优化与策略

主编　李卫国

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

优化与策略

李卫国　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

优化与策略/李卫国主编. —北京：北京理工大学出版社，2012.7
ISBN 978-7-5640-6040-4

Ⅰ. ①优… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①大学生-创造性思维-能力培养
Ⅳ. ①B804.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 116962 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http：// www. bitpress. com. cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京高岭印刷有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 16.75
字　　数 / 386 千字
版　　次 / 2012 年 7 月第 1 版　　2012 年 7 月第 1 次印刷　　责任编辑 / 陈莉华
印　　数 / 1~1500 册　　责任校对 / 周瑞红
定　　价 / 45.00 元　　责任印制 / 王美丽

前　言

近年来高等教育一直致力于以健康的人文环境为未来培养高素质人才，使他们成为可以推动社会健康发展的精英栋梁。高校坚定不移地突出人文教育是为了生活在象牙塔中的每一个大学生都能深刻地感受到人文精神中的那种本质的东西，即对人性和生活本质的不懈追求。德国著名教育家赫尔巴特说过：“数学一般通过直接激发创造精神和活跃思维的方式来提供最佳服务。”所以作为一名数学工作者，我们一直努力致力于如何将数学学科的理念和思维融入对学生人文精神的教育和感化中去。

成功，一个既简单又复杂，既平实又玄妙的字眼。在纷繁的现代社会中，一代又一代的年轻人为了追求或世俗或理想或者有个性的成功而奔波忙碌。人人都在追寻成功，但很少有人能静下心来好好想一想：到底什么是成功？应当如何追寻成功？这些看似简单的问题，却经常令青年一代陷入迷茫和痛苦之中。有的人见到社会上一夜暴富或一步登天的现象，就希望自己也能用速成的方式获得地位和金钱。为了达到速成的目标，他们经常在“零和竞争”中伤害他人甚至危害社会。有的人虽然考上了名牌大学，但他们似乎已经习惯了中学时代名列前茅的感觉。在大学校园里，面对实力不俗的众多优秀学子，他们惘然若失，甚至深感自卑，对自己的学业和前途丧失了信心。有的人从小就不知道何为积极主动、何为自觉和自主，除了盲目的竞争、攀比以外，他们唯一可做的就只有虚度光阴了。有的人考上大学之后，突然发现，可以由自己支配的时间骤然增多，但不知道应该如何管理时间，如何最优地规划自己。这些同学常因为对自己要求不高或交友不慎，沉迷于网络游戏等不良习惯之中，最终既荒废了学业，又耽误了前程。有的大学生对专业学习兴致索然，对校园生活也提不起兴趣，他们面对不喜欢或不适合所学的专业，却既没有勇气改变现实，也没有勇气面对现实。有的大学生面对校园里流行的各种思潮和价值观，如经商、创业、出国、从政等，感觉无所适从或者人云亦云、朝秦暮楚，完全丧失了自己的立场和主见。有的大学生把自己封闭在校园的围墙之内，他们不了解社会现实，对社会实践和就业深感恐慌，或者在求职时眼高手低，屡屡碰壁后又对自己在校园里虚度光阴的做法自责不已。还有许多年轻人无法处理好正常的人际关系，当自己在学习、生活或感情方面遭受挫折的时候，就会由此消沉下去，甚至走向极端。每个青年都向往成功，每个大学生都企盼成功。有时候，成功好像近在咫尺，有时候，成功又似乎遥不可及。

其实，不是环境阻碍了我们的发展，是你面对环境自身的态度阻碍了最根本的发展，你改变不了万物，你唯一可以改变的就是你自己。每一个成功者都有一个开始。勇于开始，才能找到成功的路。

1932 年，时任北大校长的胡适先生在《赠与今年毕业的大学生》中，给学生开出“三种防身的药方”：“总得试试寻找一两个值得研究的问题，总得多发展一点非职业的兴趣，你总得有一点信心”。胡适还满怀激情地说：“我们要深信：今日的失败，都由于过去的不努力。我们要深信：今日的努力，必定有将来的大收成。”

