TURING 图灵新知

1930

1742

1200

825

影响数学发展的20个大问题

[英] Tony Crilly 著

王耀杨 译

THE BIG QUESTIONS: MATHEMATICS

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

TURING 图灵新知

THE BIG QUESTIONS: MATHEMATICS

影响数学发展的20个大问题

[英] Tony Crilly 著

王耀杨 译

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

影响数学发展的20个大问题 /（英）克里利
(Crilly,T.) 著；王耀杨译. -- 北京：人民邮电出版
社，2012.4
（图灵新知）
书名原文：The Big Questions:Mathematics
ISBN 978-7-115-26155-7

Ⅰ. ①影… Ⅱ. ①克… ②王… Ⅲ. ①数学－普及读
物 Ⅳ. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第160155号

内 容 提 要

这是一本数学科普书。作者通过20篇短文介绍了数学中最重要和深刻的一组“大问题”，同时也介绍了前辈学者的努力和成果，并指出了仍有待于深入探索的一些困难而诱人的未解之谜，内容涵盖数学发展史的方方面面，生动有趣，让读者为其深深吸引。

本书适合于对数学感兴趣的各个层次的读者阅读。

图灵新知

影响数学发展的20个大问题

◆ 著 [英] Tony Crilly
译 王耀杨
责任编辑 卢秀丽

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街14号
邮编 100061 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 http://www.ptpress.com.cn
大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷

◆ 开本：880×1230 1/32
印张：6.875
字数：173千字 2012年4月第1版
印数：1－5 000册 2012年4月河北第1次印刷

著作权合同登记号 图字：01-2011-2425号

ISBN 978-7-115-26155-7

定价：29.00元

读者服务热线：(010)51095186转604 印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　言

数学是一门我们都该有所了解的学问。学校的教学内容是一回事（而且不能打动所有人），但是这门学科的真正意义却是另一回事，她能提供的远不止于此。她不仅是辅助科学应用的一位默默奉献的助手，更与艺术有着根本性的联系。作为人类文明遗产的一部分，数学是鲜活的，并且正在持续地拓展着自身的疆界，而维持其生命力的，就是“大问题”。

数学中的大问题可谓多姿多彩。有些缘起于现代技术的巨大变革，有些则可以追溯至古代，时至今日仍余音不绝。有些已获得明确的答案，但又为一批新问题所取代，有些则依然故我，不为所动，历经若干世纪仍坚守前阵。答案的探求已处于哲学层面，也许注定无法以某种绝对的方式得到解决，但是问题本身依旧保持着迷人的风采。

这就是数学的特点。一个令人感兴趣的事实是：数学的发展是缓慢的。尽管在学校里，应对心算和各种技巧性小问题时速度很重要，但是在真正的数学研究工作中，绝对不存在单纯的快速所带来的优势。数学确实在前行，这是无可厚非的，但是它的步伐更像是熔岩流，柔缓并且不可阻挡，而少有伟大天才的“发现”时刻[①]。

数学具有一种与众不同的特质，使自己与其他科学相区分。一般的科学理论，一旦丧失了可信性，就会被抛弃。例如曾盛行一时的用来解释物质何以能燃烧的“燃素”学说，或者是用来解释光如何传播的“以太”学说。这

① 原文为“Eureka”，其含义接近于“我发现了”，传说阿基米德在洗澡时发现了浮力定律，喜极忘形，赤裸着跑上大街大呼“Eureka”。——译者注

些科学理论已被推翻，仅仅是出于人们好古的趣味而被列入科学史书籍之中。在数学中情况就不同了。一个已经证明正确的结果不可能在其后被证明是错误的，因而一个定理（即一个已经得到证明的数学事实）具有无限的生命。例如关于直角三角形的毕达哥拉斯定理①永远都是正确的。

今天的数学家可能不会再撰写研究论文，提出类似欧几里得在大约公元前300年时给出的那样的定理了。但是那些古代著述仍具有启示性，从基础文献中还可以发现新的思维方式。我们可以阅读古希腊数学家丢番图关于方程理论的著作，并且仍然可以从中获取教益，因为古希腊人所研究的某些类型的方程直至今日仍未获得解答。

这并不是说，时间对于数学理论和定理没有产生任何影响。我们经常对其加以修饰、提炼和裁剪，以适应当代的具体情况。数学的发展趋势是，当某些结论淹没在归纳总结的洪流中时，它们最终的命运不是进入垃圾箱，而是成为更具一般性的理论的注脚。

