SHIFANZHUANKESHIYONGJIAOCAI

师范专科试用教材

空间解析几何

吉林教育出版社

师范专科试用教材

空间解析几何

吉林教育出版社

师专数学教材
出版说明

师范专科学校承担着培养大批合格的初中教师的重任。随着九年制义务教育的普及和四化建设的深入发展，师专的地位和作用愈来愈受到社会的重视。但是，就师专数学专业而言，到目前为止，国内还没有公开出版一套完整的、令人满意的专业教材，这给师专教学带来了一定的困难。为了解决这一问题，填补这一空白，在吉林省教育委员会的组织和资助下，由四平师院、吉林师院、长春师院、通化师院、白城师专、齐齐哈尔师院、廊坊师专、内蒙民族师院、昭盟蒙族师专等九所师范院校联合编写了这套教材。本套教材共有十四种，十五册。它们是：《空间解析几何》，《高等代数》，《数学分析》（上、下册），《概率论与数理统计》，《逻辑代数与计算机语言》，《普通物理》，《初等代数研究》，《初等几何研究》，《中学数学教材教法总论》，《高等几何》，《常微分方程》，《复变函数》，《高等数学》（物理专业用），《高等数学》（化学专业用）。

本套教材是根据国家教委制定的二年制师范专科学校的教学计划（征求意见稿）和各门课程的教学大纲并结合九所院校的教学实践编写的。为保证教学质量，邀请了东北师大、吉林大学等校的二十多位教授、专家、学者组成教材编审委员会，对全套教材的编写进行具体指导和严格审查。

本套教材包括了教学计划规定的师专数学专业的全部专

业课程（必修课及选修课）的教材以及物理和化学专业的高等数学教材。编写时充分注意了各门教材内容上的衔接与配合，深度和广度方面的协调一致。并在文字使用、表述方式以及名词术语和符号的使用等方面有统一的要求，力争规范划一。

本套教材从培养目标出发，突出了师专教育的要求和特点。教材选择上避免了“多、深、尖”的弊病，体现了“少、广、新”的原则。力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野，以适应“三个面向”的需要。在表述方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。

为了加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，各门教材都配备了较多的例题和习题。它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高。对于难度较大的习题，作了适当的提示。

本套教材不仅可供师范专科学校使用，还可作为教育学院、职业大学、电视大学以及函授、刊授等相应专业的教材，亦可作为师范院校本科及其它院校有关专业的教学参考书。

编写一套完整的、适应四化建设需要的教材是一项十分艰巨的任务。我们的工作只是一个初步的尝试，缺点和谬误之处在所难免，诚恳希望得到有关专家和广大读者的批评指正。吉林省教育委员会和参加编写工作的九所院校的有关领导对于本套教材的编写出版给予了宝贵的支持，谨此表示衷心的感谢。

师专数学专业教材协编组

1986年10月

目　　录

第三章　常见二次曲面

第四章　二次曲面的一般理论

第一章 矢量与坐标

本章介绍矢量代数和空间直角坐标系。它们不仅是空间解析几何的基础和有效工具，而且在数学的其它分支以及物理学、力学和工程技术等方面都有着广泛的应用。

§1 矢量的概念

在自然科学和日常生活中，我们经常遇到各种各样的量。其中有些量只有大小这样一个特征，如长度、体积、温度、重量等。这些量在取定了度量单位之后，只用一个实数便可以表示它们。这种量称为**数量**.但也有一些量,如位移、力、速度、加速度等等，具有大小和方向两个特征。我们知道，作用力和反作用力大小相等，方向相反。如果不考虑方向这个特征,便无法区别它们。为了更有效地刻划这些量,我们引入矢量的概念。

定义1.1 既有大小又有方向的量,称为**矢量**(或**向量**)。

前面提到的力、位移、速度和加速度等量，都是矢量。

如果我们认为一条线段的大小指的是它的长度，并且规定线段的两个端点，一个是始点，另一个是终点，从始点到终点的方向是线段的**正向**，这样的线段便称为**有向线段**。显然，有向线段具有大小和方向两个特征，可以作为矢量的最好的几何模型。因此，我们通常用有向线段来代表矢量。

