Methods of Mathematical Physics for Civil Engineering

数学物理方法

（土建类）

樊洪明　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

本书系统地阐述了数学物理方法的基本理论及其在土建类专业中的应用．全书分为复变函数理论、积分变换理论以及数学物理方程与特殊函数理论三篇，系统地介绍了数学物理方法的基本理论和基本方法．本书并不一味追求数学的严密性和逻辑性，而是尽量为读者提供与数学物理方法有关的基本概念、基本定理和解决实际问题的方法．本书层次清晰，深入浅出，便于自学.

本书可作为高等学校土建类相关专业研究生教材，也可作为工科相关专业的本科教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法：土建类/樊洪明编著．—北京：机械工业出版社，2012.3

ISBN 978-7-111-37576-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①樊…　Ⅲ.①数学物理方法－研究生－教材
Ⅳ.①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 031616 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
策划编辑：刘　涛　责任编辑：刘　涛　李　帅　郑　玫
版式设计：霍永明　责任校对：王　欣　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2012 年 5 月第 1 版第 1 次印刷
169mm×239mm·20.5 印张·420 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-37576-0
定价：37.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
社服务中心：(010)88361066
销售一部：(010)68326294
销售二部：(010)88379649
读者购书热线：(010)88379203

网络服务
门户网：http://www.cmpbook.com
教材网：http://www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

前　言

数学物理方法这门课程既是数学课，又是物理课，既具有数学的严谨性和理论性，又具有广泛的实用性和工具性，因此需要有足够的数学和物理基础．作为土建类专业的数学物理方法，其主要目的是为学生进一步学习后续课程提供必要的数学基础，并为学生进一步深造创造条件．作为一本工程数学教材，不可能把所有主要的内容都没有遗漏地吸收进来，如何根据土建类专业自身的特点，用较少篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚，这是编者一直感到棘手的难题．为此，本书结合教学实际，力求阐述简明，条理清晰，重点揭示数学概念和方法的物理背景，介绍必要的理论，例题和习题切合土建类专业学生的特点和需要，突出解题方法．

本书包括讲授内容、习题课以及学生自己阅读和提高的内容，作为教材，具有既便于教、又便于学的特点，有些内容可由教师根据学生基础和专业灵活地进行教学．工科专业学生，一般不喜欢数学上繁琐的证明，但却常常追求“严谨”，为此，在叙述问题时注意层次、条理和直观，语言力求深入浅出，以期学生从已掌握的高等数学知识平滑过渡到本课程．

本书分为三篇：第一篇介绍复变函数理论，从一般复变函数引入解析函数，然后依次介绍解析函数的积分、级数、留数等；第二篇介绍傅里叶变换、拉普拉斯变换以及 Z 变换；第三篇是数学物理方程与特殊函数理论，首先导出三类数学物理方程并给出定解条件，之后重点介绍分离变量法，在曲面坐标系中分离变量并介绍特殊常微分方程的级数解法，在此基础上介绍特殊函数，最后介绍了格林函数法和保角变换法．

本书中引文主要取自参考文献［1］～［22］，对所有参考文献编著者表示深深的谢意！本书初稿承哈尔滨工业大学何钟怡教授审阅，在此特致谢意！由于笔者水平有限，错讹在所难免，敬请广大读者和专家学者不吝批评指正．

编著者

目　　录

第三篇 数学物理方程与特殊函数理论

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一篇　复变函数理论

复变函数论诞生于18世纪，在19世纪得到全面发展．复变函数论以其完美的理论和精湛的技巧成为数学的一个重要组成部分．19世纪的数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一．复变函数理论广泛应用于科学和工程领域．在土木工程领域，例如在弹性动力学、水力学、流体力学以及传热传质学等方面都发挥了重要作用，已成为解决工程实际问题的有效工具.

