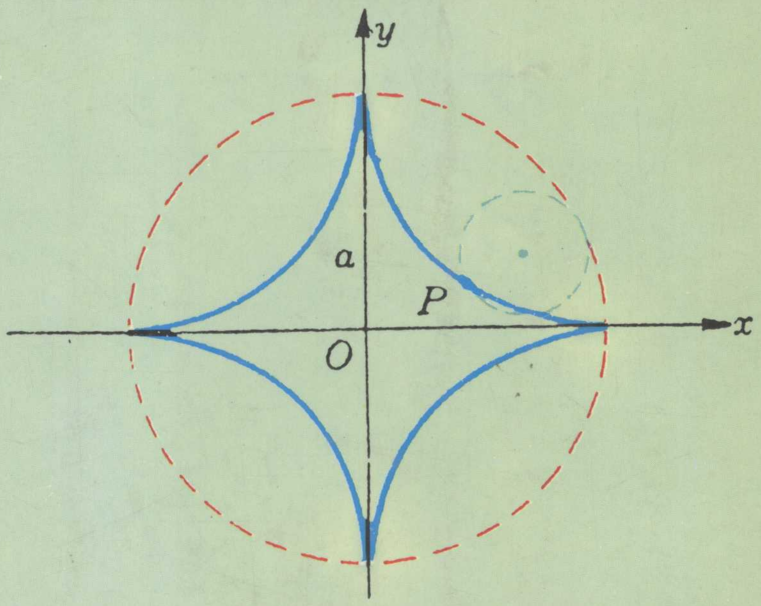
◎二技・插大・研究所

微積分

系統整理與實戰研究

(上)



蔣正明 編著
蔣榮宗 校訂

千華出版公司 印行

版權

之章

微積分 系統整理 實戰研究 (上)

編著者：蔣正明　校訂：蔣榮宗
發行人：廖雪鳳
發行所：千華出版公司
地址：臺北市金山南路二段 138 號 2 樓
電話：(02)3952248・3952249
傳真：(02)3962195
郵撥：第 01010213 號　本公司帳戶
登記證：行政院新聞局局版台業字第 3388 號
印刷所：雨利美術印刷公司
中華民國 81 年 4 月 1 日 再版

定價：320 元

ISBN 957-624-169-3

再版序

歲月悠悠，時光荏苒，求學的過程，是令人懷念回味的。親愛的同學們，好把握這段黃金時段，充實自我，規劃人生目標，大步邁向前——。

一個目標，一個心願，在考前數月之衝刺，按本書思考流程圖及命題焦點之準備方向，整理複習，全然掌握考題之脈動，則事半功倍。

本書修訂完稿，內容更臻完美。同學們“持之以恆”，以堅強之意志力，將本書上下兩册熟讀（可與同學約定進度，相互討論，更覺趣味盎然），然則閣下實力定可擠身一流高手之林，那麼金榜題名，易如反掌，祝好運！

蔣正明　謹誌

序　　言

親愛的同學，求學的過程中，好書相伴，手不釋卷，是何等的快樂呢！甘之如飴 。

筆者任教全國各大補習班，以豐富而寶貴的教學經驗，著手撰寫本書，力求本書之完整而具系統性，且利於研讀消化吸收，尤以升學考試爲主，裨囊括所有的考題類型，由淺入深，漸至佳境，務使學生建立微積分的全部觀念，且在熟讀、演練本書後，能夠在考場上獨佔鰲頭。

全書內容精彩，含 **Purcell**、**Anton**、**JK**、**Thomas** 各版本原文書之精華與**80年度最新試題大觀**，題題都可能是教授出題的題材，具典型代表，深切掌握命題的方向。全書內容之精心安排如下：