以A为始点，B为终点的矢量记作$\overrightarrow{AB}$。此时，字母A和

B都要大写。也可以用一个小写字母来代表矢量，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等。在上述两种矢量符号中，箭头都是必不可少的，它象征着矢量的方向。有时为了印刷的方便，用一个小写的黑体字母代表矢量，但我们手写时，仍要加上箭头。

矢量的大小也称为矢量的**长度**（**或模**）。矢量$\overrightarrow{AB}$的长度记作$|\overrightarrow{AB}|$，$\vec{a}$的长度记作$|\vec{a}|$。

下面我们介绍一些比较特殊的矢量。

定义1.2 长度为零的矢量称为**零矢量**，记作$\vec{0}$。

零矢量的始点和终点合而为一，成为一个点。因此，零矢量没有固定的方向，但可以根据需要任意选择。

定义1.3 长度为1的矢量称为**单位矢量**（**或么矢**）。

与非零矢量$\vec{a}$方向相同的单位矢量通常记作a_0。

定义1.4 大小相等、方向相同的矢量，称为**相等矢量**。矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$相等，记作$\vec{a}=\vec{b}$。

在上述定义之下，矢量由其大小和方向完全确定，与其空间位置无关。这种矢量称为**自由矢量**。我们今后讨论的矢量，基本上都是自由矢量，不再另加说明。

由定义可知，所有零矢量彼此相等。任意矢量经过平行移动之后仍然等于原来的矢量。因此，我们可以根据需要去改变矢量的空间位置，或将若干矢量的始点集中于同一点处。

定义1.5 大小相等、方向相反的两个矢量互相称为**反矢量**。$\vec{a}$的反矢量记作$-\vec{a}$。

由定义可知，$\vec{a}=-(-\vec{a})$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$。特别地有$\vec{0}=-\vec{0}$。

由于我们用有向线段代表矢量，关于矢量与直线或平面

平行的问题便不言自明.

定义1.6 平行于同一直线的若干矢量称为**共线矢量（或平行矢量）**. 矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$共线，记作$\vec{a} \parallel \vec{b}$.

显然,共线矢量的方向或者相同,或者相反，相等矢量及反矢量彼此共线. 特别地，我们规定零矢量与任意矢量共线.

定义1.7 平行于同一平面的若干矢量称为**共面矢量**.

若干矢量共线或共面并不意味着它们一定位于同一直线或同一平面上，但我们总可以通过平行移动作到这一点.

容易证明，任意两个矢量一定共面. 任意一组共线的矢量一定共面. 零矢量与任意一组共面的矢量共面. 因此，我们今后讨论矢量的共面问题，通常是指三个或三个以上不共线的非零矢量.

练　　习

1. 将下列矢量归结到共同的始点，它们的终点构成什么样的几何图形?

（1）平行于同一直线的一切矢量.

（2）平行于同一直线的一切单位矢量.

（3）平行于同一平面的一切矢量.

（4）平行于同一平面的一切单位矢量.

（5）空间中的一切矢量.

（6）空间中的一切单位矢量.

2. 在下列几何图形的边或棱上可以作哪些相等矢量或反矢量?画图加以说明.

（1）平行四边形.

（2）等边三角形.

（3）平行六面体.

（4）三棱台。

3．回答下列问题：

（1）如果矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，$\vec{a}$，$\vec{c}$也共线，矢量$\vec{b}$，$\vec{c}$是否一定共线？

（2）如果矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$共线，$\vec{c}$，$\vec{d}$共线，矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$是否一定共面？

（3）如果矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{d}$也共面，矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$是否一定共面？

（4）如果矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$共面，$\vec{a}$，$\vec{d}$共线，矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$是否一定共面？

（5）不等式$\vec{a}>\vec{0}$，$\vec{b}<\vec{c}$是否有意义？为什么？

§2　矢量的加法

矢量之所以有着广泛的应用，重要原因之一在于矢量可以类似于实数那样进行某些运算。这些运算的规律，与实数运算在形式上也颇为相似。

2.1　矢量的加法

我们知道，位移是一种矢量。在图1—1中，从A点到B点的位移，记作矢量$\overrightarrow{AB}$，从B点到C点的位移，记作矢量$\overrightarrow{BC}$。两次位移的合成，便是从A点到C点的位移$\overrightarrow{AC}$。因此，我们自然地会把矢量$\overrightarrow{AC}$定义为矢量$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$之和。

