

高等学校教材

Textbook for Higher Education

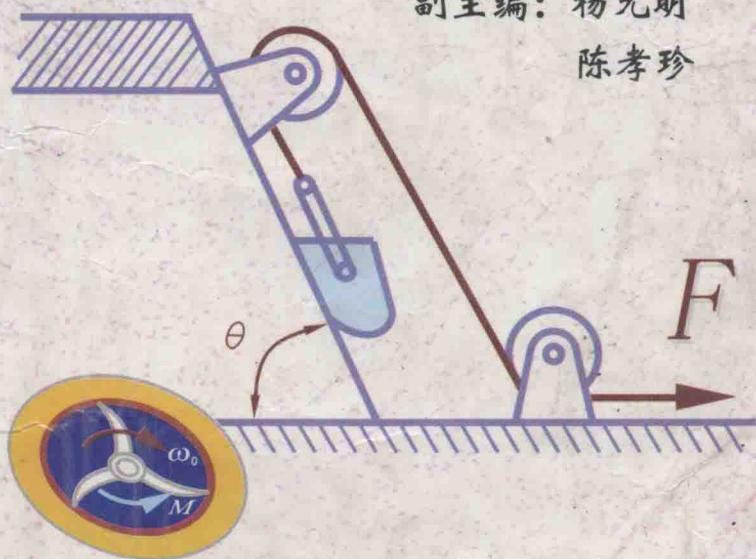
工程应用力学

下册

主编：郭建生

副主编：杨元明

陈孝珍



西北工业大学出版社

高等学校教材

工程应用力学

下册

主编 郭建生

副主编 杨元明 陈孝珍

编者 郭建生 杨元明 陈孝珍

张 钢 邢 伟 张建文 申中原

主 审 宋天霞

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是一本新概念基础力学教科书,它从变形固体的平衡与运动这一概念出发,系统地阐述了工程应用力学(理论力学、材料力学和结构力学)的基本概念、基本理论及在工程中的应用。全书共十八章,分为上、下两册。上册包括固体的刚性平衡、固体的变形平衡与运动等内容,下册包括变形固体的超静定平衡力学基础等内容。

本书在内容上兼顾了传统教材及教学改革成果两方面的特点,系统性强,物理概念论述清楚,同时内容也较简炼,可读性强,可作为高校相关专业师生及工程技术人员教学和参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

工程应用力学/郭建生等编著 .—西安:西北工业大学出版社,2001.2
ISBN 7 - 5612 - 1323 - 9

I . 工... II . 郭... III . 工程力学:应用力学—教材
IV . TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 85568 号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路 127 号,邮编 710072 电话: 029 - 8491147
网 址: <http://www.nwpup.com>
印 刷 者: 西安市向阳印刷厂
开 本: 787mm×1 092mm 1/16
印 张: 24.75
字 数: 594 千字
版 次: 2001 年 2 月第 1 版 2001 年 2 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 7 - 5612 - 1323 - 9/TB · 17
印 数: 1 ~ 1000
定 价: (上、下册): 38.00 元,本册定价: 13.00 元

前　　言

随着教育体制改革和招生规模迅速扩大,我国的高等教育事业迅速发展,然而,与此相对的教材建设工作却相对迟缓。在华中科技大学宋天霞教授的倡议和指导下,我们结合传统教材的特点和近年来教学改革方面的成果,编写了这部教材。

在编写这部教材时,我们采取了新的叙述方式,即把研究的对象作为变形固体(简称固),从变形固体这一基本概念出发,按照变形固体的刚性平衡构筑静力平衡、固体变形静定构筑材料力学内容,固体变形超静定平衡构筑结构力学内容、固体的刚性运动构筑动力内容。

在教材编写过程中我们遵循了如下原则:

- 一、教材内容以教学要求的“必须”与“适用”为度。
- 二、教学内容必须精炼,同时够用,即满足后继课程之需要。
- 三、反映教学内容的实用性。
- 四、尽量减少不必要的数理论证与推导。
- 五、反映近年来一些教学成果。

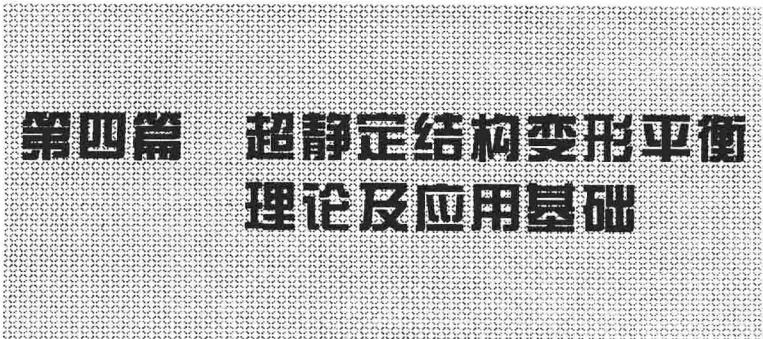
本教材在编写过程中得到华中科技大学力学系的大力支持,特别是宋天霞教授审定并修了全稿,在正式出版之前,已在南阳理工学院作为讲义试用。