中国的青年非常优秀，但是中国的学生非常困惑，因为他们面对着高期望的父母、习惯于应试教育的学校和老师以及浮躁的社会心态。如果能够有过来人帮他们指出前进的方向，让他们能走得更踏实、更精确一些，他们将成为中华民族更上一层楼的最大动力。中国的青年是中国近百年来第一次能够接受先进完整的教育，能够有条件专心读书并且拥抱了信息时代的骄子，他们应该成为融会中西的精英。但是他们虽然有幸出生在能够自由选择的时代，但是时代并没有传授他们选择的智慧。

鉴于此种现状，我们的高校正在不断借鉴世界名校的育人理念，致力于融入中国的文化精神于人文教育中，培养敢于面对明天的莘莘学子，而优化的思想和策略思维的积淀则是一个大学生走向成功的必备要素。推广最优化的思想和优势策略思维的同时，我们希望向学生介绍一些博弈论的知识。为了自己，也为了与他人更好地合作，当代大学生需要学习一点博弈论的策略思维。正因如此，著名经济学家保罗·萨缪尔森说：“要想在现代社会做一个有文化的人，你必须对博弈论有一个大致了解。”本书在介绍最优化思想和策略思维的同时，贯穿始终的是博弈论的观念和意识，只有对博弈论有了初步的认识和了解，才能更好地优化问题和选择最优的策略来解决问题。

远离困惑，走向卓越。当代大学生应该成为一个追求理想和兴趣、终身学习的人；一个能够从思考中认识自我、从学习中寻求真理、从独立中体验自主，从计划中把握时间、从表达中锻炼口才、从交友中品味成熟、从实践中赢得价值、从兴趣中攫取快乐、从追求中获得力量的人；一个“拥有选择的智慧”，并用智慧选择成功的人，一个最好的自己。唯有更多的青年找到了自信和快乐，找到了真正属于自己的成功之路，中华民族才能够拥有更加辉煌的未来。

“优化与策略”作为一门目前为止在国内比较新颖的创新课程，适于在研究生、本科生中开设。学习会给我们带来全新的人文教育理念，可以使当代大学生认识全新的自己，可以解决大学生中数学理念学习给我们带来什么收益的困扰，可以从思维的深度打造中国最优秀的大学生。

最后，我们希望各位可以从阅读本书的过程中得到许多乐趣，使我们能够为青年一代提供最真挚的帮助和最有效的指导，这样会使我们作为一个优化工作者感到欣慰。

编　者

目 录

优 化 篇

策 略 篇

优化篇

最优化概念反映了人类实践活动中十分普遍的现象，即要在尽可能节省人力、物力和时间的前提下，争取获得在可能范围内的最佳效果。因此，最优化问题成为现代数学的一个重要课题，涉及统筹、线性规划等内容。通俗地讲，最优化的问题就是如何使得一件事情做到最好的问题。比如，教师怎么达到最好的教学效果，商人如何获得最大的利润，如何与人交往能够获得最好的回报，如何投资理财能够获得最大的收益，等等。当然要达到上面的目的是有一定的限制条件的：教师的教学时间有限；商人不能偷工减料以次充好；不能给工人少发工资；考虑法律和道德准绳下的交际环境；投资项目的预测和风险评估等。在数学学科里，最优化问题还是一个求最大或最小值的问题，我们把实际问题中的限制条件称为约束条件。用一句话来概括，就是“走一条最简便、最高效率的路；用最短的时间，做最多的有用功”。

最优化问题不管是在提高自身思维能力方面，还是在平时生活处理问题时，都是大有益处的。它使我们学到了如何运用数学方法解决生活问题，实现方法最优化、计划最优化、过程最优化、结果最优化，等等。我们倡导在实现最优化的过程中实践是必不可缺的，我们同时倡导共同

参与，共同合作，多多沟通，经历挫折也要不停奋进，把握好方向，分工合作，就能化复杂为简单，使问题在一定的约束条件下得到最优的解决。

此外，我们还可以从中得到扩展：

(1) 无盖盒子的最大容积问题：用一张边长为 a 的正方形铁皮，如何制作一个无盖长方体盒子，使其容积最大。

(2) 零件供应站（最省问题）：设在一条流水线上有5台机器工作，我们要在流水线上设立一个检验站，经检验合格后才能进行下一道工序，若5台机器的工作效率相同，问检验台放在何处可使移动零件所走的距离之和最小（所花的总费用最省）？如果是 n 台呢（可以用平面几何知识，也可以建立函数关系式，作出图像讨论得出）？若5台机器的效率不同又如何呢？