- 思考流程圖與系統整理
- 觀念分析與實戰問題研究
- 快攻試題演練（包羅英文試題）

研讀時循序漸進，系統整理複習，動筆演練思考，則功力卓然大增，定獲高分。

本書撰寫期間，承蒙中山大學電機系講師林吉聰、清大應數所李懋禎、及補習班可愛的學生們提供寶貴意見資料，就此一併致謝。語末，敬祝親愛的讀者諸君

金榜題名！！

蔣正明　走筆傳鐘下

研讀本書掌握原則

針對各校命題方向，演讀本書，務必把握以下原則，定獲高分：

其一　報考二技者：

本書實戰研究與快攻試題中繁雜之計算與證明（解答超過一頁者）可省略不讀，因二技的題目較簡單，每一道題目並無須花太多時間，例如八十年之證明題 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{1000000}}$ 收斂嗎，逕用極限比較審斂法，或積分審斂法，均可快速解出。

其二　報考台大（甲）、清大、交大、研究所者：

本書所有試題均須精讀演練，不容省略，因爲報考這三所名校與研究所之高手如雲，戰況激烈，唯有一流的實力，才能過關斬將榮登金榜，同學們請接受挑戰，何懼之有？

其三　報考其他學校（理工商、台大（乙））者：

本書快攻試題中之繁雜題目（簡答篇幅超過一頁者）可不做，但「實戰研究篇」與快攻試題中的英文試題請多做幾遍，因這類題目深具代表性，命中率非常高。

同學們，「獨學而無友，則孤陋而寡聞」，與一好友共同研究，互相請益問答，那麼讀書之樂趣更濃，且閣下的功力將大增，則榮登金榜，易如反掌，祝好運。

➡微積分常用符號，請留意!!