从数学的角度而言，我们所处的是一个激动人心的时代。新的问题必须要考虑到计算机时代的特征。这不仅是因为计算机能够高效地累加大量数字，更因为它们给我们对于数学证明的观念带来了冲击，进而引发关于数学本质的新问题。它们尤其擅长处理代数问题，以及显示几何形状和平面。

这里所考察的“大问题”，主要是指宏大的主题，并且集中探讨那些需要去关注的基本问题。这些问题会揭示数学从何而来，她有着怎样的发展历程，又将去往何方。它们都会给出答案，但这些答案绝不是已成定局的最终答案。它们引发了使数学家振奋激昂的新问题，并且告诉我们，数学是如何帮助我们理解自身居处其中的现实物理世界的。最重要的是，它们充分表明，数学是一门富于生命力的、活生生的学问。

---

① 我国习惯称为“勾股定理”，本着尊重原文的态度，此后仍直译为“毕达哥拉斯定理”。
——译者注

数学披上今天在我们看来不那么可亲的外衣……当目睹这一切之后，你是否还会觉得数学是那么不近人情呢？

其次，“大问题”这个视角有可能帮助我们在更广阔的背景上理解数学知识。当我们在学校中学习数学知识时，会按照各种分支的名目来整理不同概念、定理，这个是几何的，那个是代数的，还有组合、分析等。看起来，数学知识就像分放在不同抽屉中的卡片，彼此分隔在孤立而漆黑的世界中。但是这可完全不是数学真正的样子。事实上，数学是统一的，她就像一张致密而牢固的网，不同节点之间都有着强韧有力的连接，只要将其中某些点提起，整张网就会随之而起，落入你的掌握之中。数学中的“大问题”就是这样的点。这些点可以自然地延伸开去，不断牵连出强有力的新方法和广阔的探索余地；换言之，它们也使数学获得了“繁衍能力”。

最后，我想谈谈这本书的读法。尽管数学阅读的方法绝不是三言两语能说清楚的，但是下面这个建议多半会是有帮助的，更要紧的是，它是容易实施的。这个方法很简单，就是“随时停下来”。比如，当介绍一个新问题及其含义的段落结束后，你可以先停下来，自己想想这个问题是否有什么可以着手尝试的方向；在看完一个问题的处理方法之后，文章中出现了“由此导致新的疑问”之类的句子，你也可以先不往下看，自己思考一下究竟还可以提出什么样的新问题。如果你的想法和下文内容是一致的，那就会收获一份满足感，继续看下去的动力更足了；要是你的想法和下文内容不一样，那就更有趣了，因为你可能想到了一些新的探索方向，因而从一个“接受者”转型为潜在的“创造者”。

作为译者，自己宣称所翻译的是一本好书大概不会是一件很有说服力的事情。如果我的这番介绍能够使你相信这本书的内容会有助于提高你对数学的兴趣，从而愿意去品味其中的妙趣，那么我将感到十分满足。

王耀杨

译 者 序

很多年前，当我还是学生的时候，经常听到数学老师说这样一句话："现在的孩子不会问问题！"时光荏苒，如今我自己也成为一名数学老师，我的同事们依旧不厌其烦地在重复着这句话。这着实是件很可疑的事情。

事实上，我相信自己逐渐明白了其中原委。"我国数学教育长期存在重教轻学，重标准答案而轻智力开发，重书本知识机械的接受而轻学生实践创新活动的倾向。同国外数学教育相比较，我国数学教育强调对数学课本上现成题目的解答而轻学生对数学问题的发现与提出问题的能力的培养。"（李兴贵等主编，《新课程数学阅读教学新论》，P129）

现在大家所看到的这本小书，就是一本和你谈"数学问题"的书。它要谈的事情包括：好的数学问题究竟应该是什么样的？怎样做到在探索过程中不断追问好的问题？如何看待探索问题时遇到的种种困难？等等。它的指向很明确，就是"向大师而不是他们的学生学习"——当我们仔细审视数学中那些真正的"大问题"，欣赏那些"大人物"在其中展示出来的风采时，才会逐渐理解数学中评价好坏的标准。

当然，这本书中所说的"数学问题"，并不是我们平常所说的"练习题"哦。这里所谓的"数学问题"，是指数学发展历程中一类特殊的问题，它们对于数学知识的建立与发展具有至关重要的意义。