(3) 拍照取景角最大问题：在公路的一侧从 A 至 B 有一排楼房，想在公路 l 上的任何一处拍一张正面照，任意选择公路上的点，使拍摄的一排楼房的取景最大（以点 A、点 B 与直线 l 的各种位置关系讨论）。

类似问题：足球运动员在何处射门最好（不考虑其他因素）等。

(4) 商品营销策略问题：① 调查某种商品的销量与它的利润的关系，并决策如何可使其获利最大？② 对报亭买报情况调查（进价、售价及卖不出去而退回，每份赔钱多少），统计一个月的销售情况，问怎样决策收益最大？

同样我们可以把优化的问题与博弈策略联系起来。那么博弈过程中是不是一定要有最优化？最优化过程中通常只需要把约束条件描述清楚，把目标函数定义好，就可以进行求解；而博弈过程中，则需要了解对方可能采取的策略，再和己方的策略进行组合，从中选择最符合己方利益的策略，也就是所谓的占优策略。这种方法在博弈的参与方确定（最好再假定其可以采取的策略也已知）的情况下，比较容易应用，也好理解；但是在参与方很多，以至于无法给出支付矩阵或博弈树时，又该怎么做？重复博弈中的“收敛到均衡点”，与最优化方法中的“收敛到最优解”，有何不同？

在博弈论中，每一个人在给定环境下的决策是最优化的，但是总体结果不一定是（经常不是）最优化的。就经济学来说，博弈论是方法，最优化是方法的方法。博弈论有具体含义，应用于特定情况；最优化作为一个更为根本的分支，其应用范围更大更广。我们可以使用最优化方法来求解博弈论。至于重复博弈中的“收敛到均衡点”与最优化方法中的“收敛到最优解”的关系，使前者达到均衡点的“策略”类比于使后者达到最优解的“算法”，并且都可能不是唯一的。

最优化方法是求解博弈问题的方法之一，那是不是所有的博弈问题都可以通过最优化方法求解呢？除了最优化方法，其他常用的方法还有哪些？我们说使博

弈问题达到均衡点的“策略”类比于使最优化问题达到最优解的“算法”，那么博弈论中的“策略”与最优化中的“算法”区别究竟在哪里？博弈论的最终目的就是在一系列条件下使博弈主体的收益最大化（不管是非合作博弈还是合作博弈）。既然要最大化，那就要用最优化的方法。最优化思想在具体算法上的体现可能有所不同，比如二维博弈矩阵的画线法是博弈上的特定方法，线性规划的单纯性算法是最优化理论的特定方法，但这些表面差距很大的算法的本质都是最优化的思想。博弈论中策略的求解思路和最优化问题中算法的应用思路是很相似的，都是对于某一类问题都有相对成熟的算法，都是分 1、2、3 等步骤。比如在博弈论中，一看到静态博弈，就用一套方法；一看到动态博弈，就用另外一套方法。同样在最优化理论中，一看到运输问题，用一套方法；一看到最短路径问题，就用另外一套方法。但这些方法在本质的最优化思想上是相通的。比如静态博弈实际上是约束下的极值问题，动态博弈实际是动态规划问题，等等。

确实，对某一类最优化问题都有相对成熟的算法。但既然博弈论方法和一般意义上的最优化方法都能达到寻优的目的，我们是不是也可以把博弈论方法看做是最优化方法的一种？给定具体的优化问题，我们所要做的只不过是寻找一种适合它的求解方法，这种方法可以是博弈论方法，也可以是某种具体的带约束的优化算法，或者是遗传算法或其他并行优化算法也未可知。

第1章 > ≫

优化方法之线性规划篇

线性规划（Linear Programming）是运筹学最优化的重要分支，在经济部门、能源、交通以及技术领域等方面，在诸如生产计划、经营决策、组织管理、经济规划、开发计划的制订与分析论证等问题上，有着广泛的应用。在资源合理开发利用特别是短缺资源的合理利用方面，产生了巨大的经济效益与社会效益，是决策科学化的有力工具。

§1.1 线性规划问题与数学模型

先看几个例子。

例1.1.1 服装制造问题。

某服装厂西服车间生产男女西服两种服装。每套服装都要经过裁剪与缝制两道工序。生产一套男西服的裁剪时间为2小时，缝制时间为5小时。生产一套女西服裁剪时间为1.5小时，缝制时间4小时。该厂每日可用的裁剪时间为12小时，缝制时间为31小时。男女西服售价分别为1 200元与1 000元，如何安排生产，可使每天的效益最大?