本教材由郭建生副教授任主编,杨元明博士、陈孝珍硕士任副主编。其中邢伟硕士编写一二、三章;杨元明博士编写第四、六、十三章,陈孝珍硕士编写第五、七八、九章,郭建生教授编写第十、十一、十二章,申中原硕士编写第十四、十五章,张建文硕士编写第十六章及十七章一至四节,张钢硕士编写第十七章五、六节及十八章,杨元明博士负责全书统稿工。

限于编者水平和时间因素,书中难免有缺点与错误,竭诚欢迎读者批评指正。

编　者

2000年11月



第四篇 超静定结构变形平衡 理论及应用基础

第十四章 结构的几何构造分析

结构要能承受荷载,它的几何构造必须合理,而且结构本身应当是稳定的。如果结构本身不稳定,就不能承受任何荷载,也就谈不上进行内力计算。因此,要进行结构内力计算,首先应进行结构几何构造分析。

在结构几何构造分析中,最基本的依据是三角形规律。三角形规律本身简单浅显,但规律的运用则变化无穷。因此,掌握结构的几何构造分析的困难不在于懂,而在于运用。

本章仅讨论平面结构的几何构造规律,并进行几何构造分析。虽然本章不涉及内力和应变,但是构造分析与内力分析之间是密切相关的。在对结构进行内力分析计算时,可根据结构的构造规律确定结构是静定的还是超静定的,以便选择恰当的计算方法。

§ 14-1 结构自由度与约束

在第一章里介绍了一般物体自由度和约束的概念,在此基础上,本节就结构和结构学科的术语习惯来介绍自由度与约束等概念。本节所介绍的概念只有习惯上的区别而没有性质上的不同。

一、基本概念

(一) 刚片

在荷载作用下,结构中的杆件会产生弹性变形,从而使整体结构的几何形状也产生微小的变化。但在分析杆件体系时,不考虑杆件这种微小的形状变化,即将杆件看成是没有弹性变形的刚体。平面刚体,则称为刚片。讨论平面几何构造分析时,杆件都可看作为刚片,不仅如此,对体系中任一已判定为几何不变的部分也可视为一个刚片。

(二) 几何不变体系和几何可变体系

在不考虑杆件弹性变形的条件下,位置和几何形状都不变的体系称为几何不变体系,如图 14-1(a)所示;在不考虑杆弹性变形的条件下,位置和几何形状都可以变的体系称为几何可变体系,如图 14-1(b)所示;与此相对应的有内部几何不变体系和内部几何可变体系。

位置在平面内可以自由变化,而几何形状不变的体系称为内部几何不变体系,如图 14-1(c)所示;位置和几何形状在平面内都可以自由变化的体系称为内部几何可变体系,如图 14-1(d)所示。

一般结构都必须是几何不变体系,而不能采用几何可变体系,几何构造分析的主要目的就是要检查并设法保证结构的几何不变性。

(三) 自由度

体系的自由度是指该体系独立变量的数目,或体系运动时,可以独立运动(或改变)的坐标数目。

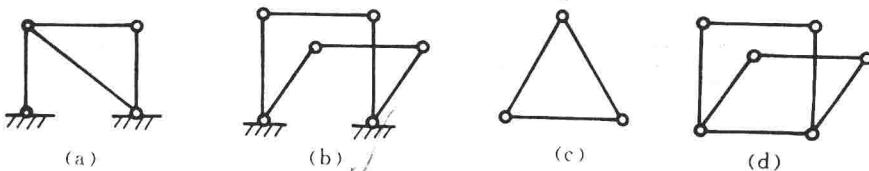


图 14-1

平面内一个刚片有 3 个自由度,即两个方向的移动自由度和绕某点的转动自由度。例如,图 14-2 所示刚片 AB 位置的坐标为 x_A, y_A 和 θ ,当运动到一个新的位置 $A'B'$ 时,刚片位置的坐标为 $x_A + \Delta x_A, y_A + \Delta y_A$ 和 $\theta + \Delta\theta$ 。因此,平面内一个刚片的运动可以用平面内的 3 个独立坐标来描述。

普通机械中使用的机构有 1 个自由度,即只有 1 种运动方式。一般工程结构都是几何不变体系,其自由度为零。凡是自由度大于零的体系都是几何可变体系。

(四) 约束

使体系自由度减少的联结或装置,称作约束。能减少几个自由度的联结或装置,就相当有几个约束。

在图 14-3(a)中,梁 AB 用链杆 AC 与基础相连;没有链杆 AC 时,这个梁在平面内有 3 个自由度;加上链杆 AC 以后,梁 AB 只有两种可动方式;即点 A 可沿以 AC 为半径、点 C 为圆心的圆弧移动和梁绕点 A 转动。由此可见,链杆 AC 使梁的自由度由 3 个减为 2 个,即 1 个链杆使梁的自由度减少 1 个。

在图 14-3(b)中,两个梁 AB 和 BC 用铰 B 连接在一起。两个孤立的梁在平面内共有 6 个自由度。用铰连接以后,自由度便减为 4 个,因为用 3 个坐标就可以确定梁 AB 的位置,而梁 BC 只能绕点 B 转动,只需再用一个转角就可以确定梁 BC 的位置。由此可见,一个连接 2 个物体的铰,可使自由度减少 2 个,即一个铰相当于 2 个约束,并称为单铰。与单铰相应的还有一种复铰,即可连接 3 个以上物体的铰。如果一个复铰连接 n 个刚片,则该铰的作用与 $(n - 1)$ 个单铰作用相当,可使自由度减少 $2(n - 1)$ 个。

