UMSS

大学数学科学丛书 —29

近代分析基础

（第二版）

陈志华 编著

科学出版社

同济大学"十二五"规划教材

大学数学科学丛书 29

近代分析基础

(第二版)

陈志华 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是一本综合性的分析教材，全书分为五章：分别为一般拓扑、线性泛函分析、Sobolev 空间、线性算子的谱分析及非线性分析简介，其中每章均独立成篇而相互又有关联。

本书主要读者对象为数学专业高年级学生与硕士研究生，同时也可供其他理工科高年级学生、研究生、青年教师及相关工程技术人员学习参考之用。本书的取材与编写都充分考虑使本书能适于自学，为有兴趣于此的读者提供一本适于自学的读本。

图书在版编目(CIP)数据

近代分析基础/陈志华编著. —2 版. —北京：科学出版社, 2012
(大学数学科学丛书; 29)
ISBN 978-7-03-033732-0

I. ① 近… II. ① 陈… III. ① 数学分析-高等学校-教材 IV. ① O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 037226 号

责任编辑：王丽平　李静科／责任校对：郑金红
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012 年 4 月第　一　版　开本: B5(720 × 1000)
2012 年 4 月第一次印刷　印张: 9 3/4
字数: 177 000
定价：38.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

第二版前言

本书自 2005 年出版后, 先后两次印刷, 现已基本售完, 因此科学出版社有再版此书之意愿.

作者也很希望本书再版, 原书的打印稿是请人代劳的, 虽然在两次印刷前, 作者都进行了仔细校对, 但还是有不少打印错误被疏漏过去, 未能得以校正, 另外在过去七年的教学实践以及读者反馈的信息中, 作者发现书中还有些陈述可以更完备更合理, 因为数学中重要的定义、定理以及证明, 虽然形式上是抽象的, 但是实质上都应该是自然与合理的, 因此乘此再版之机, 对此亦作了进一步的修改与补充. 作者书写本书的惟一的目的是为有兴趣的读者提供一本关于分析内容可以阅读的书, 因此对原书中存在的这些问题一直希望有机会予以改进, 此次再版亦了结了此一心愿.

作者希望本书第二版在易读性方面能更令读者满意, 同时希望本书不仅能帮助读者学到一些重要的分析知识, 而且能增加读者对数学的兴趣与悟性. 囿于作者对数学的认知水平, 不敢妄言在此方面已尽善, 只是作者已尽力而为. 此再版书还会有错误与不足之处, 望读者、专家不吝指正为盼.

本书的再版要感谢周朝晖副教授给予的大力帮助, 她重新打印了全书, 使本书再版的可能得以实现.

作者感谢同济大学对本书再版给予的支持, 也要感谢国家自然科学基金委员会对作者科研教学工作的长期资助, 这也是本书顺利再版的有力支持.

陈志华

2011 年 10 月于上海

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第一版前言

本书是在作者自 1995 年起于同济大学应用数学系给硕士研究生开的“现代分析基础课程”讲义的基础上编写的.

当时为硕士研究生开设这一课程的诱因是随着硕士研究生的扩招, 发现这些硕士生的学习程度参差不齐, 一些原来认为应该在本科阶段学过的课程却并没有真正学过, 因此根据这个实际情况, 设置了这个“现代分析基础课程”, 主要是讲述我们认为一个数学专业的硕士生必须要掌握的分析知识. 因此这个课程起点较低, 涉及面较广, 因而较为精练, 每部分都选所涉内容的最主要的结果.