具体来说，这类问题有以下三个特点。首先，它们的原始形态并不难懂，最多只要简短的解释，就能使大多数人理解其含义。例如关于质数的

一系列问题就是这样，甚至像混沌理论这种新生主题也是如此。其次，这些问题必须是足够困难的。或者说，它需要数学家作为一个整体付出大量的努力，有时可能会需要很多年的积累。数学家是一群喜欢困难的人，他们在面对难题时往往会兴奋多于紧张。因此，一个足够困难的问题常常会导致很多新方法的出现，有时也会出现“无心插柳柳成荫”的效果。最后但可能是最重要的是，这些问题还必须是“有繁殖力的”。也就是说，这个问题能够催生出大量的新成果，它就像一棵小苗，可以长成参天大树，还能结出累累硕果。曾经有人将这个特点描述为“非得要用十几个新问题才能解决一个老问题”，这个幽默的概括很好地揭示出事情的一个侧面；大数学家希尔伯特的比喻则似乎更切中肯綮地说明了什么是好的数学问题：一只“会下金蛋的老母鸡”。

那么，我们可以从欣赏这些“问题”中收获什么呢？或者退一步说，作者试图就这些“数学问题”和我们分享些什么呢？我想，至少有两个方面是值得谈一谈的。

首先，从“大问题”这个角度来看待数学，可以大大消除她原本可能给人带来的拒人千里之外的冷冰冰的印象。有这样一句经验之谈“每一个公式都会使一本科普书的读者减半”，这很可能与事实相差不远。仔细想想，至少从外观上看，数学是多么“不合群”啊！她使用极其简洁的符号语言，用非常严格的方式组织词句和段落，更喜欢用一种让人无可争议同时也多少有些无可奈何的方式去表达最终的结论……这一切的一切与我们常常看到的那些文学、艺术类作品相比，是多么不一样啊！但是，这真的就是数学的“本来面目”吗？至少不完全是。在这本书中，你会看到数学的另外一面：数学问题的最初来源常常是一些看似简单的现象，所使用的方法是我们几乎都会感到熟悉的，接着，在某个重要的岔路口，因为某些我们这些“局外人”也觉得可以接受的理由，她逐渐“转型”，变得越来越困难，而乐在其中的数学家们则运用类比、联想等看起来一点也不严格的方式去进行各种各样的尝试，直到他们得到某些足以打动自己的东西，最后才为

目　　录

1 数学的意义是什么？
——关于目标和前景的介绍

到了21世纪，数学已成为一门广阔而多层面的学科。她涵盖的活动类别是如此宽广，看起来几乎不可能将其种种表现归类于单一学科之中。一方面，她界定了诸如计数、时间和金钱等使日常生活得以运转的事务的基本要点，而另一方面，她看来就像一个密封的世界，在那里，一些不食人间烟火的伟大头脑炮制着无比复杂的谜题——接着他们再经年累月地尝试着去解决那些谜题。与此同时，我们的政治家们一如既往地宣称着：我们需要更多的数学家。那么，所有这些数学究竟有什么意义，她又是如何融入我们这个世界的呢？

我们今天所看到的数学根植于早期计数文化，其源头可追溯至大约公元前3000年。当然，数学一开始时只是用来处理实际问题。诸如市场商贸、税款支付、土地丈量、仰观星辰和历法设计等问题都要应用到数字、计算和某些基础的几何知识。但是过了大约一千年，埃及人开始研究他们所使用的数字系统的性质，而不大考虑是否具有明显的应用价值。他们还出于好奇心与智力上的愉悦感而创造数学谜题，就像我们今天享受报纸上的那些数独游戏一样。数学开始关注自身，数学家由此而产生。

大约公元前500年时，古希腊人在数学方面实现了巨大的跨越，一种真正具有数学思想的文化繁荣发展起来。他们的著作影响了其后的各个时代，直到今天仍为我们所研究。数学被视为最有用处的，因而成为正统教育中的固有组成部分。毕达哥拉斯、柏拉图、阿基米德和欧几里得只是那些推崇数学并影响后世千百年的希腊先贤中的一部分代表人物而已。

