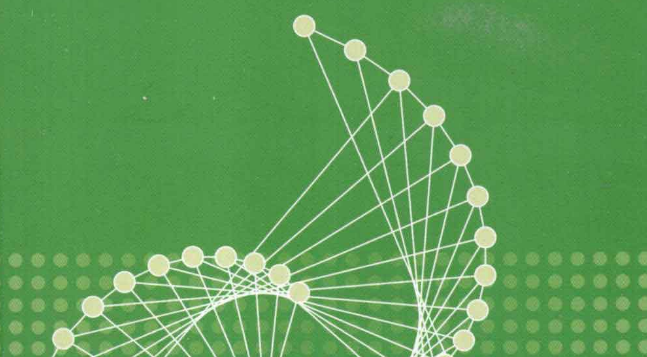
高等学校教材

工程数学

积分变换

（第五版）

东南大学数学系　张元林　编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

工程数学
积分变换

Jifen Bianhuan

（第五版）

东南大学数学系 张元林 编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书介绍Fourier变换和Laplace变换这两类积分变换的基本内容及其某些应用，初版于1978年，再版于1982年，三版于1989年、四版于2003年。本次修订在基本保持第四版的系统和结构的基础上，增添了一些内容，并加强了该书的实用性和灵活性，以适应不同专业和不同层次的要求，书中的例题与习题也作了适量的补充与调整。书后附有Fourier变换简表和Laplace变换简表，可供读者学习时查用。书中给出的习题答案可供参考。

本书可供高等学校非数学类专业本科生选作教材，也可作为工科研究生的教材或教学参考书，亦可供广大工程技术人员和科研工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.积分变换/张元林编. --5版. --北京：高等教育出版社,2012.6

ISBN 978-7-04-034765-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①张… Ⅲ.①工程数学-高等学校-教材②积分变换-高等学校-教材 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第088490号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 蒋 青　封面设计 于 涛　版式设计 余 杨
插图绘制 郝 林　责任校对 陈旭颖　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京人卫印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	850mm×1168mm 1/32		
印　　张	6.5	版　　次	1978年12月第1版
字　　数	160千字		2012年6月第5版
购书热线	010-58581118	印　　次	2012年6月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	12.10元

物 料 号　34765-00

第五版前言

本书第四版自2003年12月出版以来,被许多高等学校选为教材.经过7年多教学实践的检验,一些素不相识的读者和老师寄来了他们对本书的使用意见,除了认可和鼓励外,也提出了一些宝贵的建议和要求.所有这些无疑是本次修订要认真加以考虑的.

随着改革开放的不断深入,我国的科学技术、高等教育和经济建设都有了长足的发展,这就要求教学内容和课程设置与之相适应.加强基础课程的教材建设是不可缺少的重要环节,也是保证和提高教学质量,培养"高精尖"人才的关键.

积分变换是高等学校理工类专业学生继高等数学和复变函数之后的又一门重要的数学基础课程.学好积分变换不仅可以复习和巩固高等数学和复变函数的相关基础知识,而且又为后继课程的学习和工程技术的应用打下必要的理论基础.由此可见这门课程的教学内容和教材建设的重要性.

鉴于读者和同行们的宝贵意见与建议,在基本保持该书第四版的系统与结构的前提下,编者参阅国内外相关教材,主要作了如下修订:进一步加强基本内容,包括概念和方法的阐释,以便读者更好理解和牢固掌握;改写第四版中的个别内容,包括习题和答案中的一些错误或不当表述;进一步调整和补充适量的例题和习题,注意它们的典型性和多样性,以利于学生掌握所学内容,提高分析问题和解决问题的能力;进一步注意本课程的实用性,在第一章中增加一节多重 Fourier 变换,介绍它的概念、性质及某些应用,从而拓展 Fourier 变换的应用范围;在第二章中,将本书第四版中的§2.3与§2.4交换了次序,以便更系统地阐述求 Laplace 逆变换的方法.

对于书中有星号*的内容,可根据不同专业、不同教学时数及

不同层次要求等情况加以取舍.如不包含星号*的内容,建议使用本书的教学时数为18—20.书中有星号*的内容,虽然超出本课程的教学基本要求,但可供对此有兴趣的读者和学有余力的学生参考,从而能够扩大学生的视野.该书也可作为相关工程技术人员和科研工作者的参考用书.

一本好的教材是编者和读者,特别是使用该教材的教师们共同营造的,是很多教师多年教学实践的结果.为此,编者向他们及对本书提出宝贵意见和建议的同行们表示衷心感谢.

高等教育出版社数学分社的领导和同志们长期以来对本书的多次修订、出版都给予了大力支持,特别是李艳馥、蒋青和于丽娜对本书的近期修订和出版工作,付出了辛勤劳动.编者谨此表示深深的谢意.

限于编者水平,书中的不妥和谬误在所难免,敬请使用本书的同行和广大读者批评指正.

编者

2012年2月于南京

第四版前言

本书第三版自 1989 年 5 月出版以来，为许多院校用作教材. 经过 10 多年教学实践的检验，受到了同行和广大读者的欢迎. 同时他们也提出了宝贵的意见和建议，这也是促成本次修订的理由. 在此谨表谢忱.