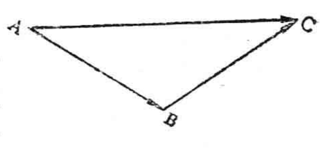

图1—1

定义2.1　对任意矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，在空间任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则矢量$\overrightarrow{OB}$称为矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$之和，记作

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

矢量的求和运算称为矢量的**加法**，（图1—2）。

上述定义称为矢量加法的**三角形法则**。

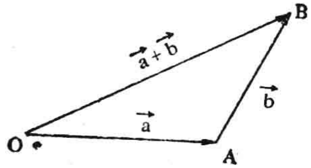

图1—2

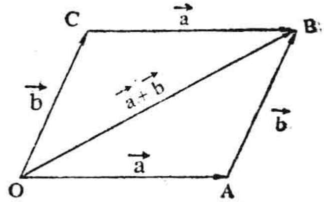

图1—3

物理学中关于力的合成与分解的“平行四边形法则”，实际上正是矢量加法的应用之一。我们也可以利用这种方法定义两个矢量之和。

定义2.2 对任意矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，在空间任取一点O，作$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OC} = \vec{b}$，以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OC}$为边作平行四边形$OABC$，则对角线上的矢量$\overrightarrow{OB}$，称为矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$之和。记作

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}.$$

上述定义称为矢量加法的**平行四边形法则**。

根据平行四边形的性质，在图1—3中$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} = \vec{b}$。再与图1—2比较，便立即看出定义2.1和定义2.2是一致的。

根据矢量加法的定义，对任意矢量$\vec{a}$，必有

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a},\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

此外，矢量加法还有如下的运算性质。

定理2.1 矢量加法满足如下的运算规则：

（1）交换律 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$。

（2）结合律 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$。

证 （1）将图1—3中的平行四边形看成两个三角形，根据平行四边形的性质和矢量加法的三角形法则可知

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}.$$

故交换律得证。

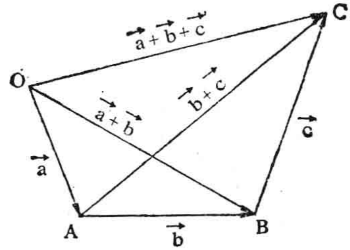

图1—4

（2）作矢量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. 根据矢量加法的三角形法则

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}$$
$$=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}.$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

故结合律得证。#

在上述结合律的证明过程中我们看到，将三个矢量首尾相接，便立即得到了它们的和矢量. 这种方法对三个以上的矢量也完全适用.

定理2.2 将 n 个矢量 $\vec{a}_1$，$\vec{a}_2$，…，$\vec{a}_n$ 首尾相接，即以前一个矢量的终点作为后一个矢量的始点，则以第一个矢量的始点为始点，以最后一个矢量的终点为终点的矢量，便是这 n 个矢量之和.

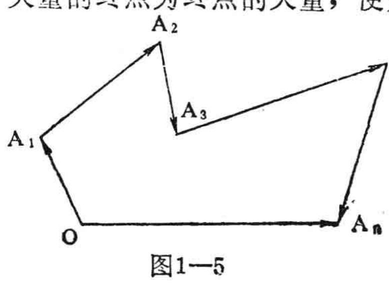

图1—5

证 在空间任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\vec{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\vec{a}_n$.

根据矢量加法的三角形法则，

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n &= \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\
&= \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n} \\
&= \overrightarrow{OA_3}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\cdots \\
&= \overrightarrow{OA_n}. \ \#
\end{aligned}
$$

定理2.2称为 n 个矢量的加法的**多边形法则**. 根据矢量加法的结合律，n个矢量相加与其次序无关. 如果n个矢量相加之后构成一个封闭图形，即第一个矢量的始点与最后一个矢量的终点重合，则它们的和矢量为$\vec{0}$.

