丛书主编/何向东

逻辑 博弈与认知研究丛书

分次模态语言的模型论

马明辉/著

科学出版社

丛书主编/何向东

逻辑、博弈与认知研究丛书

分次模态语言的模型论

马明辉/著

科学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

分次模态语言的模型论/马明辉著. —北京: 科学出版社, 2012.6
(逻辑、博弈与认知研究丛书)
ISBN 978-7-03-034392-5
Ⅰ.①分… Ⅱ.①马… Ⅲ.①模态逻辑 Ⅳ.①B815.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 102266 号

责任编辑: 樊 飞 郭勇斌 房 阳/责任校对: 朱光兰
责任印制: 赵德静/封面设计: 黄华斌
编辑部电话: 010-64035853
E-mail: houjunlin@mail.sciencep.com

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2012 年 7 月第一次印刷 印张: 12 3/4 插页: 2
字数: 300 000

定价: 45.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

教育部人文社会科学研究青年项目“模态完全性理论的句法研究”（项目批准号12YJC72040001）早期研究成果
重庆市人文社会科学重点研究基地项目“模态模型论研究”（项目批准号10SKB30）研究成果

“逻辑、博弈与认知研究丛书”编委会

总　　序

多学科相互渗透与交叉融合，是当今学科发展的趋势。对于交叉学科问题，如认知、决策、行动和理性等，学界不断提出新的研究问题和方法，从多学科角度加以探讨，取得了许多优秀的前沿研究成果。当代逻辑学的发展也充分体现了多学科交叉融合的特点。20 世纪 80 年代以来，逻辑学从大量基础学科和应用学科中获得新的主题和方法，逐渐形成了逻辑学与计算机科学、语言学、哲学、数学、心理学和神经科学、经济学、法学、政治学、管理学等众多学科的交叉融合研究的前沿领域。我国逻辑学以及相关学科的发展，应该吸收这些经验，努力开拓新兴、交叉与边缘学科，提高我国基础科学和应用科学研究的水平。

为了鼓励逻辑基础理论的创新研究，注重运用逻辑学的技术、方法和观念研究认知、决策、行动和理性等交叉学科问题，推动逻辑学与相关学科的繁荣和发展，我们组织编写了这套“逻辑、博弈与认知研究”丛书，以汇集逻辑学界高水平的学术研究成果，尤其汇集逻辑、博弈与认知交叉研究的成果，促进逻辑学与哲学、认知科学、语言学、经济学(博弈论)等学科的交叉综合研究。

逻辑学与其他学科的交叉研究，一方面表现为其他学科领域的研究丰富和发展了逻辑理论。例如，20 世纪 80 年代以来计算机科学的发展推动了逻辑理论的发展，出现了命题动态(程序)逻辑、描述逻辑、有穷模型论、余代数逻辑、人工智能中的非单调逻辑和缺省逻辑等。又如，语言学中关于自然语言的形式语义学、Lambek 演算、Lambda 演算、广义量词理论等，都为逻辑学的发展开辟了新的领域。从认识论研究中产生的认知逻辑，随着进一步融合计算机科学、语言学、经济学(博弈论)等领域的思想和方法，形成了动态认知逻辑这个分支，专门处理信息及其动态变化。

另一方面，逻辑理论的发展又反作用于其他学科在交叉学科问题方面的研究。在这方面，当代动态认知逻辑的发展是很好的例子。运用动态认知逻辑方法，可以将许多其他学科的理论形式化，如经济学中的博弈论。博弈作为一种现实的行动模型，具有各种不同的类型，例如合作博弈与非合作博弈、现实生活中的无穷博弈、静态博弈与动态博弈、完美信息博弈与不完美信息博弈等，人们在博弈中进行理性选择，做出决策并采取行动。博弈论研究在经济学、管理学、社会学等领域具有重要的理论与应用价值。利用动态认知逻辑方法，博弈求解过程以及博