此次修订的另一个动因，则是课程体系与设置、教材的建设与改革须与时俱进. 10 多年来，改革开放不断深入，我国经济建设和科学技术迅速发展，教育环境发生了很大变化，教学改革取得很大进展，本书的再次修订也是适应时代进步的必然.

高等教育出版社高等理工分社的支持又使本书的此次修订由编者和读者的愿望变成了现实. 在此同样表示感谢.

本次修订，其基本内容符合原国家教委 1995 年颁布的《工程数学课程教学基本要求》，为满足各类专业及不同层次的需求，并体现理论联系实际的原则，加强了本书的实用性. 如此更有利于学生学以致用，也可使本书成为有关专业的研究生、教师和从事相关工作的技术人员的参考用书. 在保持第三版系统和结构的前提下，本版增加了一些内容. 第一章增加了 §1.5 Fourier 变换的应用，其中给出"微分、积分方程的 Fourier 变换解法"和"偏微分方程的 Fourier 变换解法"两小节；第二章在 §2.5 Laplace 变换的应用中充实了微分方程的 Laplace 变换解法的内容，增加了"偏微分方程的 Laplace 变换解法"一小节；同时在这两章中，还调整和补充了适量的例题和习题.

积分变换应用广泛，本书只能给出一些最基本的内容和应用范例，以求举一反三之效，从而激活读者思维，开阔思路，扩大视野，增强其学习兴趣. 书中有星号 * 的内容可根据不同专业，不同教学时数等情况加以取舍. 它们也可供对此有兴趣的读者和学有

余力的学生参考.

本书第三版的编者署名为南京工学院数学教研组,而南京工学院早于1988年更名为东南大学.因此,本书第四版即如封面所署名,特此说明,以免混淆.

由于编者水平所限,书中错误或不妥之处在所难免,殷切希望使用本书的教师及广大读者批评指正,以期日后再作修订.

编者

2003年6月于南京

目　录

引　言

在数学中，为了把较复杂的运算转化为较简单的运算，常常采取一种变换手段．例如数量的乘积或商可以通过对数变换变成对数的和或差，然后再取反对数，即得到原来数量的乘积或商．这一方法的实质就是把较复杂的乘除运算通过对数变换化为较简单的加减运算（当然，上述运算是依赖于对数表来完成的）．再如解析几何中的坐标变换、复变函数中的保角变换等都属于这种情况．所谓积分变换，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换，一般是含有参变量 α 的积分

$$F(\alpha)=\int_a^b f(t)K(t,\alpha)\,\mathrm{d}t.$$

它的实质就是把某函数类 A 中的函数 $f(t)$ 通过上述积分的运算变成另一函数类 B 中的函数 $F(\alpha)$，这里 $K(t,\alpha)$ 是一个确定的二元函数，称为积分变换的核．当选取不同的积分域和变换核时，就得到不同名称的积分变换．例如变换核 $K(t,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$，积分域 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$，则有

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \quad (\omega \text{ 为实变量}),$$

变换核 $K(t,s)=\mathrm{e}^{-st}$，积分域 $(a,b)=(0,+\infty)$，则有

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \quad (s \text{ 为复变量}).$$

它们分别称为 Fourier 变换和 Laplace 变换（在应用数学中，常用的积分变换还有 Fourier 正弦变换，Fourier 余弦变换，Hankel 变换和 Mellin 变换等）．$f(t)$ 称为象原函数，$F(\alpha)$ 称为 $f(t)$ 的象函数，在一定条件下，它们是一一对应的，而且变换是可逆的．

用积分变换去解微分方程或其它方程，就如同用对数变换计算数量的乘积或商一样. 如果从原方程中直接求未知的解 y 有困难或较为复杂时，则可求它的某种积分变换的象函数 Y，然后再由求得的 Y 去找 y. 当然，这种变换的选择应当使得由原来关于 y 的方程经变换得到的关于 y 的象函数 Y 的方程是容易求解的. 一般地说，在这种变换之下，原来的偏微分方程可以减少自变量的个数直至变成常微分方程，原来的常微分方程可以变成代数方程，从而使得在函数类 B 中的运算简化，找出在 B 中的一个解，再经过逆变换，就得到原来要在函数类 A 中所求的解（当然，上述求变换与求逆变换是可以依赖于积分变换表来完成的）.

积分变换的理论和方法不仅在数学的许多分支中有着广泛的应用，而且在其它自然科学和各种工程技术领域中已成为不可缺少的运算工具. 本书要介绍的是最常用的两类积分变换：Fourier 变换和 Laplace 变换. 我们着重讨论它们的定义、性质及某些应用.

