College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

工程数学
矢量分析与场论
(第四版)
学习辅导与习题全解

谢树艺

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

工程数学
矢量分析与场论
(第四版)
学习辅导与习题全解

Shiliang Fenxi yu Changlun (Di-si Ban)
Xuexi Fudao yu Xiti Quanjie

谢树艺

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本辅导书依据《矢量分析与场论》从第三版到第四版内容的变动修订而成，除了对教材的内容作了一些扼要解释和补充一些示范性例题外，还增补了教材各章节的全部习题解答，为读者提供一种可参考的解题思路和方法。本次修订对书中各部分内容作了适当的修改和增删，并将教材中的一些基本公式汇集于附录，以便读者查用。本书可供使用主教材的师生教学参考之用。

图书在版编目（CIP）数据

工程数学：矢量分析与场论（第四版）学习辅导与习题全解/谢树艺编. —北京：高等教育出版社，2012.7
ISBN 978-7-04-035655-7

Ⅰ.①工… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①工程数学-矢量-分析-高等学校-教学参考资料 ②工程数学-场论-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①TB112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 141155 号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 张晓丽　封面设计 于 涛　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　责任校对 殷 然　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	4.625	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	110千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	9.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 35655-00

修订版前言

本书是在《矢量分析与场论（第三版）学习辅导与习题全解》的基础上进行修订的。主要是依据教材《矢量分析与场论》从第三版到第四版内容的变动而作的相应修订。同时又对原书的内容进行了认真的审核，在书中的各个部分，如内容释要、解题示例、习题全解，均作了适当的修改和增减变动，务使其愈臻完善。此外，我们还将教材中的一些基本公式作了汇集，并作为附录置于书末，以便查用。

限于编者水平，书中仍难免存在缺点或不当之处，诚望读者批评指正！

编　者

2011 年 11 月于重庆大学

前　　言

本书是在原《矢量分析与场论学习指导书》的基础上，并根据工程数学《矢量分析与场论(第三版)》教材进行改编的。其中除了对教材的内容作一些扼要解释和补充一些示范性例题外，还增补了教材中各章节的习题全解，以帮助读者在独立做题之后，或遇到困难而又深思不得其解时参考使用。

此外，对教材中用到的某些命题，因其推证过程已超出本课程的教学要求，因而教材上未予给出。如在管形场中，计算矢势量的公式，以及在正交曲线坐标系中，坐标曲线上的切线单位矢量的导数公式等，在本书中，给出了它们的推证，以供有兴趣的读者参阅。

限于编者水平，本书一定存在不少缺点和错误，诚望读者批评指正。

编　者

2004 年 7 月

目　　录

绪　论

工程数学《矢量分析与场论(第四版)》的主要内容有：矢量分析；场论的基本知识；哈密顿算子；正交曲线坐标的概念；梯度、散度、旋度与调和量在一般正交曲线坐标系中的表示式，以及它们在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式；附录中还介绍了若干种正交曲线坐标系.

学习本课程，必须具有高等数学的知识. 特别是其中的曲线积分与曲面积分的概念、理论和计算方法对于顺利地学习本课程尤为重要. 若在学习过程中，遇到曾经学过的知识记不清甚至忘记了的时候，就要及时查阅复习，不要轻易放过.

学习本课程的方法和学习其他数学课程一样，对教材要仔细阅读，循序渐进地深入钻研每章、每节的内容. 弄清并熟悉每个概念，掌握好每个命题(定理或公式)，弄清该命题的证明或推导过程，弄清每个例题的解题思路和解法步骤. 在此基础之上，还要认真地做习题来巩固所学内容，并加深理解. 做题时，要独立思考，并按照规范的格式来书写. 文字要通顺扼要，务使逻辑步骤清楚，卷面整洁醒目. 这样做，既能避免错误，又能培养认真踏实的好习惯. 待习题做完后，还应小结一下自己的做题经验.

第一章　矢 量 分 析

一、内 容 释 要

1. 这一章矢量分析，不仅是后面场论部分的基础知识，同时也是研究其他许多学科的有用工具. 其中的几个主要概念，如矢性函数及其极限、连续以及有关导数、微分、积分等概念，都和高等数学中研究过的数性函数的相应概念完全类似，可以看成是这些概念在矢量分析中的推广. 注意到这一点，这一章的主要内容，将是不难掌握的.