第1章　复数和复变函数

1.1　复数及其运算

1. 复数

形如 $z=x+iy$ 的数称为复数，其中 x 和 y 均为实数，i 为虚数单位，$i^2=-1$，x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记为 $x=\text{Re}z$，$y=\text{Im}z$. 特别地，当 $x=0$ 时，$z=iy$ 称为**纯虚数**.

若两个复数相等，必须且只需它们的实部和虚部分别相等．若复数 $z=0$，须且只需 z 的实部和虚部分别等于零.

复数与实数不同，两个复数不能比较大小.

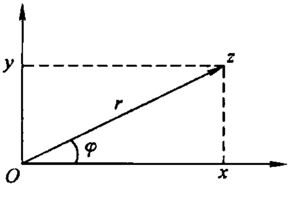

图　1.1

由于任一复数 $z=x+iy$ 与一对有序实数 $(x,\ y)$ 一一对应，所以复数 $z=x+iy$ 可以用平面直角坐标系中坐标为 $(x,\ y)$ 的点表示，复数 z 与平面上的点一一对应，如图 1.1 所示．这个平面叫做复平面或 z 平面，x 轴和 y 轴分别称为实轴和虚轴.

复数 $z=x+iy$ 还可以用从原点指向点 $(x,\ y)$ 的向量表示．采用极坐标 r 和 φ 代替直角坐标 x 和 y，易得 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\arctan\ (y/x)$ 以及 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，因此可把 z 表示为下列形式

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{1.1.1}$$

称为复数的三角形式．其中，r 称为**模**，记作 $|z|$，φ 称为复数的**辐角**，记作

Arg z.

任一非零复数有无穷多个辐角，若 φ_0 是其中之一，则

$$\mathrm{Arg}\, z = \varphi_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{1.1.2}$$

式（1.1.2）表示 z 的全部辐角. 在非零复数 z 的辐角中，把满足 $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$ 的 φ_0 称为 Arg z 的主值，记为 $\varphi_0 = \mathrm{Arg}\, z$. 需要指出，当 $z=0$ 时，$|z|=0$，但辐角没有明确意义.

利用欧拉（Euler）公式

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.1.3}$$

可将任一非零复数 $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ 表示为指数形式

$$z = re^{i\varphi} \tag{1.1.4}$$

欧拉公式将复数的三角形式与指数形式联系起来. 将 e，π，i，1 这四个看似无关的数，极其美妙地联系起来. 例如，$i = e^{i\pi/2}$，$-1 = e^{i\pi}$.

复数 $z = x + iy = re^{i\varphi}$ 和 $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$ 互为**共轭复数**.

2. 复数运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$，$z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$，则有

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

复数的四则运算满足交换律、结合律和分配律. 应当指出，复数相加与向量相加的规律相同，由于力、速度、加速度等物理量可以用向量表示，所以也可以用复数表示这些物理量.

3. 扩充复平面与复球面

除了用平面上的点或向量表示复数以外，还可以借鉴地图制图学中的测地投影法，用球面上的点表示复数. 取一个与复平面相切于原点 S 的球面，过点 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N，称点 N 为北极，而点 S 为南极，如图 1.2 所示.

设 z 是复平面上任意一点，N 与 z 的连线与球面相交于点 P，令 P 与 z 相对应，则除点 N 之外，球面上的点与复平面上的点一一对应，这样的球面称为**复球面**. 复平面上以原点为中心的圆周 C 与复球面上 P 点所在的纬线相对应，设想复平面上的点 z 沿着某一条通过原点的曲线向无穷远处移动，则复球面上点 P 将沿着相应某种曲线向北极点 N 逼近. 因此，北极 N 可以看做是与复平面上的一个模为无穷大，辐角不定的假想点相对应，这个假想点称为**无穷远点**，记作 ∞. 包括无穷远点