$\forall$：全部，對每一個（ for all ）

$\exists$：存在，至少存在（ exist ）

$\exists!$：唯一存在（ exist only one ）

$\Rightarrow$：則，推演得（ then～）

$\Leftrightarrow$：若且唯若（ if and only if ）

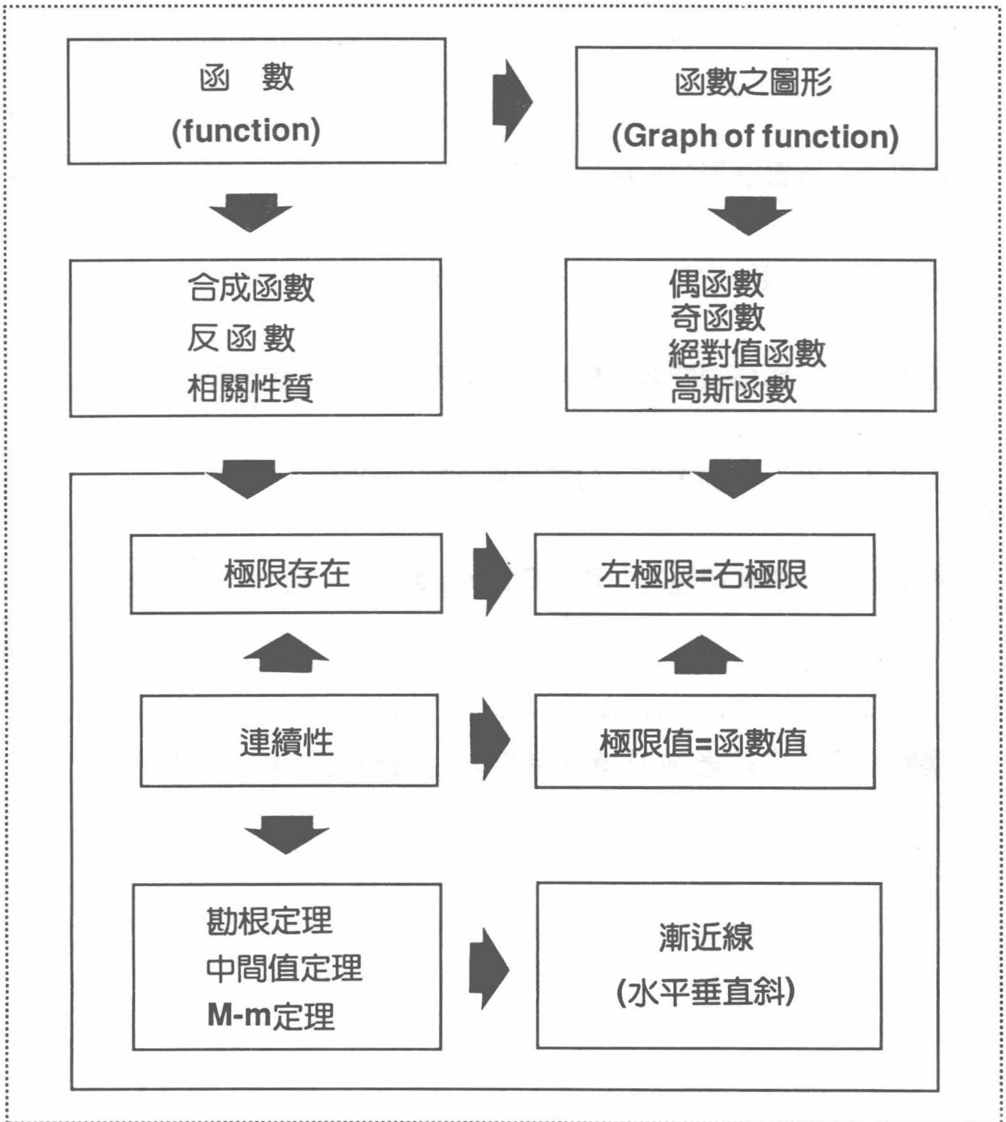
$\in$：屬於（ belong to ）

$\ni$：使得（ such that ）

目 錄

1 函數、極限與連續

思考流程圖：



微積分本章命題焦點：(把握住方向，事半功倍！！)

焦點 1 ：函數圖形之對稱性（奇偶性）

焦點 2 ：極限的定義（ $\varepsilon-\delta$ 之關係式）及相關證明。

焦點 3 ：各類極限問題之探討（注意夾擠定理及綜合型）

焦點 4 ：漸近線的求法（分式函數與無理函數）

焦點 5 ：函數連續性之討論（**Blzano's** 定理，最大－最小定理）

OK，讓蔣老師帶領諸位進入這繽紛的微積分天地吧!!