全书共分 5 章, 第 1 章是一般拓扑, 一般拓扑是连续性数学的基础, 因此亦是分析学科的基础. 第 2 章是线性泛函分析, 其中心就是 Hahn-Banach 定理、共鸣定理、开映射定理、闭图像定理与 Riesz 表示定理, 这些定理在数学各分支上都有重要的应用. 第 3 章是 Sobolev 空间, 本章只是介绍 Sobolev 空间的定义与最主要的结果. Sobolev 空间理论的重要性是基于它在分析、几何、计算数学等方面都有着经常的应用. 第 4 章是线性算子的谱分析, 特别是自共轭算子的谱理论, 算子谱理论本身是一个重要的研究课题, 而从本章的谱表示定理中可以观察到上面提到的线性分析中的几个著名定理的应用. 第 5 章是对非线性分析的简单介绍, 主要是介绍 Brouwer 拓扑度与 Leray-Schauder 拓扑度.

每章后面有一些习题, 这些习题中有的有一定难度, 部分的是本章前面内容的继续, 这些习题的目的是培养研究生对已经学过的内容的掌握与应用, 同时亦希望锻炼学生进一步自学的能力及扩展他们的相关知识, 希望这些习题会起到温故又知新的效果.

每章结束后有一个简短的小节, 主要介绍有关的参考书, 读者若对该章内容的进一步展开有兴趣, 可以阅读有关的参考书.

本书每一章都可以单独写成一本完整的教材, 因此本书对每一部分都进行了精简, 这种精简完全仰赖作者对数学的领悟和理解, 囿于作者的水平, 错误与失当之处恐属难免, 因此希望读者不吝指正为盼.

正如本文开始时指出的, 这是针对同济大学应用数学系硕士研究生的状况所编写的教材, 因此或许对于所招硕士生的水平与同济大学应用数学系相仿的学校会有

参考价值.

本书的出版得到同济大学研究生院与科学出版社的支持, 作者在此表示感谢.

陈志华

2005 年 3 月 31 日

目　　录

第1章 一般拓扑

1.1 集合与集合间运算

数学中的集合是一个抽象名词, 一个集合 A, 是指什么是属于 A 与什么是不属于 A 的, 一般我们将属于集合 A 的称为 A 的元素, 亦可称为一个点, A 是一个点集.

在集合之间有一些表示集合间的关系与运算的符号, 定义如下:

定义 1.1.1 设 A, B 是两个集合, $A \subseteq B$ 表示 A 是 B 的子集, 亦即每个属于 A 的点 x, 用 $x \in A$ 表示, 蕴含 $x \in B$.

$A \subseteq B$ 和 $B \subseteq A$, 即表示 $A = B$, 亦即这两个集合相等.

定义 1.1.2 设 A, B 是两个集合, $A \cup B$ 表示集 A 与 B 之并, 其之意义是 A 与 B 的两个集合的并, 亦即 $x \in A \cup B$ 即 $x \in A$ 或 $x \in B$.

集合并的运算不仅在两个集合之间进行, 而且可以在若干个集合上进行. 设 $A_\lambda(\lambda \in I)$ 是一族集合, I 是一个指标集, $\bigcup\limits_{\lambda \in I} A_\lambda$ 表示所有 $A_\lambda(\lambda \in I)$ 的并, $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in I} A_\lambda$ 当且仅当 x 属于一个 A_λ.

定义 1.1.3 设 A, B 是两个集合, $A \cap B$ 是指集合 A 与集合 B 的交, 亦即 A 与 B 的公共部分, $\forall x \in A \cap B$ 当且仅当 $x \in A$ 且 $x \in B$.

同样集合之间并的运算亦同样可以在一族集合之间进行. 设 $A_\lambda(\lambda \in I)$ 是一族集合, I 是一个指标集, $\bigcap\limits_{\lambda \in I} A_\lambda$ 是指所有 $A_\lambda(\lambda \in I)$ 之交, 亦即所有 A_λ 的公共部分. $\forall x \in \bigcap\limits_{\lambda \in I} A_\lambda$ 当且仅当 $x \in A_\lambda$ 对所有 $\lambda \in I$ 成立.

定义 1.1.4 设 A, B 是两个集合 $A \setminus B$ 称为集合 A 减去集合 B, 是指所有属于 A 但不属于 B 的点所组成的集, 即 $x \in A \setminus B$ 当且仅当 $x \in A$ 与 $x \notin B$ 同时成立.