在内的复平面称为**扩充复平面**．复球面能把扩充复平面的无穷远点直观地表示出来．

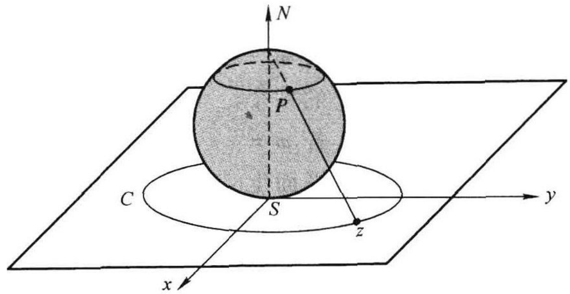

图　1.2

习　题

1. 写出下列复数的实部、虚部、模和幅角，并写出它们的指数式和三角式

(1) $-1-\sqrt{3}\mathrm{i}$；(2) $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$；(3) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$；

(4) -1；(5) $-\mathrm{i}$；(6) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}R\sin\theta}$（$R$，$\theta$ 为常数）．

2. 计算下列复数

(1) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$；(2) $(1+\mathrm{i})^3$；(3) $\sqrt{\mathrm{i}}$；(4) $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$；(5) $\sqrt{a+b\mathrm{i}}$（a，b 为实常数）．

3. 证明下列关系

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；(2) $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=2\mathrm{Re}\,(z_1\overline{z_2})=2\mathrm{Re}\,(z_2\overline{z_1})$；

(3) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$；(4) $\mathrm{Re}\,z\leqslant|z|$．

1.2　复变函数

1. 复变函数定义

若复变量 z 在复平面上某个范围内取值时，通过某种规则，复变量 w 也随之取值，称 w 为 z 的**复变函数**，记作 $w=f(z)$．这里 z 称为 w 的**宗量**，z 和 w 均取复数值，$z=x+\mathrm{i}y$，$w=u+\mathrm{i}v$. 若宗量 z 的每一个值只有一个 w 与之对应，称此函数为**单值函数**，否则为**多值函数**．本书以后章节中如无特别声明，均指单值函数.

设 C 是 z 平面上以原点为圆心，半径为 2 的上半平面内的半圆周，研究经复变函数 $w=z^2$ 作用后，在 w 平面上对应的图像．为此，令 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，$w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，由 $w=z^2$，易得 $\rho=r^2$，$\theta=2\varphi$. 因此，w 平面上对应的图像为以原点为圆心，半径为 4 的圆周，如图 1.3 所示.

就几何意义上而言，复变函数与实变函数差别很大．在高等数学中，通常利用函数图像直观地理解和研究实变函数的性质．但在复变函数中，宗量和因变量均为

复数，无法通过同一平面或同一空间上的几何图形来表示，因此复变函数的几何意义是两个复平面上点集之间的对应关系．若用 z 平面上的点表示函数 w 的值，则函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看做是 z 平面上的一个点集到 w 平面的一个点集的映射．若 $w=f(z)\neq$ 常数，通常 $w=f(z)$ 可把 z 平面上的点（曲线，区域）映射成 w 平面的点（曲线，区域），w 称为 z 的**像**，z 称为 w 的**原像**.

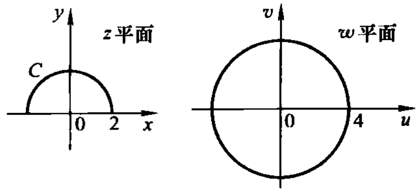

图　1.3

2. 区域及相关概念

一般情况下复变函数 $w=f(z)$ 的定义限定在一个平面区域，因此在研究复变函数时，首先要明确宗量 z 在复平面上的变化范围．为此，必须准确理解区域及相关概念.

1）**邻域**．以 z_0 为圆心，以任意小的正整数 ε 为半径作圆，则满足 $|z-z_0|<\varepsilon$ 的所有点集称为 z_0 的 ε 邻域.

2）**去心邻域**．以 z_0 为圆心，以任意小的正整数 ε 为半径作圆，则满足 $0<|z-z_0|<\varepsilon$ 的所有点集称为 z_0 的一个 ε 去心邻域.