Topics 1 函數、反函數、函數的奇偶性

系統整理

1.函數的定義（the definition of function）：【77.政大】

$f : A \to B$

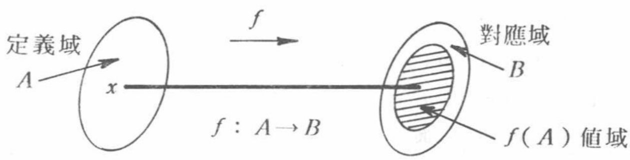
函數 f 是對集合 A 中任一元素必有 B 中唯一元素與之對應，數學表示式：

$$\forall x \in A, \exists ! y \in B \to y = f(x)$$

《**注意**》77 政大插班試題的第 1 題就是考函數的定義。

2.定義域（Domain）**與值域**（Range）：

A 稱為定義域，B 稱為對應域（codomain）。而函數之定義域中每個元素的對應值所成之集合謂之值域，記為 $f(A)$。



$$f(A) = \{f(x) \mid f(x) \in A\} \; ; \; f(A) \subseteq B$$

《**注意**》若 $f(A) = B$，則稱 f 為映成函數（onto function），亦稱蓋射函數。

3.偶函數（Even function）**與奇函數**（Odd function）

$\forall x \in D_f$

(1)若 $f(-x) = f(x)$，則稱 f 為偶函數，其圖形本身對稱 y 軸。

(2)若 $f(-x) = -f(x)$，則稱 f 為奇函數，其圖形本身對稱原點。

《**注意**》D_f 為 Domain of f 之縮寫，表函數 f 的定義域。

4.合成函數（Composition of functions）：

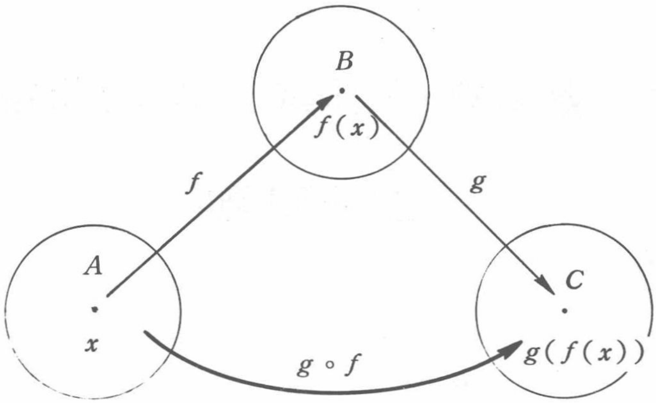
若 $f : A \to B$，$g : B \to C$

f 與 g 之合成函數，以 $g \circ f$ 表之，即

$$g \circ f : x \to (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

※ $g \circ f$ 讀做“ g circle f ”

圖示如下：



$x \in D_f$

$f(x) \in D_g$

《**注意**》$f \circ g : x \to (f \circ g)(x) = f(g(x))$，一般而言 $f \circ g \neq g \circ f$，即 $f(g(x)) \neq g(f(x))$。

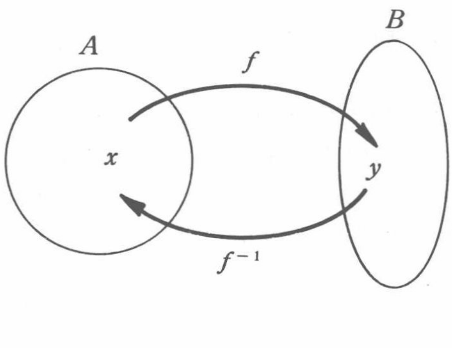
5. 反函數(Inverse function)

已知 f 爲一對一且映成函數

若 $f : A \to B$，定義 $f^{-1} : B \to A$，滿足

"$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$"

則稱 f^{-1} 爲 f 的反函數。圖示如下：



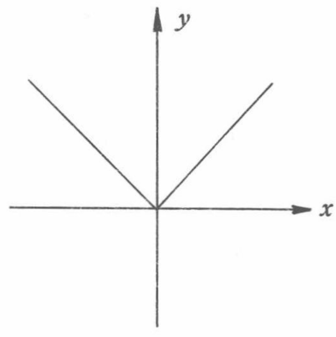
按定義顯然可得：

(1) $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$，$\forall y \in B$

(2) $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$，$\forall x \in A$　　【80 輔大】

《**注意**》f^{-1} 讀做"arc f"

且 $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$，蔣老師特別叮嚀。



6. 絕對值函數與高斯函數

(1)絕對值函數

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

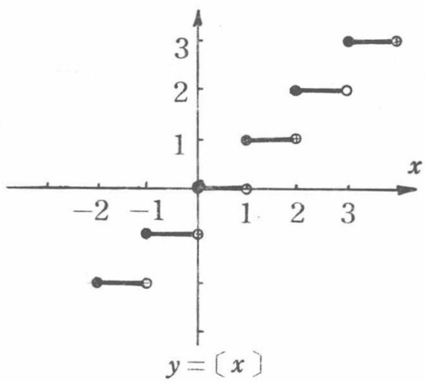
(2)高斯函數（最大整數函數）（Greatest integer function）：

若 $n \leq x < n+1$
$(n \in Z)$
$\Rightarrow f(x)=[x]=n$

按高斯函數的定義，可得下列兩個重要不等式：

(i) $[x] \leq x < [x]+1$，或 $x-1 < [x] \leq x$，$\forall x \in R$

(ii) $[x] < x < [x]+1$，或 $x-1 < [x] < x$，$\forall x \in R-Z$（不包含整數之實數）。



分類檢討　**觀念分析**　效果領先

➡【**分析 1**】**自然定義域**：(natural domain)