弈中涉及的策略选择等问题，都可以运用形式化方法来处理，其优势在于可能获得计算方面较好的结果，由此推动人工智能技术的发展和应用。

这套丛书的编写主要以重庆市人文社会科学重点研究基地——西南大学逻辑与智能研究中心的科研力量为依托。西南大学逻辑与智能研究中心一直秉承多学科交叉融合的发展思路，先后承揽教育部哲学社会科学重大攻关项目，国家社会科学基金重点项目、一般项目和青年项目，以及其他省部级项目 10 多项，中心成员在《中国科学》、《哲学研究》、《哲学动态》、《自然辩证法研究》等国内权威学术期刊，以及“逻辑、理性与互动”(LORI)、“模态逻辑前沿”(AIML)等重要国际学术会议发表论文 20 多篇，出版专著、国家规划教材多部；邀请国内外著名专家学者 30 多人次访学，在整体科研能力和学术水平上得到了国内外学者的广泛认同，成为我国西部地区逻辑与智能研究的学术中心和全国逻辑学主要研究基地之一。

这套丛书是开放性的，我们将以宽广的胸怀团结全国学界同仁，以国际化的视野联合国际学术界的科研力量，共同努力推动逻辑基础理论和应用研究，促进逻辑学与其他学科的交叉融合，为繁荣和发展我国逻辑学和交叉学科研究做出贡献。我们热忱欢迎学界同仁加盟，使这套丛书不断完善和丰富。

何向东

2011 年 12 月于西南大学

前　　言

当代模态逻辑的发展主要从三个方面展开：完全性理论、可定义性理论和对偶理论。20 世纪 60 年代以来，在关系语义学下研究模态逻辑公理系统的完全性，主要目的是找出各种不同的完全的逻辑类，其中以有限模型性质为重要方向，即能被有限框架组成的类刻画。同时，不完全性逻辑类以及斐尼(K. Fine)和布洛克(W. J. Blok)研究的不完全度也是研究难题，还有关于表格和濒表格性质、深度和宽度性质的研究，都属于当代模态逻辑学家研究的前沿。可定义性理论主要研究哪些结构类或结构性质在模态语言中可定义，以及哪些模态可定义的结构类在经典逻辑中是可定义的，这类问题就是要探讨模态逻辑与经典逻辑之间的密切联系，代表性结果是范本特姆(J. van Benthem)等在 70 年代创立和发展的对应理论、戈德布拉特–托马森(R. Goldblatt–S. K. Thomason)定理等。对偶理论主要研究模态逻辑的代数语义，基本结果是框架和代数之间的相互转换以及运算之间的对偶关系，雍森和塔尔斯基(B. Jónnson and A. Tarski)关于模态代数的研究是对偶理论的基础，对偶理论至今仍然是模态逻辑研究的前沿领域。

目前，关于模态逻辑数学方面的研究成果主要是关于正规模态逻辑性质的一般性结论，虽然也有许多关于扩张模态逻辑的研究，典型例子包括时态逻辑、混合逻辑、认知逻辑等。基本模态语言的表达力是有限制的，因此要表达一些不能在基本模态语言中定义的结构性质，就必须考虑模态语言的扩张。本书考虑一种特殊的扩张，即分次模态逻辑。基本模态语言中的可能算子是表达“至少存在一个后继”这种意义的局部量词。由此可以推广为表达“至少存在 n 个后继状态”的关于自然数的局部量词。分次模态逻辑就是关于这些数字模态词的逻辑。更一般地，对任何基数都存在这样的模态词。这种思想很早就出现在模态逻辑学家的著作中，例如，斐尼的博士论文以及他在 1972 年发表的文章。但是这种关于有限基数的模态逻辑，始终没有得到很好的研究。直到 20 世纪 80 年代，一些意大利逻辑学家重新发现了分次模态逻辑，在关系语义学下重新研究了分次模态逻辑的完全性问题。但是，关于这种特殊而有意义的模态逻辑的研究仍然止步不前，原因在于没有恰当的方式处理模态词中所含数字信息。