3）**内点**．对于平面点集 G，设 z_0 属于 G，若 z_0 及其邻域均属于 G，称 z_0 为 G 的内点.

4）**外点**．若 z_0 及其邻域均不属于 G，称 z_0 为 G 的外点.

5）**开集**．若点集 G 内的每个点都是内点，称 G 为开集.

6）**区域**．简单地说，区域就是宗量 z 的取值范围．若某点集全部由内点组成，该点集中的任意两点可以用一条折线连接起来，且折线上的点全都属于该点集，则该点集构成区域.

7）**边界点和边界**．在 z_0 的任意一个邻域内，既有区域 D 的点，也有不属于区域 D 的点，称 z_0 为区域 D 的边界点，由 D 的全体边界点所组成的点集称为 D 的边界.

8）**闭区域和开区域**．区域 D 及其边界所组成的点集称为闭区域．与闭区域相比，不含边界的区域 D 称为开区域.

9）**简单曲线**．设曲线 L：$z(t)=x(t)+iy(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$，对于介于 a 和 b 之间的 t_1 和 t_2，当 $t_1\neq t_2$ 时，$z(t_1)=z(t_2)$，则点 $z(t_1)$ 称为曲线 L 的重点，没有重点的连续曲线称为简单曲线.

10）**简单闭曲线**．简单曲线 L 的两个端点重合，即为简单闭曲线.

11）**单连通域和复连通域**．在区域 D 内任意作一条简单闭曲线，若该曲线内部总属于 D，则称 D 为单连通域．若区域不是单连通域就成为复连通域．简单地说，单连通域是“无洞”的区域，而复连通域是“有洞”的区域.

12）**复连通域单连通化**．适当作一些割线，可将复连通域不连接的边界线连接起来，如图 1.4b.

13）**边界的正方向**．通常规定，当沿着边界环行时，所包围的区域始终在左手侧，则绕行的方向为边界正方向．对于有界的单连通域，逆时针方向即为正方向．复连通域单连通化后，外围逆时针方向为正方向，内部顺时针方向为正方向，如图 1.4. 与边界正方向相反的方向即为边界负方向，例如边界曲线 C 的负方向记作 C^-.

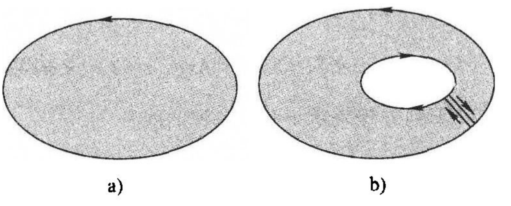

图　1.4

3. 复变函数的极限和连续

因为复数可以用实部和虚部表示，复数的研究可归结为一对实数的研究，而 $w=f(z)$ 是复变量 z 的函数，实际上就是实变量 x，y 的函数

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

因此，复变函数的研究可以归结为一对实二元函数的研究，实变函数理论中的某些定义、公式和定理可直接套用到复变函数中来.

1）**极限**．设 $w=f(z)$ 在 z_0 的某一去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义．对于任意小的正数 $\varepsilon>0$，相应地总存在 $\delta>0$，使得 $0<|z-z_0|<\delta$（$0<\delta\leq\rho$）时，有 $|f(z)-a|<\varepsilon$ 成立，则称 a（确定的常数）为函数 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记为 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a$.

强调指出，$z=x+\mathrm{i}y$ 趋向于 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，相当于 $x\to x_0$，$y\to y_0$. 复变函数的极限比一元实极限的 $x\to x_0$ 要苛刻得多，因为后者只须从沿 x_0 的左右两个方向逼近即可，而前者 $z\to z_0$ 的方式是任意的，即无论 z 以哪个方向以及以何种方式趋于 z_0，$f(z)$ 均趋于同一常数 a.