$A \setminus B$ 对任意两个集合均有意义, 并不要求 $A \supseteq B$.

定义 1.1.5 $\varnothing$ 表示空集.

1.2 拓扑空间

一般拓扑或点集拓扑是研究连续性的数学分支, 连续性是分析学科的基础, 因此一般拓扑是数学中分析学科的基础. 在引进拓扑空间概念之前, 先回忆数学分析中关于连续性的描述.

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是定义在实数轴 $\mathbb{R}$ 上的实值函数. 我们称 f 是一个连续函数是指 f 在 $\mathbb{R}$ 的每一点都是连续的. $\forall x_0\in\mathbb{R}$, 若 f 在 x_0 点连续, 则用 ε-δ 说法来陈述, 即 $\forall\varepsilon>0$, 存在一个 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时, $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 这也可以改写成 $f\big((x_0-\delta,x_0+\delta)\big)\subset\big(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon\big)$.

现在再来观察更一般的 $f=(f_1,\cdots,f_m):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, 说 f 是连续的是指 f 在 $\mathbb{R}^n$ 的每一点都是连续的, 亦即每一个函数 $f_i(x_1,\cdots,x_n)(1\leqslant i\leqslant m)$ 都是连续的. 其更具体的陈述是 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时, $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$, 这里 $\|\cdot\|$ 是指对应的欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 的范数, 也即 $\|x-x_0\|=\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x^i-x_0^i)^2\right)^{1/2}$, 这里 $(x^1,\cdots,x^n)$, $(x_0^1,\cdots,x_0^n)$ 分别是点 x 与 x_0 的坐标, $\|f(x)-f(x_0)\|=\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m}|f_j(x)-f_j(x_0)|^2\right)^{1/2}$. 现在我们引进一个记号

$$B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n|\ \|x-a\|<r\},$$

这里 $a\in\mathbb{R}^n$, $r\in\mathbb{R}^+$, $B(a,r)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中以 a 为中心和 r 为半径的开球. 当 $n=1$ 时, $B(a,r)=(a-r,a+r)$.

用这个开球的符号, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 x_0 点连续就可以改述为: 对任一 $\mathbb{R}^m$ 中的开球 $B\big(f(x_0),\varepsilon\big)$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开球 $B(x_0,\delta)$, 使得 $f\big(B(x_0,\delta)\big)\subset B\big(f(x_0),\varepsilon\big)$.

关于映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续的有另一个陈述方法, 即对 $\mathbb{R}^m$ 中的任一开集 G, $f^{-1}(G)$ 亦是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 这里 $f^{-1}(G)$ 就是 $\mathbb{R}^n$ 中所有映入 G 的点的集合, 亦称为集合 G 关于映射 f 的逆像.

现在证明这两种关于 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是连续的陈述是等价的. 首先假定 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的每一点连续, 亦即 $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 和 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f\big(B(x,\delta)\big)\subset B\big(f(x),\varepsilon\big)$. 设 G 是 $\mathbb{R}^m$ 中任一开集, 现在证明 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集. 众所周知, 一个集 D 称为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 当且仅当 $\forall x\in D$, 存在一个 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset D$. 现在 $\forall x\in f^{-1}(G)$, 则 $f(x)\in G$. 因为 G 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 故存在 $\varepsilon>0$, 使得 $B\big(f(x),\varepsilon\big)\subset G$. 由于 f 在 x 点连续, 则存在 $\delta>0$, 使得 $f\big(B(x,\delta)\big)\subset B\big(f(x),\varepsilon\big)\subset G$. 因此 $B(x,\delta)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(x),\varepsilon\big)\Big)\subset f^{-1}(G)$, 从而 $f^{-1}(G)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集.