基督教时代的前几个世纪是倒退时期，那些热衷于数学的人会发现他们被驱逐到了文化世界的边缘。大约在公元400年时，希波的圣奥古斯丁提出“一个好的基督徒应该提防数学家和那些作出空洞预言的人”，谴责他们签订了“与魔鬼之间的契约，去蒙昧人们的心灵，将人们束缚于地狱的枷锁之中”。在那个年代里，与数学家这个词紧密联系在一起的是占星术士的邪恶行径，人们认为数学在潜在意义上是邪恶的异端主张，这种猜忌使数学在很长时间里毫无进展。

在16世纪，哲学家弗朗西斯·培根哀叹“纯粹数学之出色用途”仍未为人透彻地理解，不过有一件事标志着情况开始好转，伽利略获得了帕多瓦大学的数学教授职位。伽利略与罗马天主教之间的冲突（即教廷对他的某些发现的抵制）表明，当时的人们对于数学以及数学对物理学和天文学的影响作用的接受程度仍是很有限的。但是到了17世纪晚期，一场数学与科学的变革发生了，主角是伊萨克·牛顿和他的同时代者，他们永久性地改变了文化世界中的力量平衡。18世纪末和19世纪初的浪漫主义者可能会指责这种新的世界观，威廉·布莱克也许会嘲讽牛顿，但是作为科学的语言，数学已前途无忧。19世纪，数学系在各地大学中陆续设立，大批新颖而有挑战性的研究著述不断涌现。数学从此得到普遍认可。

实用性与纯粹性

关于数学有一种广为人知的争论，即究竟是实际需求孕育了数学创造，还是新的数学知识给实际应用创造了机会。从历史的角度来看，对实用性的考虑是数学发展的驱动力，但是当这门学问的内在生命开始萌发后，“纯粹的”数学思维就有可能独自为新的应用创造空间。好的数学基本上都具有应用潜能，但是你绝对不知道应用的时刻会在什么时候来到。敏锐的洞见也许会在下个星期出现，但也可能沉寂达50年甚至500年之久。

在数学发展的历史长河中，遍布着纯数学理论找到实际应用的例子。古希腊人精心建立了圆锥曲线的理论，后来人们发现，这正是17世纪时约翰尼斯·开普勒与伊萨克·牛顿断言行星以椭圆轨道运行时所需要的工具。多维数组的理论（矩阵代数）是在19世纪50年代为处理数学内部问题而建立起来的，而它恰好就是70年后快速发展的量子理论中的“矩阵力学”所需要的。而当乔治·布尔建立一个将逻辑转化为代数（即布尔代数）的系统时，他也绝对无法想到，他为一个世纪之后的计算机编程提供了语言载体。

就在50年前，富于影响力的英国数学家哈代还曾写道，他在从事数学研究时不会受限于必须为其思想找到“实际用处”的想法。事实上，令他感到欣慰的是，那时的数论仍是远离实际应用的。但是今天，他可能已无法再称许这种隔离状态，因为在这个世界中，他的纯数学对于计算机安全领域来说具有极其重要的意义（见第14章和第20章）。今天我们有很多种关于维度的理论，但是当曼德尔布罗特在20世纪70年代中致力于“分形”研究时，大概很少有人会猜测出它们的潜在应用（见第12章）。

但是数学家确实也是在意需求的。在18世纪，詹姆斯·瓦特遇

到了如何将蒸汽机中活塞的直线运动转化为旋转运动的问题，其结果是工业革命期间诞生了几何联动理论。当第二次世界大战需要密码破解者时（见第14章），拥有非凡才能的数学家从众多大学应征而来，结果是世界上第一台电子计算机的建成。

因此，纯粹数学与应用数学之间始终保持着一种共生关系，在电子时代，这一点更是显得格外真实。没有数学，计算机将一无是处，数字摄影技术根本不会出现，手机也将进入沉寂的世界。但是今天，职业数学家的“纯粹”研究也将大大受益于计算机的计算能力：这次轮到“应用数学”反哺“纯粹数学”了。

数学还有自我意识的一面，即她在哲学层面上反思自身的一面。关于这方面的历史呈现出这样一种发展历程：从古希腊人所认为的数学家揭示的只是早已存在的真理，到关于数学家角色的一种更为精巧的定位，其中涉及创造性和想象力（见第19章）。