第一章

Fourier 变换

§1.1 Fourier 积分

在学习 Fourier 级数的时候,我们已经知道,一个以 T 为周期的函数 $f_T(t)$,如果在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件(即函数在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足:

1° 连续或只有有限个第一类间断点;

2° 只有有限个极值点),

那么在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上就可以展成 Fourier 级数. 在 $f_T(t)$ 的连续点处,级数的三角形式为

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right), \tag{1.1}$$

其中

$$\omega=\frac{2\pi}{T},$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

为了今后应用上的方便,下面把 Fourier 级数的三角形式转换为复指数形式. 利用 Euler 公式①

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2},$$

$$\sin\varphi=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2\mathrm{j}}=-\mathrm{j}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}}{2},$$

此时,(1.1)式可写为

$$\begin{aligned}f_T(t)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2}+b_n\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}}{2\mathrm{j}}\right]\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}+\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\right].\end{aligned}$$

如果令

$$c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{a_n-\mathrm{j}b_n}{2}\\&=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t-\mathrm{j}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\sin n\omega t\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)(\cos n\omega t-\mathrm{j}\sin n\omega t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

---

① 数学中常用"i"表示虚数单位,这里用"j"表示虚数单位是按照电工学中通常的习惯.

$$c_{-n}=\frac{a_n+\mathrm{j}b_n}{2}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

而它们可合写成一个式子

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t\quad(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots).$$

若令

$$\omega_n=n\omega\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

则(1.1)式可写为

$$f_T(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}+c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n t}\right)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t},$$

这就是 Fourier 级数的复指数形式,或者写为

$$f_T(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.\qquad(1.2)$$

下面我们来讨论非周期函数的展开问题. 任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T\to+\infty$ 时转化而来的. 为了说明这一点,我们作周期为 T 的函数 $f_T(t)$,使其在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之内等于 $f(t)$,而在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ 之外按周期 T 延拓到整个数轴上,如图 1-1 所示. 很明显,T 越大,$f_T(t)$ 与 $f(t)$ 相等的范围也越大,这表明当 $T\to+\infty$ 时,周期函数 $f_T(t)$ 便可转化为 $f(t)$,即有

$$\lim_{T\to+\infty}f_T(t)=f(t).$$

这样,在(1.2)式中令 $T\to+\infty$,结果就可以看成是 $f(t)$ 的展开式,即

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

当 n 取一切整数时,ω_n 所对应的点便均匀地分布在整个数轴上,

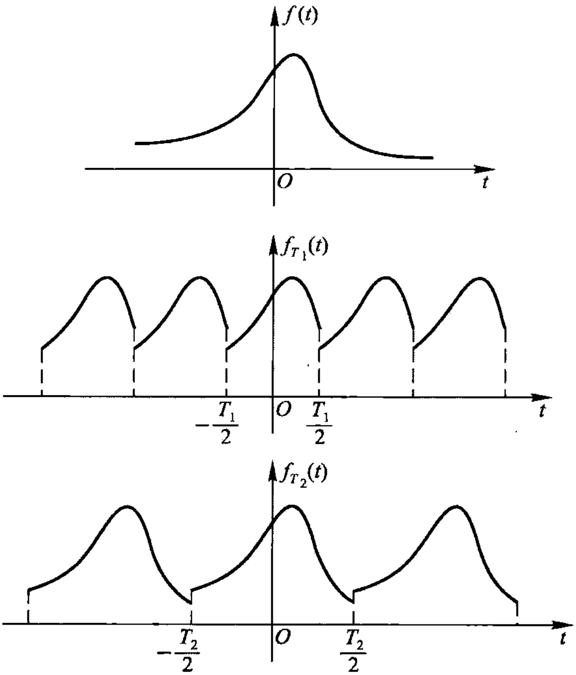


图 1-1

如图 1-2 所示. 若两个相邻点的距离以 $\Delta\omega_n$表示,即

$$\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\frac{2\pi}{T},\ 或\ T=\frac{2\pi}{\Delta\omega_n},$$

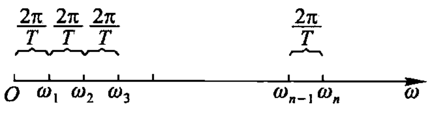


图 1-2

则当 $T\to+\infty$ 时,有 $\Delta\omega_n\to0$,所以上式又可以写为

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}\Delta\omega_n. \qquad (1.3)$$

当 t 固定时，$\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}$ 是参数 ω_n 的函数，记为 $\Phi_T(\omega_n)$，即

$$\Phi_T(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f_T(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

利用 $\Phi_T(\omega_n)$ 可将(1.3)式写成

$$f(t)=\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Phi_T(\omega_n)\Delta\omega_n.$$

很明显，当 $\Delta\omega_n\to 0$，即 $T\to+\infty$ 时，$\Phi_T(\omega_n)\to\Phi(\omega_n)$，这里

$$\Phi(\omega_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}.$$

从而 $f(t)$ 可以看作是 $\Phi(\omega_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega_n)\mathrm{d}\omega_n,$$

即

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\omega)\mathrm{d}\omega,$$

亦即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

这个公式称为函数 $f(t)$ 的 **Fourier 积分公式**. 应该指出，上式只是由(1.3)式的右端从形式上推出来的，是不严格的. 至于一个非周期函数 $f(t)$ 在什么条件下，可以用 Fourier 积分公式来表示，有下面的收敛定理.

Fourier 积分定理　若 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足下列条件：

1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件；

2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积（即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$