— 表 1－6 所示。

**表 1－4**

| $P$ | $Q$ | $P \rightarrow Q$ | $(P \rightarrow Q) \rightleftarrows P$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ |

表 1－5

| $P$ | $Q$ | $Q\rightarrow P$ | $\neg(Q\rightarrow P)\wedge P$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $F$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ |

表 1－6

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P\vee Q$ | $P\vee Q\rightarrow R$ | $P\rightarrow R$ | $(P\vee Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |

在公式$(P\rightarrow Q)\rightleftarrows P$的真值表的最后一列既有$T$又有$F$，因此$(P\rightarrow Q)\rightleftarrows P$是非永真的可满足式。公式$\neg(Q\rightarrow P)\wedge P$的真值表的最后一列全是$F$，因此$\neg(Q\rightarrow P)\wedge P$是永假式。公式$(P\vee Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R)$的真值表的最后一列全是$T$，因此$(P\vee Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R)$是永真式。

解法二：(1) $(P\rightarrow Q)\rightleftarrows P\Leftrightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow P)\wedge(P\rightarrow(P\rightarrow Q))$

$\Leftrightarrow(\neg(\neg P\vee Q)\vee P)\wedge(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee P)\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge(\neg P\vee Q)$

$\Leftrightarrow P\wedge Q$

显然$P\wedge Q$是非永真的可满足式，因此$(P\rightarrow Q)\rightleftarrows P$是非永真的可满足式。

(2) $\neg(Q\rightarrow P)\wedge P\Leftrightarrow\neg(\neg Q\vee P)\wedge P\Leftrightarrow(\neg P\wedge Q)\wedge P\Leftrightarrow(\neg P\wedge P)\wedge Q\Leftrightarrow F\wedge Q\Leftrightarrow F$

因此$\neg(Q\rightarrow P)\wedge P$是永假式。

(3) $(P \vee Q \to R) \to (P \to R)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee \neg P \vee R$

$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg P \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow T \wedge T$

$\Leftrightarrow T$

因此$(P \vee Q \to R) \to (P \to R)$ 是永真式。

解法三:(1) $(P \to Q) \rightleftarrows P \Leftrightarrow P \wedge Q$,即$(P \to Q) \rightleftarrows P$ 的主析取范式包含一个小项,因此$(P \to Q) \rightleftarrows P$ 是非永真的可满足式。

(2) $\neg(Q \to P) \wedge P \Leftrightarrow \neg(\neg Q \vee P) \wedge P \Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \wedge P$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (P \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

因为$\neg(Q \to P) \wedge P$ 的主合取范式包含了所有的 4 个大项,所以$\neg(Q \to P) \wedge P$ 是永假式。$\neg(Q \to P) \wedge P$ 的主析取范式不包含任何小项。

(3) $(P \vee Q \to R) \to (P \to R)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \vee R) \vee (\neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg R) \vee \neg P \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R) \vee \neg P \vee R$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$
$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q$
$\wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q$
$\wedge R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

因为$(P \vee Q \to R) \to (P \to R)$ 的主析取范式包含了所有的 8 个小项,所以$(P \vee Q \to R) \to (P \to R)$ 是永真式。$(P \vee Q \to R) \to (P \to R)$ 的主合取范式不包含任何大项。

**例 4** 证明 $P \to (Q \to R) \Rightarrow (P \to Q) \to (P \to R)$。

【分析】 可以用三种方法证明蕴含式的成立。第一种方法是直接证法,即假设前提为真推得结论为真。第二种方法是反证法,即假设蕴含式的后件为假,推得蕴含式的前件为假。第三种方法是利用蕴含式的定义,即求证$S \Rightarrow C$,也就是证明条件式$S \to C$为永真。对于具体应用上面三种方法证明时,可以采用列真值表法、逻辑推证、公式法等

各种不同的论证方法。

证明：证法一：使用真值表证明。公式 $P \to (Q \to R)$，$(P \to Q) \to (P \to R)$ 和 $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 的真值表如表 1－7 所示。