2. 本章所讨论的，仅限于一个自变量的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，但在后面场论部分所涉及的矢性函数，则全是二个或三个自变量的多元矢性函数 $\boldsymbol{A}(x,y)$ 或 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$. 对于这种多元矢性函数及其极限、连续、偏导数、全微分等概念，完全可以仿照本章将高等数学中的多元数性函数及其有关的相应概念加以推广而得出. 为简单起见，就不作专门讨论了.

3. 本章的重点是矢性函数的概念及其微分法. 特别要注意导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 的几何意义，即 $\boldsymbol{A}'(t)$ 是位于 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线上的一个切向矢量，其起点在曲线上对应 t 值的点处，且恒指向 t 值增大的一方.

如果将自变量取为矢端曲线的弧长 s，即矢性函数成为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(s)$，则 $\boldsymbol{A}'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}s}$ 不仅是一个恒指向 s 增大一方的切向矢量，而且还是一个单位切向矢量. 这一点在几何与力学上都很重要.

4. 应注意到：矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 保持定长的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}(t)$

与其导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 互相垂直. 因此，单位矢量与其导矢互相垂直. 比如 $\boldsymbol{A}'(s)$ 为单位矢量，故有 $\boldsymbol{A}'(s)\perp\boldsymbol{A}''(s)$，又如圆函数 $\boldsymbol{e}(t)$ 为单位矢量，故有 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}'(t)$，即 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}_1(t)$.

还应注意：若单位矢量 $\boldsymbol{A}^\circ(t)$ 的自变量 t 不是其矢端曲线的弧长时，其导矢 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^\circ}{\mathrm{d}t}$ 虽然与 $\boldsymbol{A}^\circ(t)$ 垂直，但它一般不再是单位矢量.

5. 在矢性函数的积分法中，要注意两个矢性函数的数量积和两个矢性函数的矢量积的分部积分公式是有所不同的，二者依次为

$$\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t,$$

$$\int\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\int\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t.$$

前者与高等数学中数性函数的分部积分公式一致，后者的不同之处，在于其右端的两项是以加号“+”相连，这是因为矢量积服从于“负交换律”之故.

6. 在矢量代数中，当引进了矢量的坐标以后，一个空间矢量就和三个数量(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢量的一些运算，如两个矢量的和、差以及数量与矢量的乘积等都可以转化为对三个数量坐标的相应运算. 同样，在矢量分析中，若矢性函数采用其坐标表示式，则一个矢性函数，就和三个数性函数(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢性函数的一些运算，如计算极限、求导数、求积分等亦可转化为对其三个坐标函数的相应运算.

二、解 题 示 例

例 1 已知矢量 $\boldsymbol{A}(t)=(2t-t^3)\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}+(2t+t^3)\boldsymbol{k}$，计算

(1) $\lim\limits_{t\to 1} \boldsymbol{A}(t)$;　　　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$;

(3) $\int \boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t$;　　　　(4) $\int_0^1 \boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t$.

解 (1) $\lim\limits_{t\to 1} \boldsymbol{A}(t) = \lim\limits_{t\to 1}(2t - t^3)\boldsymbol{i} + \lim\limits_{t\to 1} 3t^2\boldsymbol{j} + \lim\limits_{t\to 1}(2t + t^3)\boldsymbol{k}$

$$= \boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}.$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t - t^3)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3t^2)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t + t^3)\boldsymbol{k}$$
$$= (2 - 3t^2)\boldsymbol{i} + 6t\boldsymbol{j} + (2 + 3t^2)\boldsymbol{k}.$$

(3) $$\int \boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t = \int (2t - t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{i} + \int 3t^2\,\mathrm{d}t\boldsymbol{j} + \int (2t + t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$$
$$= \left(t^2 - \frac{1}{4}t^4 + C_1\right)\boldsymbol{i} + (t^3 + C_2)\boldsymbol{j}$$
$$+ \left(t^2 + \frac{1}{4}t^4 + C_3\right)\boldsymbol{k}$$
$$= \left(t^2 - \frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j} + \left(t^2 + \frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$ 为任意常矢.

(4) $$\int_0^1 \boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (2t - t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{i} + \int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t\boldsymbol{j} + \int_0^1 (2t + t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$$
$$= \frac{3}{4}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \frac{5}{4}\boldsymbol{k}.$$

例 2 证明 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{e}(\alpha) + (t^2 + 1)\boldsymbol{e}_1(\alpha)$ 的图形为一抛物线 (α 为非零常数).