在图 14-3(c)中,两根杆件 AB 和 BC 在点 B 连接成一个整体,其中的结点 B 为刚结点。原来的两根杆件在平面内共有 6 个自由度,刚性连接成整体后,只有 3 个自由度,所以一个刚结点相当于 3 个约束。

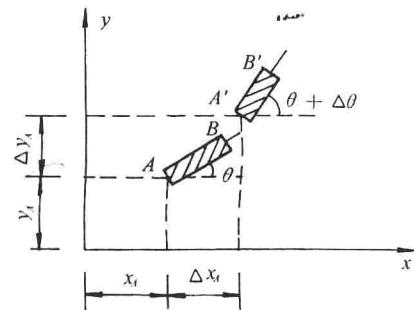


图 14-2

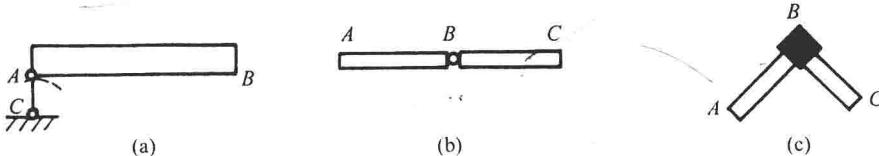


图 14-3

(五) 必要约束和多余约束

在杆件体系中能限制体系自由度的约束称为必要约束;而对限制体系自由度不起作用的

约束称为多余约束。

例如，平面内 1 个点 A 原有 2 个自由度，如果用两根不等线的链杆 1 和 2 把点 A 与基础相连（图 14-4(a)），则点 A 即被固定。因此减少了 2 个自由度，可见链杆 1 和 2 都是必要约束。

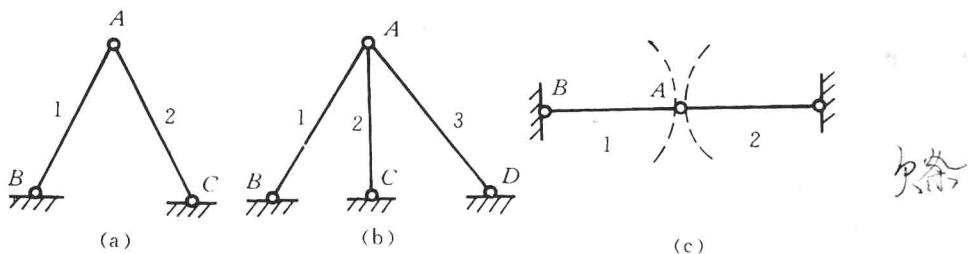


图 14-4

如果用 3 根不共线的链杆把点 A 与基础相连（图 14-4(b)），实际上仍只减少 2 个自由度。因此，这 3 根链杆中只有 2 根是必要约束，而有 1 根则是多余约束（3 根链杆中的任何 1 根可视为多余约束）。

由上述可知，一个体系中如果有多个约束存在，那么，应当分清哪些约束是多余的，哪些约束是必要的。只有必要约束对体系的自由度有影响，多余约束对体系的自由度没有影响。

(六) 约束代换和瞬铰

一个单铰相当于 2 个约束，2 根链杆也相当于 2 个约束，因而两种约束是可相互代换的。为了将约束代换的概念扩大，我们引入了瞬铰的概念。

连接 2 个刚片的不在一直线上的两个链杆，相当于一个铰。如不在一直线上的 2 链杆 AB, AC 交于刚片上的 A 处（图 14-5(a)），则 A 是具有确定位置的实际的单铰，称为实铰。如连接 2 个刚片的 2 个链杆不在刚片上相交，如图 14-5(b) 所示，则两链杆的交点 E 处，形成一虚铰，虚铰的位置是瞬时变化的。因此，又称瞬铰。

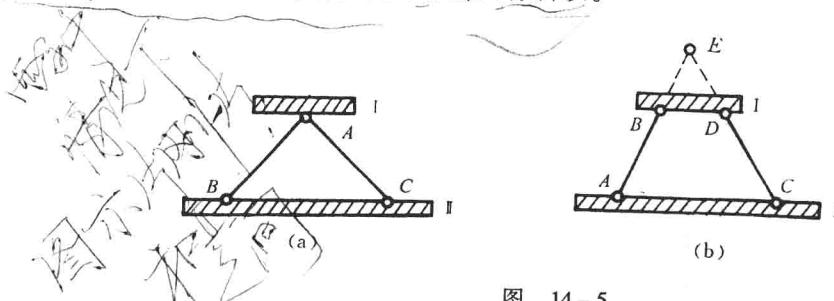


图 14-5

在图 14-5(b) 中，刚片 I 和 II 之间，用 2 根链杆相连，减少了互相之间的 2 个相对移动的自由度，但还有一个相对转动自由度，即对瞬铰之转动：如果刚片 I 相对固定，则刚片 II 上的点 A，可沿以 B 为圆心，AB 为半径的圆弧移动，而点 C 则可沿以 D 为圆心，CD 为半径的圆弧移动；AB 和 CD 的交点为 E，此时，整个刚片 II 又可看成绕铰 E 转动。因此，瞬铰 E 即 2 个刚片之间的相对转动中心。显然，在体系运动的过程中，瞬铰位置也随之而变。