基数概念对于逻辑的发展有特殊意义。一阶逻辑最初只有“存在”和“所有”两个量词，它们互为对偶。只看存在量词，其意义是“至少存在 1 个”，或者个体

域的非空子集组成的集合。后来出现了“至少存在 n 个”(对自然数 n)这种数字量词，它们可以在带等词的一阶语言中定义，但是直到 1972 年，斐尼才给出了带数字量词的(不带等词)一阶逻辑扩张的完全的公理系统。读者不难想象，对任意基数都有存在量词，正如 1957 年莫斯托夫斯基(A. Mostowski)提出的基数量词概念。对于无穷基数的量词来说，逻辑研究比较困难的。凯斯勒(H. Keisler)在 1970 年发表的论文“量词‘存在不可数多个’的逻辑”中，给出了一个相当简单的完全的公理系统，这实属难得。至于其他无穷基数量词，研究极罕见。

就模态逻辑而言，基数问题不仅仅存在于我们所研究的分次模态逻辑，以及无穷基数的模态逻辑之中，还存在于基本模态逻辑的模型论研究之中。举个例子，人们考虑有穷框架类的模态逻辑的性质，如有穷可公理化、可定义性等。反过来，给定一个逻辑，可以问它是否有有穷框架性质(等同于有穷模型性质)，即被有穷框架组成的框架类刻画。进一步作限制，能被单个有穷框架刻画的逻辑叫表格逻辑。如果放宽基数要求，还可以考虑可数框架上的模态逻辑，同样存在类似的问题。事实上，基数为模态逻辑提供了一把标尺，用来区分不同的逻辑类，关于这把标尺的研究还远远没有穷尽。

回到分次模态逻辑。近年来，余代数理论的发展为研究分次模态逻辑提供了相当有力的工具(参见《模态逻辑手册》中由魏讷玛(Yde Venema)撰写的综述性文章)。可以定义一种特殊的余代数为语义结构，解释分次模态算子。这使得关于分次模态逻辑的完全性、可定义性以及代数语义等方面的技术性研究变得可行了。本书即是在这种背景下完成的。从余代数的角度看，分次模态逻辑是一种非常典型的余代数模态逻辑。本书的目标之一，就是以分次模态余代数为语义结构，研究分次模态逻辑的一些逻辑性质，包括可定义性、完全性、有穷余代数模型性质等。

阅读本书必须具备一些模态逻辑、模型论和余代数方面的知识。基本的概念已经列入附录。其他不明确的地方可参见两本模态逻辑的经典教材：① *Modal Logic* (P. Blackburn, M. de Rijke and Yde Venema. Cambridge University Press, 2001)； ② *Modal Logic* (A. Chagrov and M. Zakharyaschev. Oxford: Clarendon Press, 1997)。另一点需要说明的是，我国逻辑学界对模态逻辑的技术性问题的研究很少见，涉及我们开始提到的当代模态逻辑几个方面的研究更少。我相信本书所涉及的可定义性、余代数、对应理论等，有助于推动我国逻辑学界关于模态逻辑技术性问题的研究。

目　录

导　论

模型论研究逻辑语言与模型之间的关系，因此模型论的主题是表达力和可定义性，即对于给定的逻辑语言 L，哪些结构形式和结构类在 L 中可定义，语言 L 的表达力应该如何刻画。模型论研究的主要方面可以简单概括如下：

(1) 模型的构造，如经典一阶逻辑中模型的膨胀、子模型、同态、同构、嵌入、初等扩张、初等链、超滤扩张、直积、超积等。

(2) 分析给定的理论或公式的模型和模型类，如经典一阶逻辑中完备理论的可数模型，包括素模型、饱和模型、原子模型等。

(3) 定义结构等价的概念。经典一阶逻辑中初等等价是结构等价的基本概念。

(4) 在抽象逻辑的意义上刻画给定逻辑的表达力，即证明 Lindström 类型的刻画定理，如可以使用紧致性和 Löwenheim-Skolem 性质刻画一阶逻辑的表达力。