现设每天生产男西服x_1套，女西服x_2套。因而每天需用裁剪工时为（$2x_1+1.5x_2$）小时，缝制工时为（$5x_1+4x_2$）小时。由两种工时条件的限制，必须使x_1，x_2的选择同时满足不等式:

$$2x_1+1.5x_2\leqslant 12$$
$$5x_1+4x_2\leqslant 31$$

问题就是要求出满足不等式组的x_1，x_2，使得服装的总售价:

$$1\,200x_1+1\,000x_2$$

最大化。由此，可得到如下的数学模型（LP）:

$$\max z=1\,200x_1+1\,000x_2 \qquad (1)$$

$$(\mathrm{LP})\quad \text{s. t.}\begin{cases}2x_1+1.5x_2\leqslant 12 & (2)\\ 5x_1+4x_2\leqslant 31 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_1,\ x_2\text{取整数} & (3)\end{cases}$$

上述模型中，$\max z=1\,200x_1+1\,000x_2$，称为问题的目标函数。每天安排生产使产值最大是问题的目标。式（2）、式（3）称为约束条件，x_1，x_2不能取负值且只能取整数值。max是maximize的缩写，s. t. 是Subject to的缩写，意为“满足”或“受约束于”。变量x_1，x_2，被称为决策变量。给定x_1，x_2的一组值，称为确定一个决策。使目标函数z的值达到最

大的决策称为最优解或最优决策。

例 1.1.2　配制混合饲料问题。

设有 3 种谷物 A，B，C，用它们配制混合饲料。谷物的单位价格及混合饲料所需的营养成分（甲、乙）的含量如表 1.1.1 所示：

表 1.1.1　谷物的单位价格及混合饲料所需的营养成分（甲、乙）的含量

谷物 \ 营养成分	甲/g	乙/g	单位价格/元
A	20	16	20
B	8	12	15
C	10	6	18
饲料所需营养成分	1 000	800	

在混合饲料中要求含甲种营养成分不少于 1 000 g，乙种营养成分不少于 800 g。问：如何配制混合饲料，在满足营养成分的条件下，使所需谷物的总费用最小？

今设配制的混合饲料需使用谷物 A，B，C 的用量分别为 x_1，x_2，x_3。因而谷物的费用为（$20x_1+15x_2+18x_3$）元。

问题的限制条件为：

$$20x_1+8x_2+10x_3 \geqslant 1\ 000$$
$$16x_1+12x_2+6x_3 \geqslant 800$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0$$

于是，得到的数学模型如下：

$$\max z = 20x_1+15x_2+18x_3 \tag{4}$$

$$(\mathrm{LP}) \qquad \text{s. t.} \begin{cases} 20x_1+8x_2+10x_3 \geqslant 1\ 000 & (5) \\ 16x_1+12x_2+6x_3 \geqslant 800 \\ x_i \geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3 & (6) \end{cases}$$

例 1.1.3　条材下料问题。

某工厂要制造 100 台某种设备。每台设备中要用到长为 1.2 m、1.8 m、2.6 m 的钢管各一根。该厂钢管原材料的长度为 7 m。问：原材料应如何裁截，可在满足制造要求的条件下，使原材料的用量最少？

显然，在每根原材料上裁截同一种规格的钢管的裁法不是好方法。组合的裁截方法将会使料头较少，从而使原材料的使用量降低。

现在，选择 7 种使料头较少的裁截方法并将它们 3 种规格的裁截数及剩余的料头数列于表 1.1.2 中。据此再建立数学模型。

今设Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ共 7 种裁截方案，使用的原材料数分别为 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，x_7。目的是使总料头的长度最小，因而可得目标函数的表示式为：

$$z=0 \cdot x_1+0.2x_2+0.4x_3+0.4x_4+0.6x_5+0.8x_6+0.8x_7$$

该问题的数学模型为：

$$\min \quad z=0 \cdot x_1+0.2x_2+0.4x_3+0.4x_4+0.6x_5+0.8x_6+0.8x_7$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} 0 \cdot x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 3x_7 = 100 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 2x_6 + 0 \cdot x_7 = 100 \\ 2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 100 \\ x_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant 7,\ x_i \text{为整数} \end{cases}$$