二、平面体系自由度的计算

对平面体系进行变形与内力计算时经常需要知道该体系的自由度数。

(一) 平面刚系的自由度

平面体系均可看作是由刚片加上约束组成的。首先,设想体系中各个约束都不存在,并计算各个刚片的自由度之总和;其次,确定体系中的全部约束数;最后,将自由度数减去约束数,即可得出平面刚系的自由度数,即

$$W = 3m - 2h - r \quad (14-1)$$

式中 W —— 体系的自由度;

m —— 体系中的刚片数(不包括基础刚片);

h —— 体系中的单铰数(若遇复铰,先化为单铰计算);

r —— 体系与基础相连的支承链杆数。

应用式(14-1)时必须注意,简单铰数 h 只包括刚片与刚片之间相互连接所用的铰,不包括刚片与支承链杆相连接所用的铰。

当体系不与基础相连,即 $r=0$ 的情况下,体系对基础必有 3 个自由度。此时,只需研究体系本身各刚片之间相对运动的自由度,简称为内部自由度,用 V 表示,则有 $W = V + 3$ 。将此式与 $r=0$ 一并代入式(14-1),得刚片系的内部自由度数为

$$V = W - 3 = 3m - 2h - 3 \quad (14-2)$$

例 14-1 计算图 14-6 所示体系的自由度数。

解 该体系与基础相连,且 $m=3, h=2, r=4$

故由式(14-2),可得

$$W = 3 \times 3 - 2 \times 2 - 4 = 1$$

即体系具有一个自由度。

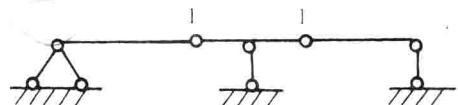


图 14-6

例 14-2 计算图 14-7 所示体系的自由度数。

解 该体系不与基础相连,且 $m=3, h=9$,故由式(14-2)可得

$$V = 3 \times 7 - 2 \times 9 - 3 = 0$$

即体系内部自由度为零。

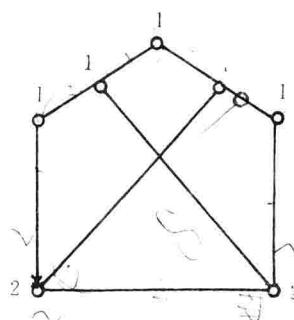


图 14-7

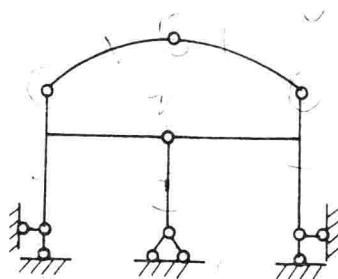


图 14-8

例 14-3 计算图 14-8 所示体系的自由度数。

解 该体系与基础相连,且 $m=5, h=5, r=6$,故由式(14-1)可得

$$W = 3 \times 5 - 2 \times 5 - 6 = -1$$

即体系无自由度,且有一个多余约束。

(二) 平面链杆系的自由度

仅在两端用铰连接的杆件称为链杆,它是刚片的特殊形式,通常的桁架都是由这类杆件

组成。链杆系的自由度自然地可以用公式(14-1)和(14-2)计算,但因其中复铰较多,计算不便。通常采用下面介绍的另一种算法。

若把体系看成是由许多结点受链杆的约束而组成的,则链杆系的自由度数 W 可表示为

$$\begin{aligned} W &= 2j - (b + r) \\ W &= 2j - b - r \end{aligned} \quad (14-3)$$

或

式中 j —链杆系中的结点数;

b —链杆系中的链杆数;

r —体系与基础相连的支承链杆数。

应用公式(14-3)时,必须注意结点 j 的计算,即凡是连接杆端或连接杆件与支承链杆的铰都应算作结点。但支承链杆与基础相连的铰则不计入。

当体系不与基础相连时,则体系内部自由度为

或

$$\begin{aligned} V &= W - 3 \\ V &= 2j - b - 3 \end{aligned}$$

(14-4)

例 14-4 计算图 14-9 所示体系的自由度。

解 由图可知 $j = 9, b = 15, r = 3$

由式(14-3),可得

$$W = 2j - b - r = 2 \times 9 - 15 - 3 = 0$$

即体系自由度为 0。

应用式(14-1)~式(14-4)计算自由度时,可能遇到的 3 种情况可总结成以下定性结论:

(1) $W > 0$ 或 $V > 0$,表明体系存在自由度,体系肯定是几何可变的。

(2) $W = 0$ 或 $V = 0$,如无多余约束,则为几何不变;如有多余约束,则为几何可变。

(3) $W < 0$ 或 $V < 0$,体系有多余约束。

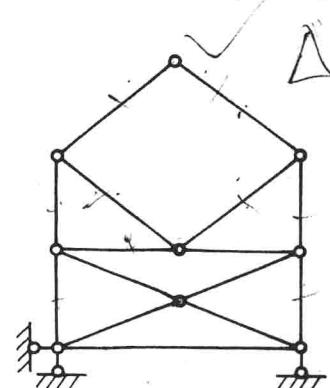


图 14-9

§ 14-2 平面杆件几何不变体系的组成规律

结构根据构造与计算特点,可分为静定结构和超静定结构两大类:

(1) 静定结构——凡用静力平衡条件可以确定全部支座反力和内力的结构,称为静定结构。静定结构在几何组成上,是几何不变、无多余约束的体系。

(2) 超静定结构——凡不能用静力平衡条件确定全部支座反力和内力的结构,称为超静定结构,超静定结构在几何组成上,是几何不变、有多余约束的体系。

前面几章已讨论过静定结构的受力分析。从下一章开始,就要讨论超静定结构的受力分析。这类结构的受力分析,与其结构的几何构造分析是密切相关的。本节讨论几何构造分析中的主要课题——无多余约束的几何不变体系的构造规律。

一、平面内刚片之间的联结规则

平面结构体系由刚片组构成,即它的构造是由刚片之间的联结构成。然而,联结必须

遵循一定规则。

规则 I ——一个点与一个刚片(或基础)之间应当怎样联结,才能组成既无多余约束又是几何不变的整体呢? 图 14-4(a)中的联结方式符合上述要求,而图 14-4(b),(c)中的联结方式就不符合上述要求((b)中有多余约束,(c)为几何可变)。由此可得下述规则 I (参看图 14-10(a))。

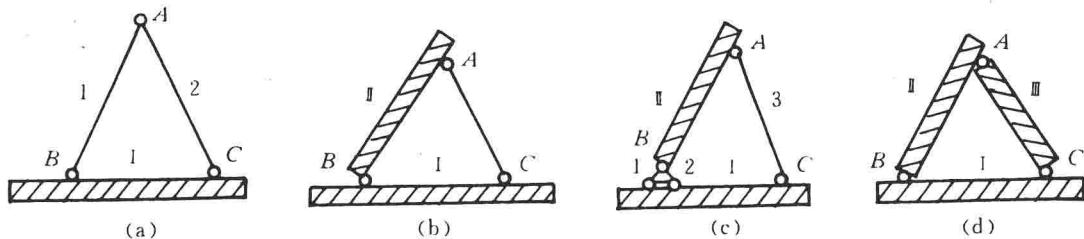


图 14-10

一个点与一个刚片用两根不在一直线的链杆相连,构成内部几何不变的、无多余约束的体系。

规则 I ——可用二元体的组成叙述;在一个刚片上,增加一个二元体,仍为几何不变无多余约束的体系。

所谓二元体,是指两根不共线链杆的一端铰联于同一个新结点的构造。二元体的构造不改变原体系的自由度。

特别指出,由于基础也可视为一个刚片,所以规则 I 就成为从基础上固定一个点的标准模式。

规则 II ——在图 14-10(a)中,如果把链杆 AB 看作刚片 II,则得到图 14-10(b)所示的体系,它表示刚片 I 与 II 之间的联结方式。这样,由规则 I 可得到下述规则 II:

两个刚片用一铰和一链杆相连,且链杆及其延长线不通过铰,则构成内部几何不变的无多余约束的体系。

根据两链杆和一铰的约束等效性及瞬铰概念,可得规则 II 的另一叙述(图 14-10(c)):

两个刚片用三根既不平行也不交于一点的链杆相连,则构成内部几何不变的无多余约束的体系。

若将基础也视为一个刚片,规则 II 就成为从基础固定一个刚片的标准模式。

规则 III ——在图 14-10(b)中,如果再把链杆 AC 看作刚片 III,则可得到图 14-10(d)所示的体系,它表示三个刚片 I, II, III 之间的联结方式。这样,由规则 II 可得到下述规则 III:

三个刚片用三个铰两两相连,且三铰不在一直线上,则构成内部几何不变的、无多余约束的体系。

若将基础也视为一个刚片时,规则 III 就成为从基础固定两个刚片的标准模式。

铰三角规则 ——上述三条规则虽然表达方式不同,但实际上可归纳为一个基本规则:如果三个铰不共线,则一个铰结三角形的形状是不变的,而且没有多余约束。这个基本规则又叫做铰结三角形规则。

二、瞬变体系

在前面讨论几何不变体系的基本组成规律中,对刚片之间的联结方式提出了几何布置方

面的限制条件。在杆件体系的组成中，虽有足够的约束数目，但布置不当，即不符合几何不变体系组成规则中对约束布置的要求，则体系仍不能保持几何不变。下面讨论的瞬变体系就是这种体系。

在基础上用两根共线链杆连接于结点 A，如图 14-11(a) 所示。作为 BA 杆上的点 A，可以沿以 B 为圆心，BA 为半径的圆弧运动；作为杆 CA 上的点 A，又可以沿以 C 为圆心，CA 为半径的圆弧运动。由于 BA 和 CA 在一直线上，两圆弧在点 A 有一公切线，因此，点 A 可以有一微小的竖向位移；但当点 A 位移到点 A' 时，A'B 和 A'C 不再在一直线上，点 A' 的位置不再继续发生改变。