(5) 研究内插性质和 Beth 可定义性。

(6) 有穷模型论研究。仅考虑论域有穷的结构，许多经典的模型论定理失效，但出现了新的研究主题，例如 0–1 规律和一阶逻辑的有穷变元片段。

模态模型论研究模态语言及其模型之间的相互联系。因此其关键问题是表达力、可定义性和保持等，如哪些结构类或结构性质在给定的模态语言中是可定义的。我们通过研究上面给出的(1) ~ (4)来回答这样的问题。首先以基本模态逻辑为例加以说明。基本模态语言 ML 只含有一个模态词，即可能算子。这个语言的模型论研究已经十分成熟。下面我从模型和框架两个层次加以说明。

对于点模型，根据模态词的语义条件，通过标准翻译可以将所有模态公式翻译为一阶公式。但是反过来，并非所有一阶公式都等于某个模态公式的标准翻译。因此，模态公式的一阶翻译如何从语义上刻画，这是模态模型论的一个重要问题。结论就是范本特姆刻画定理，即模态语言是一阶语言的互模拟不变片段，也就是说，一个一阶公式逻辑等值于某个模态公式的标准翻译当且仅当该一阶公式对互模拟不变。现在更进一步，哪些点模型类是可以通过模态公式集定义的？在一阶逻辑中，类似的问题是哪些结构类可以通过一阶句子集来定义。对于一阶逻辑来说，可定义性的条件是该结构类对初等等价和超积封闭。对于模态逻辑来说，使用互模拟概念取代初等等价概念，便可以得到如下刻画定理：

一个点模型类被某个模态公式集定义当且仅当它对互模拟和超积封闭，并且它的补类对超幂封闭。

那么对于模型类来说情况是怎样的呢？研究表明，所使用的封闭运算要更复杂一些，需要用超滤扩张这种类似于经典逻辑中饱和模型的构造：

一个模型类被某个模态公式集定义当且仅当它对不相交并、满射互模拟象和超滤扩张封闭，并且它的补类对超滤扩张封闭。

上述定理回答了模型层次上的可定义性问题。

框架上的情况要复杂得多。首先，在框架上，任何模态公式都可以翻译为逻辑等值的二阶公式。但是，一部分模态公式所定义的框架类也是一阶可定义的。这说明在框架上有些模态公式本质上是一阶公式，例如常见的模态公理$\Box p \to \Box\Box p$(传递性)、$\Box p \to p$(自返性)、$p \to \Box\Diamond p$(对称性)、$\Diamond p \to \Box\Diamond p$(欧性)等。由此引出一个问题，哪些模态公式所定义的框架类是由单个一阶句子可定义的？对这个问题的回答就是要找出框架上有一阶对应句子的模态公式，这是模态对应理论的基本问题。萨奎斯特(H. Sahlqvist)1975 年从句法上定义了一个公式集，称为萨奎斯特公式集，其特点是，每个萨奎斯特公式都能从其二阶对应句子经过范本特姆-萨奎斯特算法计算得到一个逻辑等值的一阶句子。但是，被单个一阶句子定义的模态公式集是不可判定的。因此，萨奎斯特公式集并不是最大的一阶可定义的模态公式集，有些一阶可定义的模态公式不是萨奎斯特公式。此外，对于全体框架类，也有许多“高阶”模态公式，它们所定义的框架类不是一阶可定义的。

反过来，有许多一阶句子所定义的框架类不能被模态公式集定义，如禁自返性、反对称、禁传递等一阶性质。哪些一阶可定义的框架类是模态可定义的？是否可以给出刻画一阶可定义的框架类的模态可定义的条件？对于这两个问题，答案是肯定的。模仿泛代数中等式可定义的代数类的刻画定理，戈德布拉特和托马森 1974 年证明，一个一阶可定义的框架类是模态可定义的当且仅当它对不相交并、生成子框架、有界态射象封闭，并且它的补类对超滤扩张封闭。这个定理有代数证明(Goldblatt and Thomason, 1974)和模型论证明(van Benthem, 1993)。从代数证明方面看，框架与代数之间的对偶是关键。因此，代数方法中的对偶理论也用于证明上述模型论的可定义性结论。