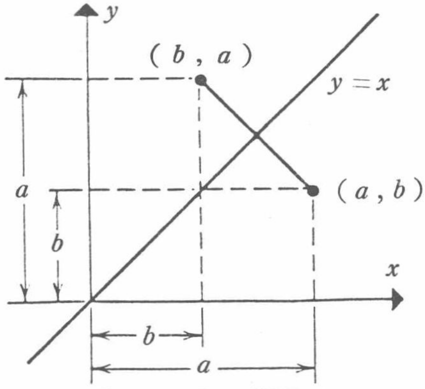
假如一函數的定義域並未指定，我們總是令其爲最大集合，使函數有意義且具實值函數之實數定義域，通稱爲自然定義域，例：

$g(x)=\sqrt{9-x^2}$ 爲實數　$\therefore 9-x^2 \geq 0$，得 $|x| \leq 3$

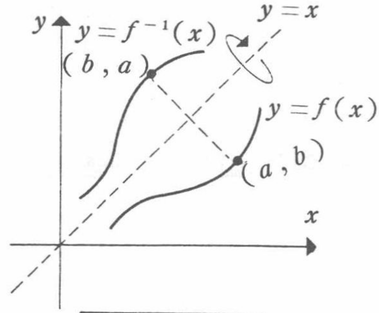
$\therefore$ 自然定義域 $D_g=\{x \mid x \in R，|x| \leq 3\}$

➡【**分析 2**】**f 與 f^{-1} 的圖形**：

函數 f 與其反函數 f^{-1} 的圖形對直線 $y=x$ 對稱：



$f : a \to b$，描點 (a , b)
$f^{-1} : b \to a$，描點 (b , a)



f 與 f^{-1} 的圖形相對直線 $y = x$ 互爲反射

➡【分析3】三角函數之奇偶性：

(1) $\cos x$ 與 $\sec x$ 爲偶函數，對稱 y 軸；且滿足

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sec(-x) = \sec x$$

(2) $\sin x$, $\csc x$, $\tan x$, $\cot x$ 爲奇函數，對稱原點，且滿足

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \csc(-x) = -\csc x$$

$$\tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x$$

例：$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$；$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

Ok！！請繼續研讀實戰研究，細加品味，其樂無窮。

PART A 實戰問題研究（由淺入深、漸至佳境！）

問題 1：(a)何謂實值的實變函數？

(b)設函數 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$，$g(x) = \begin{cases} 3，若\ x < 0 \\ 2，若\ 0 \le x \le 1 \\ 1，若\ x > 1 \end{cases}$

試求 $g(f(x)) = ?$ $\quad f(g(x)) = ?$

(c)設函數 $F(x) = \frac{1}{|x| + 3}$，求三函數 f，g 及 h 以使 $F(x) = f(g(h(x)))$

【68.成大轉學考】

《**Key**》$g(f(x))$ 先 f 而後 g，$f(x) \in D_g$，注意合成函數之順序。

Ans：(a)若 $f : A \to B$，且 A，$B \subseteq R$（即 A，B 均爲 R 之子集合），則稱函數 f 爲 A 映至 B 之一實值的實變函數。

(b)(i) $\because f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(f(x))=\begin{cases} g(x) & x\geq 0 \\ g(0)=2 & x<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} g(x)=\begin{cases} 1 & x>1 \\ 2 & 0\leq x\leq 1 \end{cases} \\ 2 \qquad\qquad x<0 \end{cases}$$

$$\therefore g(f(x))=\begin{cases} 1 & x>1 \\ 2 & x\leq 1 \end{cases}$$

(ii) $\because g(x)=\begin{cases} 3 & x<0 \\ 2 & 0\leq x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f(g(x))=\begin{cases} f(3)=3 & x<0 \\ f(2)=2 & 0\leq x\leq 1 \\ f(1)=1 & x>1 \end{cases}$$

$$\therefore f(g(x))=\begin{cases} 3 & x<0 \\ 2 & 0\leq x\leq 1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