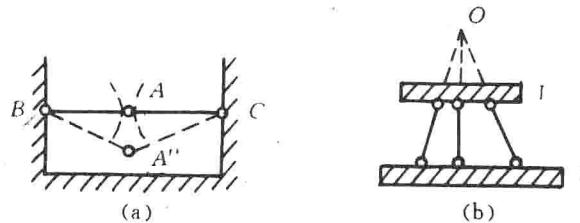


图 14-11

三个链杆交于刚片外的点 O，如图 14-11(b) 所示。刚片 II 可以绕刚片 I 有微小的相对转动位移；但因杆长不同，微小位移发生后，三杆不再交于一点，因此，刚片 II 不再能继续位移。

上述两种发生微小位移，并经微小位移后不再移动的可变体系称为瞬变体系。瞬变体系的位移虽然很小，但只要有一定荷载作用，则杆件内力非常大，对结构受力极为不利，不允许作为结构使用。

§ 14-3 平面杆件几何不变体系的实例分析

为了能承受荷载，任何简单、复杂的结构，都必须是几何不变体系。因此，有必要对所选用的体系进行几何构造分析，从而判定其是否能作为结构。若是几何不变体系，还应判定是静定结构还是超静定结构，以便选取正确的力学分析方法。

在应用几何不变体系基本构造规则，判别给定体系是否几何不变时，应注意如下几点：

(1) 刚片的选定。在开始分析时，可将体系中任一杆件（包括基础）都可视为刚片，此外，通过观察能肯定为几何不变的部分亦可作刚片。然后应用构造规则，逐一判别刚片之间的联结是否为几何不变，并将已判定为几何不变的部分又可作一刚片。再去判别它与其他刚片的联结，如此，一步步扩大刚片范围；

(2) 刚片与链杆的区别。为了便于应用基本规则，有时需将链杆视为刚片，有时则可将其上只有两个铰同外界联结的刚片视为链杆；

(3) 拆去二元体。为简化分析，可先拆去二元体。

例 14-5 分析图 14-12(a), (b) 所示体系的几何构造。

解 (1) 分析图 14-12(a) 中的体系。

首先，把基础作为刚片 I，杆 BC，杆 AB 分别作为刚片 II 和 III，刚片 I 与 II 之间由链杆 3, 4 构成的瞬铰 O（在无限远处）联结；刚片 I, III 之间由链杆 1, 2 构成的实铰 A 联结；刚片 II 与

Ⅲ之间由铰 B 联结。由于 O, A, B 三铰不在一直线上, 所以此部分为无多余约束的几何不变体系。

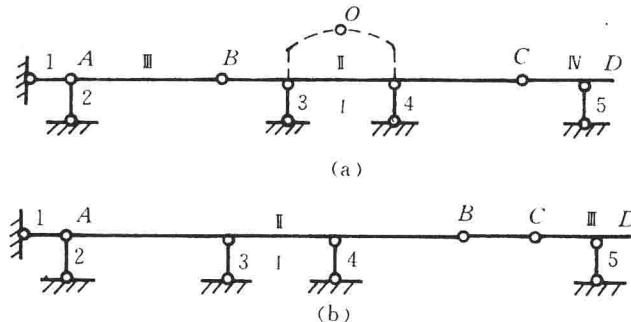


图 14-12

其次, 将此部分作为一个扩大了的大刚片 I', 杆 CD 作为刚片 IV, 刚片 I', IV 之间由铰 C 和链杆 5 联结, 且链杆 5 及其延长线不通过铰 C, 故由规则 I 可知, 整个体系为无多余约束的几何不变体系。

(2) 分析图 14-12(b)中的体系。

首先, 把基础与杆 AB 分别作为刚片 I, II, 它们之间有 4 根不交于一点且不完全平行的链杆联结, 显然此部分是几何不变的, 但有一个多余约束。

其次, 将此部分作为一个扩大了的刚片 I', 将杆 CD 作为刚片 III, 刚片 I', III 之间只有两根链杆(即杆 5 和 BC)联结, 且由规则 II 可知, 它们之间缺少一个链杆约束。因此, 整个体系是几何可变体系, 又有一个多余约束。

图 14-12(a)与图 14-12(b)所示体系相似, 虽然整个体系中有足够的约束个数, 但由于约束的布置不同, 产生的结果却不大相同。

例 14-6 分析图 14-13 所示体系的几何构造。

解 首先, 铰结三角形 ABD 为无多余约束的几何不变体系, 可以作为一个刚片, 并与刚片 BC, 刚片 CD 之间由不在直线上的三铰(B, C, D)两两相连, 构成多余约束的几何不变体系; 将此部分(ABCD)作为一个大刚片 I, 同理可将 CEFG 部分作为一个大刚片 II。

其次, 将基础作为刚片 III, 则刚片 I, II 之间由铰 C 联结; 刚片 I, III 之间由两链杆 1, 2 构成的瞬铰 O_1 联结; 刚片 II, III 之间由两链杆 3, 4 构成的瞬铰 O_2 联结; 由于 O_1, O_2 和 C 三铰不在一直线上, 所以整个体系为无多余约束的几何不变体系。