以上大致描述了模态模型论的几点基本内容。下面我们回到本书的主题——分次模态逻辑。所谓“分次模态”，简单地说，就是对应于数字量词“至少存在 n 个”的数字模态词“至少存在 n 个可及状态”。这种模态词可以用来表达许多在基本模态语言中无法定义的框架性质，如“每个状态至少存在两个后继状态”。分次模态语言的表达力要比基本模态语言更强，主要原因就在于它能够用来定义框架

上的许多数字性质。进一步考虑，如果放宽自然数限制，对任何基数 κ，都可以考虑小于它的所有基数形成的模态词，从而得到关于更多基数的模态语言。

本书主要研究 $\mathrm{ML}(\omega,\omega)$(分次模态语言)的模型论，这里前一个 ω 表示只考虑小于 ω 的有穷基数，后一个 ω 表示只使用有穷多个公式的合取。这个限制有两个主要原因：第一，可以利用关于分次模态语言的模型论研究已经取得的成果；第二，如果考虑任意计数模态语言 $\mathrm{ML}(\kappa,\omega)$，实际上是在研究任意基数量词的模态逻辑，然而，即使经典的基数逻辑也没有得到充分研究。关于这样的模型论逻辑的细节，参见巴维斯等(Barwise et al., 1985)的著作。我们把探索模态基数逻辑的问题留作未来研究的问题。对分次模态语言，研究两种语义，一种是关系语义学，另一种是新的余代数语义学。下面对本书在两种语义下对分次模态逻辑研究的各章节内容作一个简单概述。

第 1 章从模态逻辑的语义视角引入了任意基数的计数模态语言，给出了它的关系语义学的基本概念。然后给出了一些基本的模型和框架构造方法，证明了在这些构造下计数模态公式的一些保持或不变性结论，利用这些结论得到了计数语言分层。最后还专门探讨了所有有穷基数的模态语言，即分次模态语言。

第 2 章研究分次模态语言的关系语义学，其主要目的是证明分次模态语言在关系结构上的可定义性定理。在框架层次上，一条定理是证明限制到可被无变元分次模态公式集定义的 Goldblatt-Thomason 类型的定理；另一条定理是限制到有限传递框架类的 Goldblatt-Thomason 类型的定理。在模型层次上，使用分次模态饱和和分次超滤扩张，我们证明使用一些封闭条件刻画模型类可定义性的定理。本章还探索了分次模态逻辑与带计数量词的一阶逻辑之间的对应问题。

第 3 章引入分次模态语言的余代数语义。首先使用分次模态代数将分次模态逻辑的公理系统代数化，然后通过复代数使余代数语义代数化。所得到的一个结论是 Jónsson-Tarski 表示定理对于分次模态逻辑成立。然后通过代数和余代数之间的对偶，证明在余代数语义下，分次模态逻辑有一条自然的 Goldblatt-Thomason 类型的定理。此外，我们还证明一条关于余代数模型类的可定义性定理。最后探索分次模态逻辑的泛余代数，证明泛余代数的一些基本性质。

第 4 章研究余代数语义下公理系统和正规分次模态逻辑的完全性，定义典范余代数模型，并且给出一些分次模态逻辑及其完全性证明。然后证明代数完全性，研究典范性的概念与泛余代数之间的联系。最后在 4.5 节证明正规分次模态逻辑格的分类定理。特别要指出，这些关于完全性的研究是在余代数语义下进行的。

第 5 章研究余代数分次模态逻辑与弱二阶逻辑之间的对应定理。这里的关键事实是分次模态逻辑的余代数语义是一种弱二阶语义，因为分次模态算子是通过

对有限子集的量化来解释的，因此可以使用弱二阶语言作为谈论余代数性质的对应语言。然后证明范本特姆–萨奎斯特算法经过调整之后仍然适合分次模态逻辑和弱二阶逻辑。最后还要证明萨奎斯特完全性定理。