表 1.1.2　裁截数及剩余的料头数

裁截根数 \ 裁截方案		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ
规格/m	1.2	0	2	1	4	1	0	3
	1.8	1	1	3	1	0	2	0
	2.6	2	1	0	0	2	1	1
料头长度/m		0	0.2	0.4	0.4	0.6	0.8	0.8

可以验证：$x_1 = x_2 = 0$，$x_3 = 20$，$x_4 = 0$，$x_5 = 32$，$x_6 = 20$，$x_7 = 16$ 是一组可行整数解。但当裁截方案不够多时，可能不存在可行整数解。若将等式变为不等式，则可行整数解存在，但料头数目会增多。

在上述 3 个数学模型中，目标函数 z 都是决策变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的线性函数。而约束条件左端的函数也是线性函数。根据问题的不同，约束条件可以是不等式（$\leqslant$或$\geqslant$），也可以是等式的形式出现。由于经济上的意义，各变量 x_i都不能取负值。但是，在某些问题中，有的变量，例如 x_j，没有 $x_j \geqslant 0$ 的非负性限制，此时可引入两个新的非负变量 x_j^1 与 x_j^2，并令 $x_j = x_j^1 - x_j^2$，并将它代入约束条件中消去 x_j，使所有的变量都需要满足非负条件限制。

上述的线性目标、线性约束的一类极值问题不再是传统的极值问题，通常被称为线性规划问题。

为了研究算法的方便，可在每个线性不等式约束条件中减去一个新的非负变量（称为剩余变量）或加上一个新的非负变量（称为松弛变量），将不等式约束化为等式约束，也就是说，把约束条件变为线性方程组与变量非负约束，对于 n 个变量 x_1，x_2，$\cdots$，x_n的线性规划问题，其数学模型的形式如下：

$$\max \quad z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{7}$$

$$(\text{LP}) \qquad \text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \end{cases} \begin{matrix} (8) \\ \\ \\ \\ (9) \end{matrix}$$

它的矩阵、向量形式可写成：

$$\max \quad z = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} \tag{10}$$

$$\text{s. t.} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{12}$$

其中，$C=(c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^T$ 为向量。矩阵 A 为：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{13}$$

c，b 均为列向量，T 表示向量或矩阵的转置。

式（7）~式（9）或矩阵形式的式（10）~式(12）的线性规划模型被称为线性规划的标准型。

在线性规划 LP 中，变量通常取实数值。当所有 x_i 均要求取整数值时，这种线性规划称为整数线性规划。当 LP 中只有部分变量要求取整数值的问题，称为混合整数规划问题。

在 LP 问题的讨论中，我们经常用到如下的术语及记号。

（1）容许解：一个决策 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，当其所有分量 x_i 的值满足约束条件式（8）、式（9）或式（11）、式（12）时，则称 x 为该约束条件的容许解或可行解。

（2）容许集：所有满足约束条件的容许解的全体组成的集合，称为容许集或可行集、可行区域。若记 S 为容许集，则 S 可表示成

$$S=\{x: Ax=b, x\geqslant 0\}$$

意为 x 为 S 的元素，x 满足式（11）与式（12）的条件。

决策变量 x 的维数 n 决定了 LP 的规模，而 LP 的三元组（A，b，c）决定了线性规划的一切内在性质。

§1.2　线性规划的基本性质与基本定理

线性规划由目标函数与约束条件组成，由于目标函数是线性函数，它在空间任一点的某个开邻域内不可能有极大值与极小值。因此，线性规划如果有最优解，则最优解必在约束集 S 的边界上达到。线性规划问题有解与否，是目标函数 z 与约束集 S 之间的关系问题。同样的约束集合 S，当 z 的函数系数不同时，两个线性规划的解的性质可以有很大的差异。我们从 $n=2$，即两个变量的 LP 入手，先研究约束集合的构造，从几何特性与代数特性两个方面及其关系加以阐述，在此基础上给出线性规划的基本定理与解的类型分析。