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

反过来, 若 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, 使得 $\mathbb{R}^m$ 中任一开集 G 的逆像 $f^{-1}(G)$ 是开的, 则 f 在原数学分析的陈述中在 $\mathbb{R}^n$ 中每一点连续. $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $f(x)\in\mathbb{R}^m$, $B\big(f(x),\varepsilon\big)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的开集, 因此 $f^{-1}\Big(B\big(f(x),\varepsilon\big)\Big)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 而且 $x\in f^{-1}\Big(B\big(f(x),\varepsilon\big)\Big)$. 于是存在 $\delta>0$, 使得 $B(x,\delta)\subset f^{-1}\Big(B\big(f(x),\varepsilon\big)\Big)$, 即 $f\big(B(x,\delta)\big)\subset B\big(f(x),\varepsilon\big)$, 从而 f 在 x 连续.

上面的陈述清楚地表示 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 的连续性与 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的开集有很密切的关系, 下面给出一般拓扑空间的定义:

定义 1.2.1 设 X 是一个集合, $\mathcal{U}_X$ 是 X 的某些子集的集合, 而且适合下面的条件:

(1) 设有 $U_i\in\mathcal{U}_X(i\in I)$, 这里 I 是一个指标集, 则 $\bigcup\limits_{i\in I}U_i\in\mathcal{U}_X$;

(2) 设有 $U,V\in\mathcal{U}_X$, 则 $U\bigcap V\in\mathcal{U}_X$;

(3) $X\in\mathcal{U}_X$;

(4) $\varnothing\in\mathcal{U}_X$, 这里 $\varnothing$ 表示空集.

X 与 $\mathcal{U}_X$ 连在一起就称为一个拓扑空间, 有时用 $(X,\mathcal{U}_X)$ 记之, 这里 $\mathcal{U}_X$ 中的 X 的子集就称为该拓扑空间的开集.

一个拓扑空间亦是一个点集给定了它的某些子集是开集, 并且满足定义 1.2.1 条件. 条件 (1) 表示任意多个开集的并仍是一个开集; (2) 表示任意两个开集之交仍是开集; (2) 亦蕴含任意有限多个开集之交仍是开集; (3) 和 (4) 则表示 X 与 $\varnothing$ 亦是开集. 如果回忆 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则不难发现 $\mathbb{R}^n$ 中的开集确实是满足定义 1.2.1 中的条件 (1)~(4).

如果 F 是拓扑空间 $(X,\mathcal{U}_X)$ 的一个子集, 而且 $F=X\backslash U$ 和 $U\in\mathcal{U}_X$, 则称 F 是 X 的闭集. 如果 $F_i(i\in I)$ 都是 $(X,\mathcal{U}_X)$ 的闭集, 则 $\bigcap\limits_{i\in I}F_i$ 仍是 $(X,(U)_X)$ 的闭集. 这是因为 $\bigcap\limits_{i\in I}F_i=\bigcap\limits_{i\in I}X\backslash U_i=X\backslash\bigcup\limits_{i\in I}U_i$, 这里 $U_i\in\mathcal{U}_X$. 类似地, 如果 $F_1,\cdots,F_k$ 是有限个 $(X,\mathcal{U}_X)$ 中的闭子集, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}F_i$ 仍是 X 的闭集, 因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}F_i=\bigcup\limits_{i=1}^{k}X\backslash U_i=X\backslash\bigcap\limits_{i=1}^{k}U_i$, 这里 $U_i\in\mathcal{U}_X$. 另外, 由于 $X\setminus X=\varnothing$ 与 $X\setminus\varnothing=X$, 因此 X 与 $\varnothing$ 亦是 X 的闭集. 一个拓扑空间中的闭集具有如下性质: 任意多个闭集之交仍是闭集, 有限个闭集之并仍是闭集, 以及 X 与 $\varnothing$ 是闭集. 从上面的陈述知道 X 与 $\varnothing$ 是拓扑空间 $(X,\mathcal{U}_X)$ 中两个既开又闭的集.