第 6 章研究余代数语义下正规分次模态逻辑的有限模型性质。首先通过适当的过滤方法证明一些正规模态逻辑的有限模型性质。然后把子框架逻辑(Fine, 1985)推广为子余代数分次模态逻辑，并且证明它们都具有有限模型性质。还可以把子余代数公式推广为的 $K_g 4^3$ 的典范公式(Zakharyaschev, 1992)。最后探索 NExt(K_gAlt$_n$)这个格，这最初是由贝里斯玛(Bellissima, 1988)对基本模态逻辑进行研究的，我们证明 K_gAlt$_1$ 的每个正规分次模态扩张都有有限模型性。

第 7 章研究使用映射对分次模态语言的公式进行分类，我们要证明四个结果：第一，一个分次模态公式等价于某个正存在公式当且仅当它对 Ω 模拟保持；第二，一个分次模态公式等价于某个全称公式当且仅当它对点余代数子模型保持；第三，一个分次模态公式等价于某个全称存在公式当且仅当它对链并保持；第四，一个分次模态公式等值于某个正公式当且仅当它在保序象下保持。最后进一步探讨基本模态公式的有效性在子框架运算下的保持问题。

第 8 章考虑分次模态语言的扩张。我们探讨三种扩张：第一种是分次模态语言加上分次全通模态词；第二种是分次模态语言加上分次异点算子；第三种是 ML($\aleph_1$, ω)，即分次模态语言加上基数 $\aleph_0$ 的模态词 $\grave{a}_\omega$。最后证明分次模态语言的一条 Lindström 刻画定理，即使用分次模态互模拟和紧致性来刻画分次模态语言的表达力。

第 1 章　计数模态语言

本章是计数模态语言的简要引论。1.1 节首先讨论研究动机。然后在 1.2 节正式引入计数模态语言及其关系语义学。1.3 节引入一些基本模型构造方法并证明相应的保持结果，第 2 章会使用这些结果。1.4 节集中考虑一种特殊的计数模态语言，即分次模态语言，主要目的是对目前已有的模型论方面的结果进行概述。

1.1　模态逻辑的语义视角

自 20 世纪 60 年代以来，逻辑学家们认识到，在关系语义学中解释的模态算子，只不过是没有明确约束个体变元的“局部”量词。“局部”这个词的意思是，作为量词的模态词算子仅以所有可及状态为量化域。因此，从语义角度看，基本模态逻辑与一阶逻辑(FOL)并非如此不同，因为两者都能用来谈论关系结构的性质。另一方面，一阶逻辑与模态逻辑也存在重要差异，就表达力而言，前者要远远强于后者。在模型层次上，模态逻辑是 FO^2 的一个片段，这里 FO^2 是一阶逻辑带两变元的片段。更确切地说，根据范本特姆(J. van Benthem)刻画定理，模态逻辑是一阶逻辑(或 FO^2，因为模态逻辑可以嵌入 FO^2)的互模拟不变片段。然而，模态逻辑有一些非常好的逻辑性质和计算性质，比如可判定性和低程度的计算复杂性，而一阶逻辑不具有这些性质。因此，如果我们想获得表达力更强的模态语言，但是又保持基本模态逻辑的优良性质，一种方法就是通过增加新模态词对基本模态逻辑进行扩张，这些新模态词在基本模态逻辑中是不能定义的。逻辑学家们一直在探索这个研究方向。

本书采取的研究思路如下：从与语义视角相反的角度看，任给量词 Q，都可以抽象出一元模态词 $\Diamond_Q$，它是关系结构上的一个局部量词。这条从量词到模态词的道路也可以在斐尼的论文(Fine, 1972a)中找到，该文引入了数字量词的模态对应算子。一个带数字量词的一阶公式的形式是$\exists_n x\alpha(x)$，它在一个一阶模型中是真的当且仅当至少存在 n 个个体满足 $\alpha(x)$(Tarski, 1941)。显然这些量词在带等词的一阶逻辑中是可定义的，但是在不带等词的纯一阶逻辑中是不可定义的。一阶公式$\exists_n x\alpha(x)$的模态对应公式可以写作 $\Diamond_n\alpha$，它在一个关系模型中状态 w 上是真的当且仅当 w 至少有 n 个可及状态满足 α。