2.2 矢量的减法

对任意已知矢量，颠倒它的方向，便立即得到它的反矢量。利用这一点，我们去定义矢量的减法.

定义2.3 对任意矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，我们称$\vec{a}$与$-\vec{b}$之和为$\vec{a}$与$\vec{b}$之差，记作

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

求两个矢量之差的运算称为矢量的**减法**.

由定义可知，矢量减法是矢量加法的特例.

矢量减法也有一个简便适用的**三角形法则**，它的优点是可以不用反矢量，便直接得到两个矢量之差.

定理2.3 对任意矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，在空间任取一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}.$$

证 如图1—6所示，作$\overrightarrow{AC}=-\vec{b}$，则

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}.$$

但四边形$OCAB$是平行四边形，因此

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}=\vec{a}-\vec{b}. \ \#$$

使用上述矢量减法的三角形法则，必须注意差矢量的方向。这里有一个固定的准则，即差矢量的终点与被减矢量的终点重合。

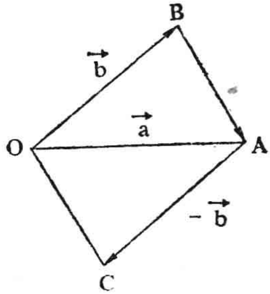

图1—6

推论 以矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$为边的平行四边形的两条对角线上的矢量，分别是$\vec{a}$与$\vec{b}$的和与差。（图1—7）。

应用上述推论时，同样要注意"对角线上的矢量"的方向。

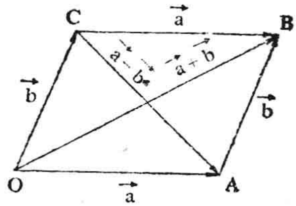

图1—7

利用矢量加、减法的三角形法则，可以得到两个常用的不等式，即三角形不等式。

例1 证明三角形不等式

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|,$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|\geqslant|\vec{a}|-|\vec{b}|.$$

证 考察图1—7中的ΔOAB和ΔOAC，由于三角形一边之长不大于另两边长度之和，不小于另两边长度之差，所以

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\overrightarrow{OB}|\leqslant|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{AB}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|.$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|=|\overrightarrow{CA}|\geqslant|\overrightarrow{OA}|-|\overrightarrow{OC}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|.$$

显然，在上述两个不等式中，等式成立的必要条件是$\vec{a}$，$\vec{b}$共线。

利用矢量的加减法，可以根据几何图形中的某些已知矢量去求一些未知矢量。

例2 在以矢量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$为棱的平行六面体$ABCD—EFGH$中，求矢量$\overrightarrow{AG}$和$\overrightarrow{AE}$，（图1—8）。

解 根据平行六面体的性质可得

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$
$$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AE}$$
$$=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}.$$

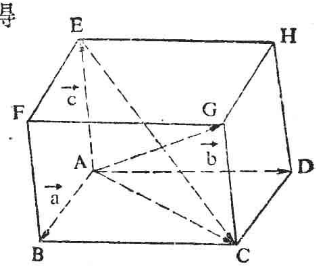

图1—8

矢量方法还为解决很多初等几何问题提供了新的途径。

例 3 用矢量方法证明对角线互相平分的四边形是平行四边形。

证 如图1—9所示，O为四边形$ABCD$对角线交点。由题设

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}。$$

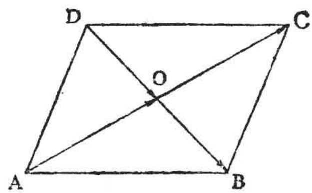

图1—9

因此

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC}.$$

这表明 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$ 且 $\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$，所以四边形$ABCD$是平行四边形。

练　　习

1. 求本节例 2 中平行六面体六个面的对角线上的矢量。

2. 矢量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足什么条件，以下各式成立？

（1） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.（2） $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$.

（3） $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$.（4） $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.

（5） $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|-|\vec{b}|$.（6） $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

3. 设$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是彼此不共线的矢量，证明它们的和为 $\vec{0}$ 的充分必要条件是经过平行移动之后，它们可以构成一个三角形。