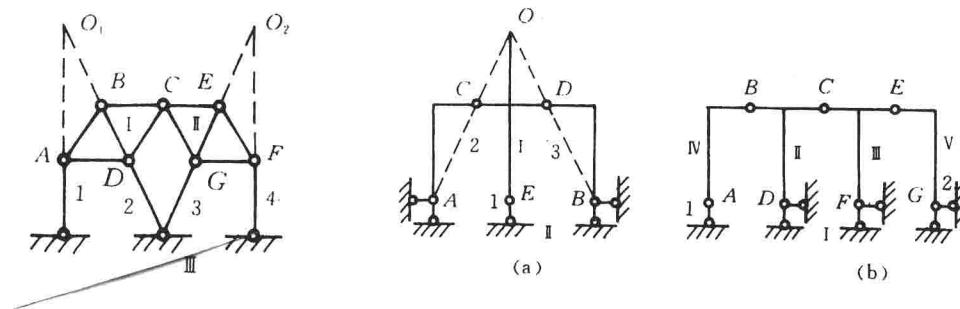


图 14-13

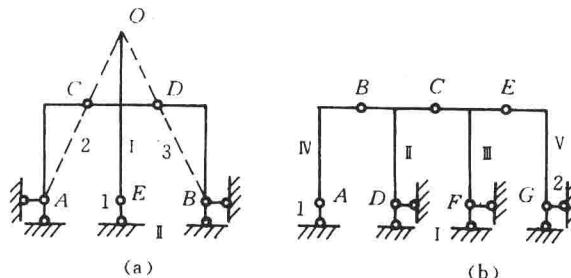


图 14-14

例 14-7 分析图 14-14(a), (b)所示体系的几何构造。

解 (1) 分析图 14-14(a) 中的体系。

首先, 把折线杆 AC 和 BD 用虚线表示的链杆 2 和 3 来替换。

其次, 将 T 形刚片 CDE 作为刚片 I, 基础作为刚片 II, 刚片 I, II 之间由三根相交于点 O 的链杆 1, 2, 3 相联结(点 O 为瞬铰), 故整个体系是瞬变体系。

(2) 分析图 14-14(b) 中的体系。

首先, 将基础作为刚片 I, T 形刚片 BCD , CEF 分别作为刚片 II, III, 刚片 I, II, III 之间由不共线的三铰 C, D, F 两两相连, 由规则 III 可知, 此部分构成无多余约束的几何不变部分。

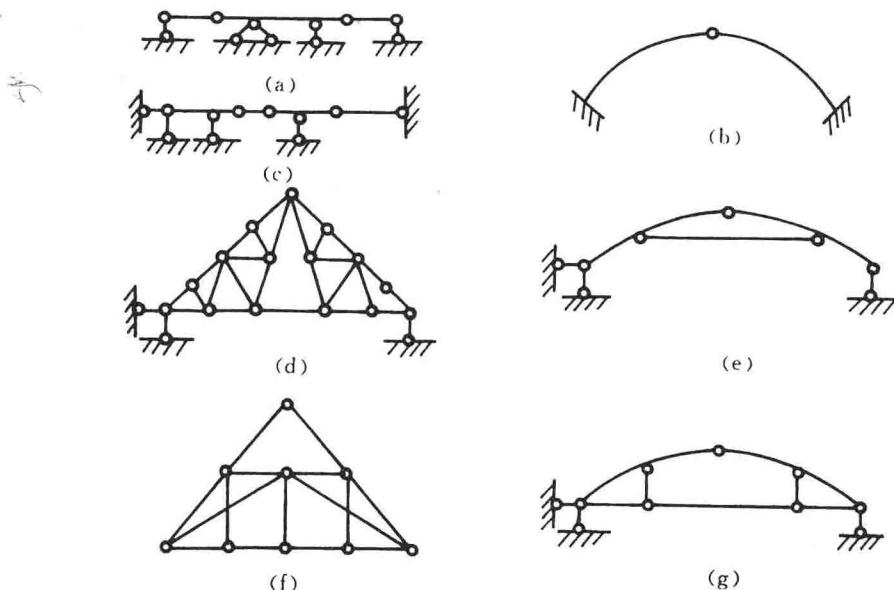
其次, 将此部分($BCDEF$)作为一个扩大了的基础刚片 I', 杆件 AB 作为刚片 IV; 刚片 I' 和刚片 IV 之间通过铰 B 和链杆 1 相联结, 由规则 II 可知, $ABCDF$ 部分为无多余约束的几何不变部分。

同理, 再将 $ABCDF$ 部分作为一个扩大了的基础刚片 II', 将刚片 EG 作为刚片 V; 刚片 II' 和刚片 V 之间通过铰 E 和链杆 2, 3 联结, 由规则 II 可知, 链杆 2, 3 中必有一个是多余约束。