在现代数学中，知识发展的基础在于公理和逻辑演绎。古希腊人预设了他们的公理的真实性，而今天的数学家则只期望公理是相容的。20世纪30年代，库尔特·哥德尔给数学带来了冲击，他证明了“不完备性定理”，这个定理指出，在一个形式化的公理系统中，某些数学命题在只使用该系统公理时既不能证明也不能证伪。换言之，当今数学中可能存在着不可证明的真理，因而也许只能保持现状。

尽管现代数学可以说是广袤而丰富的，其根基仍可如学校课程中那样划分为算术、代数和几何等分支。那么，它们的核心是什么？它们又将向何处去呢？

数及其特性

在数学的保留节目单中，用以计数的数字始终保持着最为重要

的地位，它们是所有数学家的起点。它们的演变历史可谓丰富多彩（见第2章），毫无疑问，我们最终使用符号0~9来表示的“以10为基”的系统并不是必然的。比如，最开始时并没有0。

质数（只能被自身和1整除的数）的特性是非常让人着迷的研究对象。我们仍不清楚它们在计数数中是如何分布的，考虑到我们认识质数已超过2000年之久，这一点几乎是难以置信的（见第3章和第20章）。除了计数数和其中的质数之外，在几个世纪中这份节目单就扩展到还包括负数、分数以及通常所称的“无理数”，即无限不循环小数。所有这些合在一起，便是数学家所说的“实数”（见第4章）。

数的内容远不止于这些。“实数”还只是一维的。我们可以设想它们在数直线上向左方（即负数）和右方（即正数）伸展。当数学家们凭借我们所称的“复数”（见第5章）而勇闯二维世界时，一次伟大的飞跃来临了。它们在解方程和提供新的分析理论等方面为数学家带来了更强的力量。今天，“复数”对于诸如电和磁等现象的研究可谓至关重要。

于是，我们有了很多种类型的数，但是它们要延展到哪里才会是尽头？自古以来，数学家便注定要与无穷这一主题进行较量。自亚里士多德以来，人们就认为“潜无穷”是存在的——这是一种永远不可能到达的无穷。但是到了19世纪，格奥尔格·康托尔引入了另一种无穷的观念，使得我们有可能去讨论很多的无穷（见第6章）。

几何、代数与数学中的变革

两千多年以来，几何学一直受控于古希腊人那似乎是无可抗拒的权威之下，直至今天，学生在校园中所接受的多种规则也是由他们制定的。特别是欧几里得，他依靠自己缜密的思维能力建立了一套呈现为如经典般真理的几何学知识系统。但是随着时间流逝，欧

氏几何学逐渐暴露出不足，人们最终明白，还存在着其他有效的几何学可以用来处理二维、三维甚至更高维度的现象（见第7章），并产生了“流形”的概念——这种形状的局部和整体具有不同性质的几何学(见第17章)。这些几何学甚至比欧氏几何更有资格宣称是“宇宙的几何学”，那可是一个深受物理学家关注的主题。

物理学家利用几何学去追索事物和宇宙的奥秘，生物学家和医学研究者则采纳了另一种类型的几何学，“纽结理论”，以便理解DNA的拆解和分析——这项实践引发了关于DNA检测的争议，并且在人类身份识别与案件侦破等问题中产生了众多复杂而又难以预料的后果。总而言之，数学家为科学家提供了不同的几何学，在这个工具箱中，科学家们可以选择看起来最适合于处理当前工作的工具。

将几何学转译为代数的语言是一个重要的转折点，这项发展应归功于17世纪的笛卡儿。在20世纪，对称的几何学也化身为代数学。对称性是一种难以描述的性质，在数学中（以及在其他很多领域中）经常被用来定义美（见第15章），现在我们可以用数学的“群论”来把握它了。群的概念在近世代数中处于核心地位，它使得对称性可以在微观尺度上进行考察（见第18章）。在一项可以追溯至19世纪的宏大研究项目中，数学家们最终于1981年完成了有限单群的分类。在这个“巨型定理”中，人们创造出一幅关于群的地图，所有的群都被划分到各族之中，此外还有26个散在单群——其中最大的一个包含大约8×10^{53}个元素，也就是8后面接着53个0。现在群论在理论物理学中占据着重要的地位，因为空间的变换就构成了群；在化学和晶体学中也是如此，因为在这里对称性出场了。

在一个代数问题中“求出x的值”，这对于每个受过基本教育的数学界人士来说都是非常熟悉的。这类“逆”问题是数学所擅长的领域，其应用颇为广阔。在这里，我们经常需要求一个“未知量”，