X 是一个拓扑空间, 这里省略了 $\mathcal{U}_X$, 其意义是有一个给定的 $\mathcal{U}_X$, 使得 X 成为一个拓扑空间. A 是 X 的一个子集, 则 $X\setminus A$ 称为 A 的补, 显然任一个闭集的补是开集, 而每个开集的补是闭集.

对每个 $x \in X$, 用 $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U}_X | x \in U\}$ 表示所有包含 x 点的开集. 每个 $\mathcal{U}_x$ 的元素称为是 x 的开邻域, 对任何一个集合 A, 如果它包含有一个 x 的开邻域就称 A 是 x 的邻域.

上面是我们对点集 X 引进拓扑的一种最常用的方法. 实际上还有其他方法引进拓扑, 例如对 X 的包括 X 和 $\varnothing$ 在内的若干子集的集合, 如果这个子集的集合对于有限并运算与任意多个交运算是封闭的, 亦即这些子集的有限并仍属于这个集合, 任意个这些子集的交仍属于这个集合, 则定义这些子集均为拓扑空间 X 的闭集, 这样也就赋予了 X 一个拓扑, 自然拓扑空间 X 的开集就是给定的闭集的补集.

注意对于一个点集 X 来讲可以赋予各种各样不同的拓扑, 因此有一个重要的拓扑比较的概念.

定义 1.2.2　设 X 是一个点集, $\mathcal{U}'_X$ 与 $\mathcal{U}_X$ 是赋予 X 的两个拓扑, 如果 $\forall U \in \mathcal{U}'_X$, 必有 $U \in \mathcal{U}_X$, 则称拓扑 $\mathcal{U}_X$ 细于 $\mathcal{U}'_X$, 或称 $\mathcal{U}'_X$ 粗于 $\mathcal{U}_X$.

注意并不是 X 上的两个不同的拓扑都可以进行比较，下面的例子说明了这点.

$X = \{a, b, c\}$ 是由 3 个不同的点组成的集合, $\mathcal{U}_X = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \varnothing\}$, 显然 $\mathcal{U}_X$ 满足定义 1.2.1 的拓扑空间条件 (1) $\sim$ (4). 现在 $\mathcal{U}'_X = \{\{b\}, \{b, c\}, \{b, c, a\}, \varnothing\}$, 显然 $\mathcal{U}'_X$ 也是 X 的一个拓扑, 但是 $\mathcal{U}_X$ 与 $\mathcal{U}'_X$ 就不可以比较粗细.

对每个点集 X 来讲都有一个最粗的拓扑, 它的开集就只有 X 与 $\varnothing$ 组成, 另外 X 亦有一个最细的拓扑, 它的 $\mathcal{U}_X$ 是由 X 的所有子集组成的. 显然前者是 X 上的最粗拓扑, X 所赋予的任一拓扑都包含有 $X, \varnothing$ 是其开集, 因此一定较这个最粗拓扑要细, 同样它亦较后者 X 上所有子集都是开集的拓扑要粗.

定义 1.2.3　设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的一个子集, $\overline{A}$ 称为集 A 的闭包, 它是包含 A 的最小闭集. $\mathring{A}$ 称为 A 的内点集, 它是包含于 A 内的最大开集.

定义 1.2.4　设 X 是一个拓扑空间, A 是 X 的一个子集, $a \in X$ 称为 A 的聚点, 如果 $\forall U \in \mathcal{U}_a$, 都有 $U \cap A \setminus \{a\} \neq \varnothing$, 所有 A 的聚点所成的集用 A' 记之.

命题 1.2.5　$\overline{A} = A' \cup A$.

证　$\forall x \in X \setminus \overline{A}$, 有 $X \setminus \overline{A} \in \mathcal{U}_x$, 因为 $(X \setminus \overline{A}) \cap A = \varnothing$, 因而 $x \in X \setminus A'$, 此即 $\overline{A} \supset A'$, 所以 $\overline{A} \supset A' \cup A$.