更一般地，由于**有限多个**(**无限多个**)和**可数多个**(**不可数多个**)这样的概念常常在数学中使用，它们在一阶逻辑中是不可定义的，因此可以引入新的量词来丰富一阶逻辑，从而使这些概念得以表达。莫斯托夫斯基(Mostowski, 1957)提出的广义量词理论，开启了通向一阶逻辑扩张的模型论之门。任给无限基数 κ，新语言 FOL(Q_κ)从 FOL 增加新量词 Q_κ 得到。如下解释形如 $Q_\kappa x\alpha(x)$的新公式：

$\mathfrak{M} \vDash Q_\kappa x\alpha(x)$当且仅当存在 κ 个元素 b 属于 $\mathfrak{M}$ 使得 $\mathfrak{M} \vDash \alpha(x)[b]$。

令$[\![\alpha(x_1, \cdots, x_n)]\!]_{\mathfrak{M}} = \{(a_1, \cdots, a_n) : \mathfrak{M} \vDash \alpha(x_1, \cdots, x_n)[a_1, \cdots, a_n]\}$。那么 $\mathfrak{M} \vDash Q_\kappa x\alpha(x)$ 当且仅当$|[\![\alpha(x_1, \cdots, x_n)]\!]_{\mathfrak{M}}| \geqslant \kappa$。例如，在语言 FOL($Q_0$)中，可以表达“存在可数多个”这个概念。在这些基数逻辑中，一个重要结果是“存在不可数多个”这个量词的逻辑可以使用一束相当简单的公式来公理化，这些公理是凯斯勒(Keisler, 1970)给出的。对这些基数量词来说，通过推广斐尼(Fine, 1972a)的方法，也可以抽象出对应的基数模态词。

现在正式引入基数模态词。令 $\mathfrak{M} = (W, R, V)$是关系模型，$w \in W$ 并且 $w\!\uparrow = \{v \in W : Rwv\}$。对任何公式 ϕ，令$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{M}}$是 ϕ 在 $\mathfrak{M}$ 中的真集。对每个自然数 $n > 0$，定义模态词 $\Diamond_n$如下：

$$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond_n\phi \text{ 当且仅当} |w\!\uparrow \cap [\![\phi]\!]_{\mathfrak{M}}| \geqslant n。$$

公式 $\Diamond_n\phi$ 的意义是至少存在 n 个后继状态使 ϕ 真。同样，可以把数字模态词推广到任意基数模态词。对每个基数 κ，定义模态词 $\Diamond_\kappa$ 如下：

$$\mathfrak{M}, w \vDash \Diamond_\kappa\phi \text{ 当且仅当} |w\!\uparrow \cap [\![\phi]\!]_{\mathfrak{M}}| \geqslant \kappa。$$

考虑在基本模态逻辑基础上增加基数模态词的扩张。在有限基数的情况下，增加所有 $\Diamond_n(n > 0)$而获得的扩张仍然是带等词一阶逻辑的片段。然而，在无限基数的情况下，所获得的模态语言比一阶逻辑的表达能力更强。本书所要研究的主要内容就是有限基数的模态逻辑。在 1.4 节，笔者将概述目前文献中所得到的关于分次模态逻辑的模型论结果。下面首先以形式的方式定义计数模态语言、关系语义以及相关的句法和语义概念。

1.2 计数模态语言

基数可用于计算一阶结构中具有特定性质的个体的数目，在关系结构中，它们也可以用来计算具有特定性质的可及状态的数目。本节以形式的方式定义计数模态语言及其关系语义学，还包括一些有用的基本概念。

定义 1.1 给定(有限的或无限的)基数 $\kappa > 0$，**计数模态语言** ML(κ, ω)由