**表 1－7**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $Q \to R$ | $P \to (Q \to R)$ | $P \to Q$ | $P \to R$ | $(P \to Q) \to (P \to R)$ | $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |

a) 直接证法：$P \to (Q \to R)$ 的真值有七种为 $T$，对应指派下 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 的真值均为 $T$。

b) 反证法：$(P \to Q) \to (P \to R)$ 的真值有一种为 $F$ 时，对应指派下 $P \to (Q \to R)$ 的真值均为 $F$。

c) 条件永真式：$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$ 的真值均为 $T$，即为永真式。

证法二：逻辑推证。

a) 直接证法：设 $P \to (Q \to R)$ 为 $T$，则

(1) $P$ 为 $T$，$Q \to R$ 为 $T$，有三种情况：

① $P$ 为 $T$，$Q$ 为 $T$，$R$ 为 $T$，则 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

② $P$ 为 $T$，$Q$ 为 $F$，$R$ 为 $T$，则 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

③ $P$ 为 $T$，$Q$ 为 $F$，$R$ 为 $F$，则 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

(2) 若 $P$ 为 $F$，$(Q \to R)$ 为 $F$，则 $P$ 为 $F$，$Q$ 为 $T$，$R$ 为 $F$，所以 $(P \to Q)$ 为 $T$，$(P \to R)$ 为 $T$，得 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

(3) 若 $P$ 为 $F$，$(Q \to R)$ 为 $T$，有三种情况：

① $P$ 为 $F$，$Q$ 为 $T$，$R$ 为 $T$，得 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

② $P$ 为 $F$，$Q$ 为 $F$，$R$ 为 $F$，得 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

③ $P$ 为 $F$，$Q$ 为 $F$，$R$ 为 $T$，得 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

综上所述，当 $P \to (Q \to R)$ 为 $T$ 时，必有 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $T$。

b) 间接证法：设 $(P \to Q) \to (P \to R)$ 为 $F$，则必有 $P \to Q$ 为 $T$，$P \to R$ 为 $F$，故得 $P$ 为 $T$，$Q$ 为 $T$，$R$ 为 $F$。所以 $P \to (Q \to R)$ 为 $F$。

证法三：公式法。

$S \Leftrightarrow (P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \to ((\neg P \vee Q) \to (\neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q \vee R) \vee (\neg(\neg P \vee Q) \vee (\neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((P \wedge \neg Q) \vee \neg P \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee ((\neg P \vee R \vee P) \wedge (\neg Q \vee \neg P \vee R))$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee \neg(P \wedge Q \wedge \neg R) \Leftrightarrow T$

例5 证明$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$。

【分析】 可以用三种方法来判断两个公式等价。第一种方法是真值表法，列出两个公式的真值表加以比较即可，若两个公式中出现的命题变元不完全相同，则在列真值表时需要考虑在两个公式中出现的所有命题变元。第二种方法是公式法，若能将一个公式通过等价式演算化为另一个公式，或者将两个公式通过等价演算化为同一个公式，则这两个公式等价。第三种方法是主范式法，将两个公式同时化为主析取范式（或主合取范式），若范式相同，则它们等价。若两个公式中出现的命题变元不完全相同，则在化主范式时需要考虑在两个公式中出现的所有命题变元。

解：解法一：$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee R)$和$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$的真值表见表1－8所示。并将$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee R)$记为$A$，$(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee (P \wedge R)$记为$B$。

**表1－8**

| $P$ | $Q$ | $R$ | $P \vee Q$ | $Q \vee R$ | $R \vee P$ | $A$ | $P \wedge Q$ | $Q \wedge R$ | $R \wedge P$ | $B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |

由真值表可以看出，$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R$ $\vee (P \wedge R)$。

解法二：通过等价公式演算将$(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge (P \vee R)$化为$(P \wedge Q$