证 旋转坐标轴，使 Ox 轴与 $\boldsymbol{e}(\alpha)$ 重合且同向，此时 Oy 轴就与 $\boldsymbol{e}_1(\alpha)$ 重合且同向. 这样，所论图形的矢量方程就成为

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2 + 1)\boldsymbol{j},$$

其对应参数方程为

$$x = t, \quad y = t^2 + 1.$$

消去 t，得

$$y = x^2 + 1.$$

可见，所论图形为一抛物线.

例 3 求曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)=2\cos\theta\boldsymbol{i}+2\sin\theta\boldsymbol{j}+4\theta\boldsymbol{k}$ 在 $\theta=\frac{\pi}{4}$处的切线方程和法平面方程.

解 $$\boldsymbol{r}'(\theta)=-2\sin\theta\boldsymbol{i}+2\cos\theta\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$时，有

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\pi\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

由于 $\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$为在曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)$上对应于 $\theta=\frac{\pi}{4}$处的切向矢量，故所求切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\pi}{4},$$

法平面方程为

$$-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+4(z-\pi)=0,$$

或 $$x-y-2\sqrt{2}z+2\sqrt{2}\pi=0.$$

例 4 一曲线的矢量方程为 $\boldsymbol{r}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}$，求在 $t=2$ 处的单位切向矢量 $\boldsymbol{\tau}$.

解 曲线上对应于 t 值的点处的切向矢量为

$$\boldsymbol{r}'(t)=2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}.$$

在 $t=2$ 处有 $$\boldsymbol{r}'(2)=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

其模 $$|\boldsymbol{r}'(2)|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6.$$

故所求的单位切向矢量

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'(2)/|\boldsymbol{r}'(2)|=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

例 5 求与 $\boldsymbol{A}=3\cos t\boldsymbol{i}+3\sin t\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 相垂直的单位矢量.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{e}(t)+4\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{A}'=3\boldsymbol{e}_1(t).$$

而 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 说明 $\boldsymbol{A}$ 为定长矢量. 因此有 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{A}'$.

易见 $\boldsymbol{A}'/\!/\boldsymbol{e}_1(t)$，所以有

$$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{e}_1(t).$$

可见，$\pm\boldsymbol{e}_1(t)$ 即为与 $\boldsymbol{A}$ 相垂直的单位矢量.

例 6 计算积分 $\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi \quad (a\neq 0)$.

解 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)-\frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}_1(b\varphi)\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)-\frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}_1(b\varphi)-\frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

由此可得

$$\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi = e^{a\varphi}\frac{a\boldsymbol{e}(b\varphi)-b\boldsymbol{e}_1(b\varphi)}{a^2+b^2}+\boldsymbol{C}.$$

若记 $\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}$，并将字母 φ 改为 x，再分别令上式等号两端矢量的对应坐标相等，便得到数性函数中的两个不定积分公式：

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C_1,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+C_2.$$

例 7 已知矢量 $\boldsymbol{A}=t\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}+\ln t\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=\mathrm{e}^t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}-3t\boldsymbol{k}$，计算积分 $\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t$.

解 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t \\ &= t\mathrm{e}^t-2t\sin t-3t\ln t-\int(\mathrm{e}^t-2\sin t-3)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= te^t - 2t\sin t - 3t\ln t - e^t - 2\cos t + 3t + C$$
$$= (t-1)e^t - 2(t\sin t + \cos t) + 3t(1 - \ln t) + C.$$

例 8 已知矢量 $\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{B} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$，计算积分 $\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'\mathrm{d}t$.

解 用分部积分法

$$\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'\mathrm{d}t = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}'\mathrm{d}t,$$

其中

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ t & 2t & 0 \\ \cos t & \sin t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2te^{-t}\boldsymbol{i} - te^{-t}\boldsymbol{j} + (t\sin t - 2t\cos t)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos t & \sin t & e^{-t} \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2e^{-t}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + (2\cos t - \sin t)\boldsymbol{k},$$

$$\int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}'\mathrm{d}t = 2e^{-t}\boldsymbol{i} - e^{-t}\boldsymbol{j} + (2\sin t + \cos t)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C},$$

所以

$$\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'\mathrm{d}t = 2(t+1)e^{-t}\boldsymbol{i} - (t+1)e^{-t}\boldsymbol{j} + [(t+2)\sin t + (1-2t)\cos t]\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}.$$

例 9 设 $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}$，求 $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\theta$.