$\forall a \in X \setminus A' \cup A$, 因为 $a \notin A'$, 因此存在 $U_a \in \mathcal{U}_a$, 使得 $U_a \cap A \setminus \{a\} = \varnothing$, 又有 $a \notin A$, 因此 $U_a \cap A = \varnothing$. 进一步 $U_a \cap A' = \varnothing$, 否则存在 $a' \in U_a \cap A'$, 则 $U_a \cap A \neq \varnothing$, 所以 $U_a \cap (A \cup A') = \varnothing$, $\bigcup\limits_{a \in X \setminus A' \cup A} U_a$ 是一个开集, 而且 $\bigcup\limits_{a \in X \setminus A' \cup A} U_a = X \setminus A' \cup A$, 因此 $A' \cup A$ 是 X 中的闭集, 由于 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集, 因此 $A' \cup A \supset \overline{A}$, 所以

$\overline{A} = A' \cup A$.

定义 1.2.6 设 $(X,\mathcal{U}_X)$ 是一个拓扑空间, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_X$, $\mathcal{B}$ 称为 $\mathcal{U}_X$ 或拓扑空间 X 的一个基, 如果 $\forall U \in \mathcal{U}_X$, 都是若干个 $\mathcal{B}$ 中的元素的并. 如果 $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$, 而且 $\forall V \in \mathcal{B}$ 都是有限个 $\mathcal{S}$ 的元素的交, 则称 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{U}_X$ 或拓扑空间 X 的子基.

例 $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U}_X$ 为通常数学分析中的开集的集合, 则 $\mathcal{B} = \{(a,b),\ (a,+\infty),\ (-\infty,b)\,|\,\forall a,b \in \mathbb{R}\}$ 就是 X 的一个基, $\mathcal{S} = \{(a,+\infty),\ (-\infty,b)\,|\,\forall a,b \in \mathbb{R}\}$ 是 X 的子基.

设 $(X,\ \mathcal{U}_X)$ 是一个拓扑空间, 上面已经陈述了它的基 $\mathcal{B}$ 与子基 $\mathcal{S}$ 的定义, 反过来的问题是: 何时 X 的一个点集的某些子集的集合可以成为一个拓扑空间的基或子基, 亦即这些子集的集合可以作为基或子基来生成 X 的一个拓扑, 使得 X 成为拓扑空间.

命题 1.2.7 设 X 是一个点集, 令 $\mathcal{B}$ 是 X 的若干子集的集合. 如果它满足下面的条件:

(1) $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{B}} U = X$;

(2) $\forall U,V \in \mathcal{B}$, $\forall x \in U \cap V$, 存在 $W_x \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in W_x \subset U \cap V$.

则 $\mathcal{B}$ 就可以作为基生成一个拓扑空间.

证 按定义 $\mathcal{B}$ 作为基生成 $\mathcal{U}_X$, 亦即指所有的 $\mathcal{B}$ 中的若干个元素的并集的全体构成了 $\mathcal{U}_X$, 显然条件 (1) 表明 $X \in \mathcal{U}_X$, 而 $\varnothing \in \mathcal{U}_X$ 是自然的, 可以视为零个 $\mathcal{B}$ 中元素的并. 现在 $\mathcal{U}_X$ 中任意个元素并显然是 $\mathcal{B}$ 中若干元素的并集, 因此仍属于 $\mathcal{U}_X$. 因此实际上只需验证的是 $\forall U,V \in \mathcal{U}_X, U \cap V$ 仍属于 $\mathcal{U}_X$, 亦即 $U \cap V$ 一定是 $\mathcal{B}$ 中若干元素之并, 条件 (2) 保证这个性质成立. $\forall x \in U \cap V$, 因为 U,V 都是 $\mathcal{B}$ 的若干元素的并集, 因此存在 $U',V' \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in U' \cap V'$, 则由条件 (2), 存在 $W_x \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in W_x \subset U' \cap V' \subset U \cap V$, 因而 $\bigcup\limits_{x \in U \cap V} W_x = U \cap V$, 这里等式右边的 $W_x (x \in U \cap V)$ 均属于 $\mathcal{B}$, 因此 $U \cap V$ 属于 $\mathcal{U}_x$.