(c) $\because F(x)=f(g(h(x)))$，F爲h，g，f之合成函數（注意順序）

取$h(x)=x$，$g(x)=|x|+3$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\Rightarrow f(g(h(x)))=f(g(x))=f(|x|+3)$$

$$=\frac{1}{|x|+3}=F(x)$$

顯然$h(x)=x$，$g(x)=|x|+3$，$f(x)=1/x$爲F的一組解。

《**注意**》問題(c)中，h，g，f之答案並非唯一，取$h(x)=|x|$，

$g(x)=x+3$，$f(x)=\dfrac{1}{x}$亦可。

問題 2：(1)試求函數f之定義域D_f，值域R_f

$$y=f(x)=\sqrt{x-x^2}$$

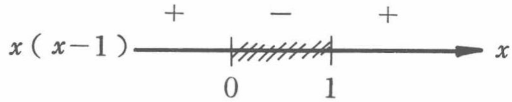
(2)試求函數g之定義域D_g值域R_g，並繪其函數圖形

$$y=g(x)=x+\frac{1}{x}$$

【78.中興轉學考、80.二技】

《**Key**》$\sqrt{a}\Rightarrow a\geq 0$，$\dfrac{b}{a}\Rightarrow a\neq 0$（實值變數函數）

Ans：(1) $y = f(x) = \sqrt{x - x^2} \in R$



$\Rightarrow x - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - x \leq 0$

$\Rightarrow x(x-1) \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$D_f = \{x \mid x \in R，0 \leq x \leq 1\}$（或 $D_f =$〔$0, 1$〕）

令 $t = x - x^2 = \dfrac{1}{4} - (x^2 - x + \dfrac{1}{4})$

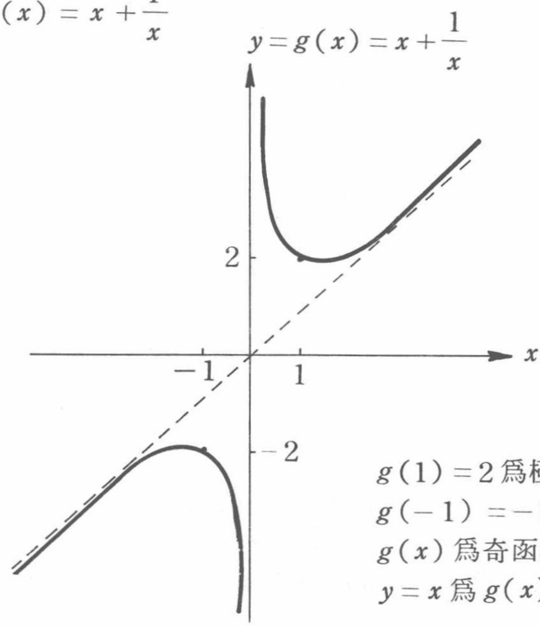
$= \dfrac{1}{4} - (x - \dfrac{1}{2})^2 \leq \dfrac{1}{4}$

$\because 0 \leq x - x^2 \leq \dfrac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x - x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2}$

$R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2}，y \in R\}$（或 $R_f =$〔$0, \dfrac{1}{2}$〕）

(2) $\because y = g(x) = x + \dfrac{1}{x}$



$g(1) = 2$ 為極大值

$g(-1) = -2$ 為極小值

$g(x)$ 為奇函數，對稱原點

$y = x$ 為 $g(x)$ 之斜漸近線

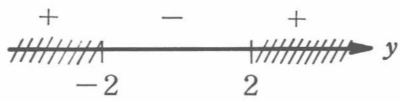
$\Rightarrow yx = x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 - yx + 1 = 0$，$x = \dfrac{y \pm \sqrt{(-y)^2 - 4}}{2}$ 爲實數