解 $\boldsymbol{r}' = -a\boldsymbol{e}(\theta)$,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = [a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}] \times [-a\boldsymbol{e}(\theta)] = a^2\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}_1(\theta)$$

[其中 $\boldsymbol{e}_1(\theta) \times \boldsymbol{e}(\theta) = -\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}(\theta) = \boldsymbol{e}_1(\theta)$]. 于是

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a^2\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}_1(\theta)]\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{2}[a^2\theta\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}(\theta)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi a^2\boldsymbol{k} - \boldsymbol{0}) = \pi a^2\boldsymbol{k}.$$

例 10 一质点沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i}+2\cos 3t\boldsymbol{j}+2\sin 3t\boldsymbol{k}$ 运动.其中 t 为时间.

(1) 求质点运动的速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{w}(t)$;

(2) 求在 $t=0$ 时的速度和加速度的大小.

解 (1) 速度

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i}-6\sin 3t\boldsymbol{j}+6\cos 3t\boldsymbol{k}.$$

加速度

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i}-18\cos 3t\boldsymbol{j}-18\sin 3t\boldsymbol{k}.$$

(2) 在 $t=0$ 时,

$$\boldsymbol{v}(0)=-\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{w}(0)=\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}.$$

所以,在 $t=0$ 时,

速度的大小为 $|\boldsymbol{v}(0)|=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{37}$,

加速度的大小为 $|\boldsymbol{w}(0)|=\sqrt{1^2+(-18)^2}=\sqrt{325}.$

三、习 题 全 解

习题 1 解答

1. 写出下列曲线的矢量方程,并说明它们是何种曲线.

(1) $x=a\cos t,\ y=b\sin t$;

(2) $x=3\sin t,\ y=4\sin t,\ z=3\cos t.$

解 (1) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+b\sin t\boldsymbol{j},$$

其图形是 xOy 平面上之椭圆;

(2) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=3\sin t\boldsymbol{i}+4\sin t\boldsymbol{j}+3\cos t\boldsymbol{k},$$

其图形是平面 $4x-3y=0$ 与圆柱面 $x^2+z^2=3^2$ 之交线,是

一椭圆.

2. 设有定圆 O 与动圆 C，半径均为 a，动圆与定圆外切且滚动(如图 1). 求动圆上一定点 M 所描曲线的矢量方程.

[提示:(1)设开始时点 M 与点 A 重合;(2)取 $\angle COA=\theta$ 为参数;(3) $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$.]

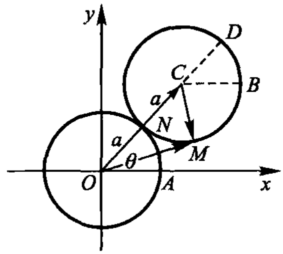

图 1

解 根据提示，如图 1. 所求方程是

$$r=\overrightarrow{OM}$$

的具体表示式. 由于

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}.$$

其中 $\overrightarrow{OC}=2a\cos\theta\boldsymbol{i}+2a\sin\theta\boldsymbol{j}.$

为了求 $\overrightarrow{CM}$ 的表示式，延长 OC 至 D，并过 C 作 $CB//x$ 轴，则 $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴正向的夹角为 $-\angle BCM$. 而

$$\angle BCM=\pi-\angle DCB-\angle MCO.$$

其中 $\angle DCB=\angle COA=\theta$(同位角相等).

又设 N 为两圆的切点. 则有 $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MN}$. 于是有

$\angle MCO=\angle COA=\theta$(等圆上等弧所对的圆心角相等).

从而 $\angle BCM=\pi-2\theta.$

由此得 $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴正向的夹角为 $-(\pi-2\theta)$.

于是有 $\overrightarrow{CM}=a\cos[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{i}+a\sin[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{j}$

$=-a\cos 2\theta\boldsymbol{i}-a\sin 2\theta\boldsymbol{j}.$

据此，即得所求曲线的矢量方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}\\&=(2a\cos\theta-a\cos 2\theta)\boldsymbol{i}+(2a\sin\theta-a\sin 2\theta)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

3. (1) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{k}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha$.

证