2）**连续**．设 z_0 属于 $w=f(z)$ 的定义域 D，且 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称函数 $f(z)$ 在 z_0 处连续．若 $f(z)$ 在区域 D 内各点均连续，则称 $f(z)$ 在区域 D 内连续.

复变函数的许多性质可通过实变函数来表达．例如，设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=a+\mathrm{i}b$ 等价于 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=a$，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=b$，$f(z)$ 在 z_0 处连续等价于 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

复变函数与实变函数具有一些相似的性质．连续函数的和、差、积、商（分母不为零）仍然连续．有界闭区域 D 上的连续函数 $f(z)$，必在 D 上一致连续，且 $|f(z)|$ 有最大值和最小值.

习　　题

1. 绘图说明下列式子在复平面上代表什么样的区域

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

(1) $|z+\mathrm{i}| \leqslant |2-\mathrm{i}|$；(2) $|z|<1$，$\mathrm{Re}\, z \leqslant 1/2$；(3) $\mathrm{Re} z^2 > 1/2$；

(4) $2 \leqslant \mathrm{Re}\, z < 4$；(5) $0 < \mathrm{Arg}\,(z-1) < \pi/4$；(6) $0 < \mathrm{Arg}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) < \pi/4$.

2. 下列方程表示 z 平面何种曲线？

(1) $\mathrm{Im}\, z^2 = 4$；(2) $|z-1| + |z+3| = 10$；

(3) $|z-5| - |z+5| = 8$；(4) $|z-\mathrm{i}| = \mathrm{Im}\, z$.

3. 分别将 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的实部和虚部分开.

4. 证明三角函数的下列关系

(1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$；

(2) $\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$；

(3) $\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.

5. 下列函数 $w=f(z)$ 分别将 z 平面上指定区域 D 映射成 w 平面上的什么区域，并画出 z 平面上和 w 平面上相应区域的示意图

(1) $w=z^3$，D 为第一象限；

(2) $w=\mathrm{e}^z$，D 为 $0<\mathrm{Im}\, z<\pi/2$ 的带型区域.

1.3　解析函数

1. 复变函数的导数

设 $w=f(z)$ 定义于区域 D，点 z_0 属于 D，若极限

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，则称函数 $f(z)$ 在点 z_0 **可导**. 该极限值称为 $f(z)$ 在点 z_0 **导数**，记作 $f'(z_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}$. 若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 中处处可导，则称 $f(z)$ 在区域 D 内可导，$f'(z)$ 称为 $f(z)$ 在区域 D 内的导数.

应当指出，上述定义中 $\Delta z\to 0$ 的方式是任意的，即当 z 在复平面上无论以何种方式趋于 z_0 时，均要求 $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 恒趋于一个有限的极限值. 与实变函数相比，复变函数的可导条件要比实变函数中一元函数的可导条件苛刻得多.

与实变函数一致，$w=f(z)$ 在点 z 可导，则其必在点 z 连续，反之则不然. 例如函数 $f(z)=\bar{z}$ 在复平面上处处连续，但处处不可导. 事实上

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\bar{z}+\overline{\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x - \mathrm{i}\Delta y}{\Delta x + \mathrm{i}\Delta y}$$

当 $\Delta x=0$，沿着 $\Delta y\to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1$.

当 $\Delta y=0$，沿着 $\Delta x\to 0$ 时，$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

所以当 $\Delta z\to 0$ 无极限，$f(z)=\bar{z}$ 处处不可导.

复变函数的导数定义，在形式上与实变函数的导数定义完全一致，复变函数与实变函数的极限运算法则也相同，因此，实变函数中关于和、差、积、商、复合函数以及反函数等的求导法则和公式可用于复变函数.