$\Rightarrow (-y)^2 - 4 \geq 0$

$\Rightarrow (y-2)(y+2) \geq 0$

$\Rightarrow y \geq 2$ 或 $y \leq -2$



$\therefore D_g = \{x \mid x \in R，x \neq 0\}$，$R_g = \{y \mid y \geq 2$ 或 $y \leq -2\}$

問題3：設 $f(x) = \begin{cases} x &，若\ x \in Q \cap [0, 1] \\ 1 - x &，若\ x \in [0, 1] - Q \end{cases}$

(a)求 $f(x)$ 之值域。

(b)求 $f(x) + f(1-x)$ 之定義域及值域。

(c)求 $f(f(x))$ 之定義域及值域。　　【成大轉學考】

《**Key**》$x \in Q \cap [0, 1]$ 與 $Q \in [0, 1] - Q$ 分別討論之。

Ans：(a)(i)當 $x \in Q \cap [0, 1]$

$\Rightarrow f(x) = x \qquad \therefore 0 \leq f(x) = x \leq 1$

(ii)當 $x \in [0, 1] - Q$

$\Rightarrow f(x) = 1 - x$

$\because 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1$

$\therefore 0 \leq f(x) = 1 - x \leq 1$

由(i)(ii)知值域爲 $[0, 1]$

(b)(i)當 $x \in Q \cap [0, 1]$

$\because x$ 爲有理數，$1 - x$ 亦爲有理數

$\Rightarrow f(x) + f(1-x) = x + (1-x) = 1$

(ii)當 $x \in [0, 1] - Q$

$\because x$ 爲無理數，$1 - x$ 亦爲無理數

$\Rightarrow f(x) + f(1-x) = (1-x) + [1-(1-x)] = 1$

由(i)(ii)得，定義域爲 $[0, 1]$，值域爲 $\{1\}$。

(c)(i)當 $x \in Q \cap [0, 1]$

$\Rightarrow f(f(x)) = f(x) = x$，　$\therefore 0 \leq f(f(x)) \leq 1$

(ii)當 $x \in [0, 1] - Q$

$\Rightarrow f(f(x)) = f(1-x) = 1 - (1-x) = x$

$\therefore 0 \leq f(f(x)) \leq 1$

由(i)(ii)知定義域爲 $[0, 1]$，值域爲 $[0, 1]$

問題4：試判斷下列各函數之奇偶性：

(1) $f(x) = 0$

(2) $g(x) = (x^3 + x)^{\frac{1}{3}}$

(3) $h(x) = x|x|$

(4) $\ell(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ 【80.年屏東技術學院】

《**Key**》由定義解之。

Ans：(1) $\because f(-x) = 0 = f(x)$ $\therefore f(x)$ 為偶函數

且 $f(-x) = 0 = -f(x)$ $\therefore f(x)$ 為奇函數

顯然 $f(x) = 0$ 為偶函數，也為奇函數。

(2) $\because g(-x) = [(-x)^3 + (-x)]^{\frac{1}{3}}$

$= (-x^3 - x)^{\frac{1}{3}}$

$= -(x^3 + x)^{\frac{1}{3}} = -g(x)$

$\therefore g(x) = (x^3 + x)^{\frac{1}{3}}$ 為奇函數。

(3) $\because h(-x) = -x|-x| = -x|x| = -h(x)$

$\therefore h(x) = x|x|$ 為奇函數

(4) $\because \ell(-x) = \dfrac{a^{-x} + a^{-(-x)}}{2} = \dfrac{a^{-x} + a^x}{2} = \ell(x)$

$\therefore \ell(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ 為偶函數。

問題5：試證：任意一個從 R 到 R 的函數 f 均可表為一偶函數與奇函數的和。 【太重要的考題!!】

《**Key**》 $f(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

【**證明**】 $\because f(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

令 $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$

$h(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

$\Rightarrow f(x) = g(x) + h(x)$