综合以上分析可知, 该体系是有一个多余约束的几何不变体系。

习题

14-1 分析题图 14-1 所示体系的几何构造。



题图 14-1

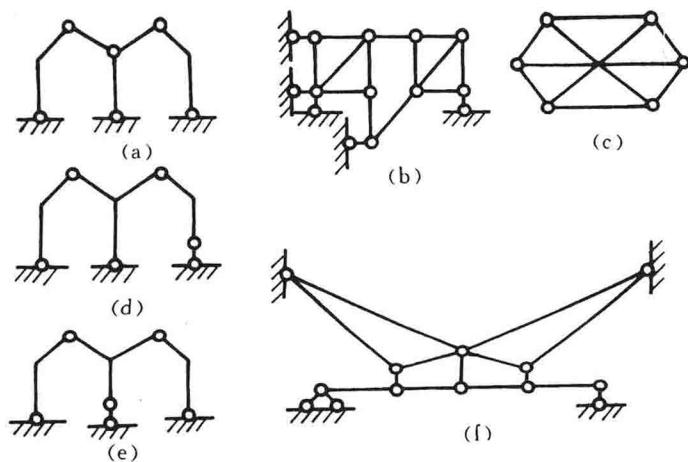
14-2 分析题图 14-2 所示体系的几何构造。

14-3 分析题图 14-3 所示体系的几何构造。

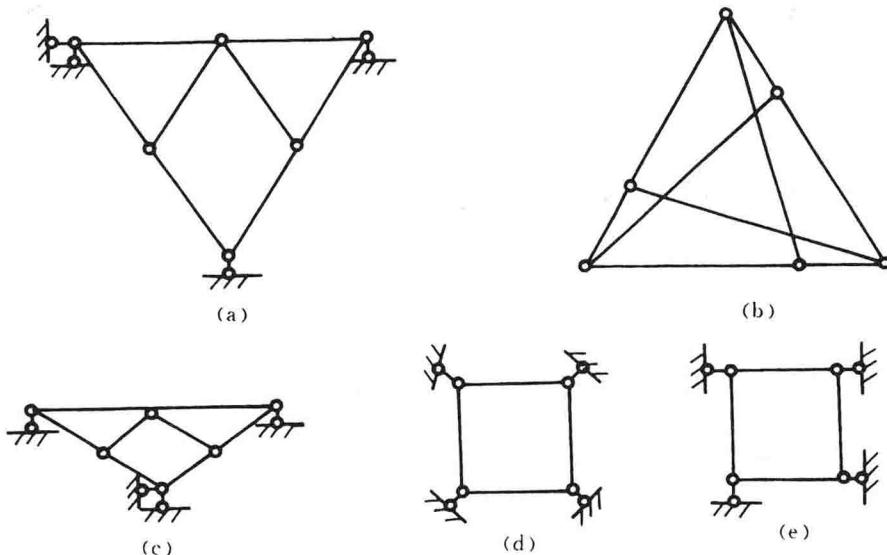
14-4 分析题图 14-4 所示体系的几何构造。

14-5 求习题 14-3, 14-4 中各体系的自由度 W 。

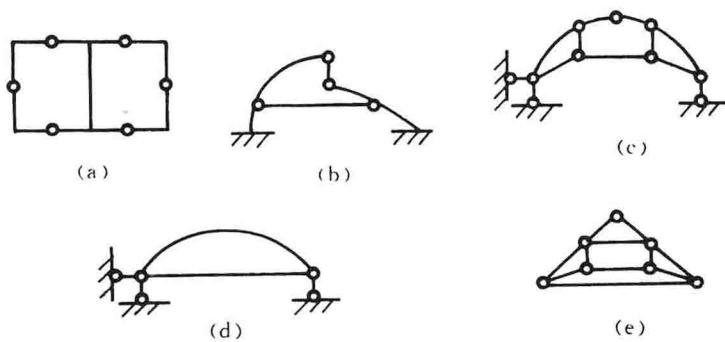
14-6 求题图 14-5 所示体系的自由度 W 。



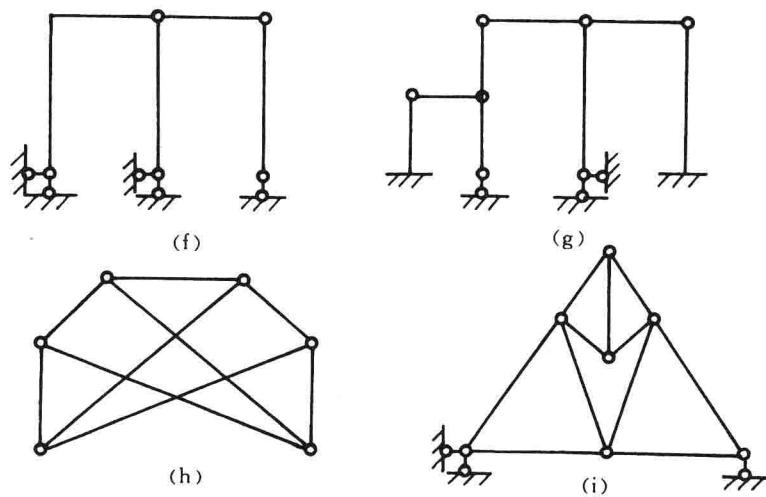
题图 14-2



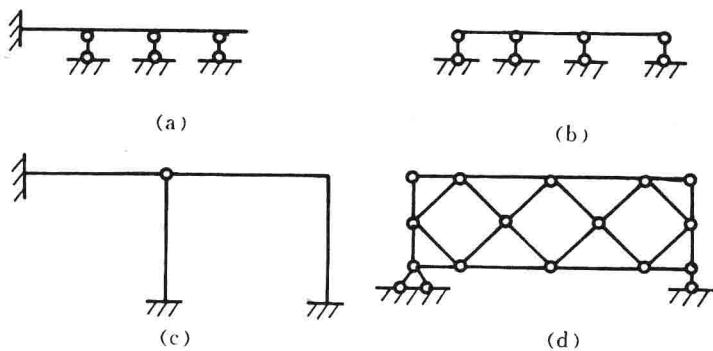
题图 14-3



题图 14-4



题图 14-4(续)



题图 14-5