2. 复变函数导数的几何意义

如图 1.5 所示，z 的增量 $\Delta z = z - z_0$ 在 z 平面上是由 z_0 指向 z 的一个向量$\overrightarrow{z_0 z}$. 将其写成指数的形式，则 $\Delta z = |\Delta z| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$，其中，$|\Delta z|$ 表示向量$\overrightarrow{z_0 z}$的长度，幅角 φ 表示向量$\overrightarrow{z_0 z}$与水平方向的夹角. 与此相对应，将 w 平面上向量$\overrightarrow{w_0 w}$写成指数的形式，则 $\Delta w = w - w_0 = |\Delta w| \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中，$|\Delta w|$ 表示向量$\overrightarrow{w_0 w}$的长度，幅角 θ 表示向量$\overrightarrow{w_0 w}$与水平方向的夹角.

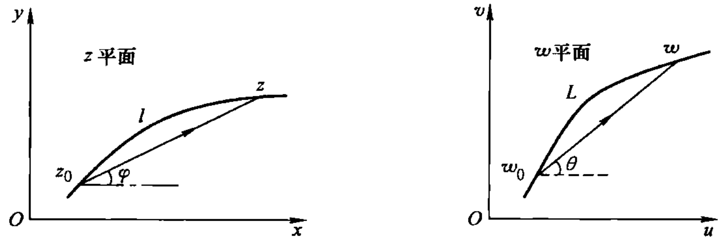

图　1.5

当点 z 沿着 z 平面上的曲线 l 趋于点 z_0 时，其对应的点 w 沿着 w 平面上的曲线 L 趋于点 w_0，而向量$\overrightarrow{z_0 z}$和向量$\overrightarrow{w_0 w}$分别趋于两条曲线在点 z_0 和点 w_0 的切线.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta - \varphi)} \right)$$

导数的模为 $|f'(z_0)| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$，表示当过点 z_0 的长度为 $|z_0 z|$ $(\Delta z \to 0)$ 的微小线段映射到 w 平面上过点 w_0 的长度为 $|w_0 w|$ 的微小线段时，该两线段长度的伸缩比.

导数的幅角 $\alpha = \operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta - \varphi$，表示在点 w_0 和点 z_0 的两条切线与水平线间的夹角差. 进一步指出，$\theta = \operatorname{Arg}(w - w_0)$ 是微小线段 Δw 与实轴 u 的夹角，$\varphi = \operatorname{Arg}(z - z_0)$ 是微小线段 Δz 与实轴 x 的夹角. 当 z 平面上的过 z_0 的微小线段 Δz 经过 $w = f(z)$ 变换为 w 平面上过 w_0 点的微小线段 Δw 时，幅角从 φ 变为 $\theta = \alpha + \varphi$. 也就是说，在变换 $w = f(z)$ 下，微小线段的幅角要由 φ 转过一个角度 α 变为幅角 θ. 若 $f'(z_0) \neq 0$，则 $f'(z_0)$ 的值与 $(z - z_0)$ 趋于零的方式无关，亦即角度 α 的大小仅与 z_0 有关，与 φ 无关.

3. 柯西-黎曼（Cauchy-Riemann，C-R）条件

设 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是复变量 $z = x + \mathrm{i}y$ 的某个定义在区域 D 内的复变函数. 当二元函数 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 给定时，则该复变函数即可完全确定. 如前所述，若 u 和 v 相互独立，即使二元函数 u 和 v 对 x 与 y 的所有偏导数都存在，函数 $w = f(z)$ 仍可能不可导. 因此，若 $w = f(z)$ 可导，其实部 u 和虚部 v 不应当相

互独立，而必须满足一定的条件.