定义 1.2.1　凸集

X 为 n 维欧氏空间的集合。若对于 X 中任意两个不同的点 $x^{(1)}$ 与 $x^{(2)}$，$x^{(1)}\neq x^{(2)}$，均有点 $w=\alpha x^{(1)}+\beta x^{(2)}\in X$，对任意的 $\alpha\geqslant 0$，$\beta\geqslant 0$，$\alpha+\beta=1$ 成立，则称 X 为凸集。点 w 表示 $x^{(1)}$ 与 $x^{(2)}$ 连线上的点，它们构成线段 $\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$。对于上述的 α，β，称 $\alpha x^{(1)}+\beta x^{(2)}$ 为 $x^{(1)}$ 与 $x^{(2)}$ 的凸组合。

线段 $\overline{AB}$、$\triangle ABC$，平面上的正四边形与多边形以及圆等都是凸集。不包含边界点的凸集称为开凸集，否则为闭凸集。

由凸集的定义，容易证明：

（1）$S=\{x: Ax=b\}$ 为凸集。

（2）$S=\{x: Ax\leqslant b\}$ 为凸集。

（3）$S=\{x: Ax=b, x\geqslant 0\}$ 为凸集。

（4）S_1为凸集，$S_2=\{x: x=ky, y\in S_1\}$（$k\geqslant 0$ 为实数）也是凸集。

由凸组合的定义，两点 $x^{(1)}, x^{(2)}(x^{(1)}\neq x^{(2)})$ 的凸组合生成线段$\overline{x^{(1)}x^{(2)}}$。不共线的三点 $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$，生成一个以 $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ 为顶点的三角形。三维空间的四个点可以生成三棱锥体。若 S 为由给定的点 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(m)}$ 的凸组合所生成，即：

$$S=\{x: x=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x^{(i)}, \alpha_i\geqslant 0, \sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\}$$

则可证 S 为凸集。若对所有的 $x^{(i)}$，当令 $x=x^{(i)}$ 时，右端各项中的 $\alpha_i=1$，其余 α_j为零 $(j\neq i)$，则 S 为由 m 个顶点 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$\cdots$，$x^{(m)}$生成的凸集。

（5）S_1，S_2是凸集，则它们的交集 $S=S_1\cap S_2$也是凸集。

定义 1.2.2 一个集合 X，若 $x\in X$，则 $\alpha x\in X$（$\alpha\geqslant 0$）也成立，则称 X 为一个锥。

例如，从坐标原点出发的两条射线围成的无界区域构成一个锥。若锥中的点满足凸集的定义，则称为凸锥。

现在我们来考察两个具体的 Ox_1x_2 平面上的约束集合 S_1 与 S_2 及其几何特性（见图 1.2.1）。

约束集合 S_1 由下列线性不等式组及非负约束定义：

$$\begin{cases} x_1-2x_2\leqslant 3 \\ 3x_1+2x_2\leqslant 17 \\ x_2\leqslant 4 \\ -2x_1+x_2\leqslant 2 \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

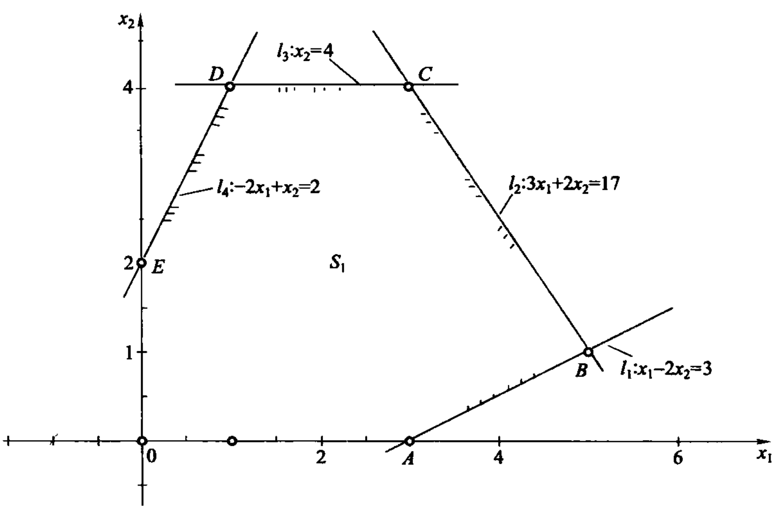

图 1.2.1 凸集 S_1