若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点$z_0=x_0+iy_0$可导，则可设

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0) \tag{1.3.1}$$

由$\Delta f=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=\Delta u+i\Delta v$及$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$得

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y} \tag{1.3.2}$$

根据复变函数导数的定义，当$z_0+\Delta z$以任意路线趋于z_0时，式(1.3.2)恒成立. 基于此，让点$z_0+\Delta z$沿着实轴方向趋于点z_0，此时$\Delta z=\Delta x$，而$\Delta y=0$，有

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} \tag{1.3.3}$$

由式(1.3.3)可以确定，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$和$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$均存在，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}$和$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x}$，即有

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3.4}$$

同理，让点$z_0+\Delta z$沿着虚轴方向趋于点z_0，此时$\Delta z=i\Delta y$，而$\Delta x=0$，有

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\left(-i\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)+\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.3.5}$$

比较式(1.3.4)和式(1.3.5)，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3.6}$$

式(1.3.6)为关于u和v的偏微分方程，称为**柯西-黎曼方程**或**柯西-黎曼条件**，简称**C-R 条件**.

必须指出，C-R 条件只保证Δz沿实轴方向逼近零和沿虚轴方向逼近零时，$\Delta f/\Delta z$逼近同一极限，但并不能保证Δz沿着任意曲线逼近零时，$\Delta f/\Delta z$均逼近同一极限. 因此，C-R 条件只是复变函数可导的必要条件，而不是充分条件. 例如函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4} & (z\neq 0)\\ 0 & (z=0)\end{cases}$$的实部和虚部分别为

$$u(x,y)=\frac{x^5-10x^3y^2+5xy^4}{(x^2+y^2)^2},v(x,y)=\frac{y^5-10x^2y^3+5x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^6+15x^4y^2-45x^2y^4+5y^6}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y^6+25x^2y^4-35x^4y^2+5x^6}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{40x^3y^3-24x^5y}{(x^2+y^2)^3},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{40x^3y^3-24xy^5}{(x^2+y^2)^3}$$

显然有$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{y=0\\x\to 0}}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y\to 0}}=1$，$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y\to 0}}=-\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{\substack{y=0\\x\to 0}}=0$

所以在点 $z=0$ 满足 C-R 条件．当点 z 沿着实轴或虚轴趋近于零时

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{z^4}{|z|^4}=\frac{(x^2-y^2)^2-4x^2y^2+4\mathrm{i}xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\to 1$$

但是，当 z 沿着过原点的直线 $y=kx$（k 为直线斜率）趋近于零时

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{z^4}{|z|^4}=\frac{(1-k^2)^2-4k^4+4\mathrm{i}(1-k^2)}{(1+k^2)^2}$$

z 沿着不同的直线趋于零，将有不同的极限值．因此，尽管 $f(z)$ 在点 $z=0$ 满足 C-R 条件，但在点 $z=0$ 不可导.

以下给出函数在区域 D 内某点可导的充分必要条件.

设函数 $f(z)=u(x,\ y)+\mathrm{i}v(x,\ y)$ 在区域 D 内有定义，则 $f(z)$ 在 D 内一点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 可导的充分必要条件是：二元函数 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 在点 $(x_0,\ y_0)$ 可微，且满足 C-R 条件.

据此，$f(z)$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 的导数可以表示为

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1.3.7}$$

事实上，若二元函数 $u(x,\ y)$ 和 $v(x,\ y)$ 存在全微分，即

$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$，$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$. 因此有

$$\Delta f(z)=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y\tag{1.3.8}$$

根据 C-R 条件，式(1.3.8)右式第二项可化为

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

因此

$$\begin{aligned}\Delta f(z)&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta y=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)(\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z\end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 连续，所以以下极限有确定值

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}=f'(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

在极坐标系中，由 $x=r\cos\varphi$ 及 $y=r\sin\varphi$，经变换可得到极坐标下的 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}\tag{1.3.9}$$

事实上，由 $x=r\cos\varphi$ 及 $y=r\sin\varphi$ 可得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi\tag{1.3.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\varphi)+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi \tag{1.3.11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\varphi \tag{1.3.12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\varphi)+\frac{\partial v}{\partial y}r\cos\varphi \tag{1.3.13}$$

由式(1.3.10)~式(1.3.13)不难得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi$$

代入到直角坐标系中的 C-R 条件，得

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\sin\varphi=\frac{\partial v}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\cos\varphi \tag{1.3.14}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\cos\varphi=-\frac{\partial v}{\partial r}\cos\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}\sin\varphi \tag{1.3.15}$$

由式(1.3.14)和式(1.3.15)不难推得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial r}$$

4. 解析函数定义

若函数 $w=f(z)$ 在 z_0 及 z_0 某一邻域内每一点都可导，称函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 处解析．若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内每一点都解析，则称函数 $w=f(z)$ 是区域 D 内的一个解析函数.

应当指出，函数在一点解析与可导并不等价．根据上述解析函数的定义，若函数在一点解析，则函数在该点及该点的某个邻域内处处解析，即函数在该点必定可导，反之不一定成立．例如函数 $f(z)=|z|^2$，仅在 $z=0$ 点处可导，而在其他点处都不可导，所以 $f(z)=|z|^2$ 在复平面上处处不解析．可见，函数在某点处解析比在该点处可导的要求严格得多．但函数在区域 D 内解析与可导等价，因为若函数在区域 D 内解析，则该函数在 D 内处处可导．若函数 $f(z)$ 在点 z_0 不解析，则称点 z_0 是函数 $f(z)$ 的一个**奇点**．例如，函数 $f(z)=1/z$，在去除点 $z=0$ 复平面内处处可导，且

$$f'(z)=-1/z^2$$

所以函数 $f(z)$ 在去除点 $z=0$ 的复平面内处处解析，而 $z=0$ 是它的奇点.

解析函数也称为**全纯函数**或**正则函数**.

5. 已知实部或虚部求解析函数

解析函数的实部和虚部满足 C-R 条件，若已知一个解析函数 $w=u+\mathrm{i}v$ 的实部或虚部，并给定 w 在某一点 $z=z_0$ 的值 $w_0=u_0+\mathrm{i}v_0$，就可求出该解析函数的虚部或实部．事实上，由

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

根据 C-R 条件作代换，有

$$du = \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy, \quad dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

积分可得

$$u = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(\frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy\right) + u_0 \tag{1.3.16}$$

$$v = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + v_0 \tag{1.3.17}$$

式(1.3.16)和式(1.3.17)即为利用曲线积分方法，已知 v 求 u 和已知 u 求 v 的公式．积分常数 u_0 和 v_0 需根据 $w_0 = u_0 + iv_0$ 预先给定，只要端点固定，积分路径可任意选取．除了利用以上的曲线积分方法以外，还可以采用全微分方法和不定积分方法等.

【例 1.3.1】　已知解析函数 $w = f(z)$ 的实部 $u(x, y) = x^2 - y^2$，且 $f(0) = 0$，求函数 $f(z)$.

解　选取积分路径为 $(0, 0) \to (x, 0) \to (x, y)$，得

$$v = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 2y dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2x dy + v_0 = 2xy + v_0$$

$$w = f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + i(2xy + v_0)$$

由 $f(0) = 0$，可得 $v_0 = 0$. 因此，所求函数为

$$w = f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy) = (x + iy)^2 = z^2$$

【例 1.3.2】　已知解析函数 $w = f(z)$ 的虚部 $v(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$，且 $f(1) = -1$. 求函数 $f(z)$.

解　注意到 v 的分母为 $x^2 + y^2$，可考虑采用极坐标．设 $w = f(z)$ 实部和虚部分别为 $u(r, \varphi)$，$v(r, \varphi)$，有

$$v(r,\varphi) = \frac{1}{r}\sin\varphi$$

由极坐标下的 C-R 条件式，得

$$du = \frac{\partial u}{\partial r}dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi}d\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}dr - r\frac{\partial v}{\partial r}d\varphi = \frac{1}{r^2}\cos\varphi dr + \frac{1}{r}\sin\varphi d\varphi$$

$$= d\left(-\frac{1}{r}\cos\varphi\right)$$

于是

$$u = -\frac{1}{r}\cos\varphi + C$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com