命题 1.2.8 设 X 是一个点集, 令 $\mathcal{S}$ 为 X 的若干子集的集合. 如果 $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U = X$, 则 $\mathcal{S}$ 就可以作为子基生成 X 的一个拓扑, 使得 X 成为一个拓扑空间.

证 现在令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{S}$ 的所有有限交所成的 X 的子集的集合. 上面 $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{S}} U = X$ 表示 $\mathcal{B}$ 已适合命题 1.2.7 的条件 (1), 现在只要证明 $\mathcal{B}$ 适合命题 1.2.7 的条件 (2), 则 $\mathcal{B}$ 就可以作为基生成 X 的一个拓扑, 这也就是 $\mathcal{S}$ 作为子基生成的拓扑. 设 $U,V \in \mathcal{B}$,

按定义 $U=\bigcap\limits_{i=1}^{k}W_{1,i}, V=\bigcap\limits_{j=1}^{t}W_{2,j}$, 这里 $W_{1,i}$, $W_{2,j}(1\leqslant i\leqslant k, 1\leqslant j\leqslant t)$ 均属于 $\mathcal{S}$, 则 $U\cap V=\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k}W_{1,i}\right)\cap\left(\bigcap\limits_{j=1}^{t}W_{2,j}\right)$, 因此亦为 $\mathcal{S}$ 中的有限个元素之交, 故命题 1.2.7 的条件 (2) 自然满足.

从命题 1.2.8 可以观察到, 用子基来定义一个拓扑空间是最容易的, 下面将会见到这方面的实例.

定义 1.2.9　设 $f:X\longrightarrow Y$ 为两个拓扑空间的映射, 若 $\forall U\in\mathcal{U}_Y$, $f^{-1}(U)\in\mathcal{U}_X$, 则称 f 是一个连续映射.

从前面的陈述知道, 这个定义与微积分中关于连续的定义是一致的.

命题 1.2.10　设 $f:X\longrightarrow Y$ 是两个拓扑空间的连续映射, 当且仅当下面两个条件之一成立:

(1) $\forall U\in\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}_Y$ 的基, $f^{-1}(U)\in\mathcal{U}_X$;

(2) $\forall U\in\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{U}_Y$ 的子基, $f^{-1}(U)\in\mathcal{U}_X$.

证　如果 $\forall W\in\mathcal{U}_X$, 条件 (1) 成立, 则由 $W=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$, I 是一个指标集, $U_i\in\mathcal{B}$, 所以 $f^{-1}(W)=\bigcup\limits_{i\in I}f^{-1}(U_i)$, 因为 $f^{-1}(U_i)\in\mathcal{U}_X(\forall i\in I)$, 因此 $f^{-1}(W)=\bigcup\limits_{i\in I}f^{-1}(U_i)\in\mathcal{U}_X$, 故 f 是连续的. 反之, 当 f 连续时, 因为 $\mathcal{B}\subset\mathcal{U}_Y$, 因此条件 (1) 自然成立.

如果条件 (2) 成立, 则只要证明条件 (2) 蕴含条件 (1) 就证明了命题. 设 $\forall U\in\mathcal{B}$, 由子基的定义, $U=\bigcap\limits_{i=1}^{k}V_i(V_i\in\mathcal{S})$, $f^{-1}(U)=\bigcap\limits_{i=1}^{k}f^{-1}(V_i)$, 因为 $f^{-1}(V_i)\in\mathcal{U}_X$, 因此 $f^{-1}(U)\in\mathcal{U}_X$, 故命题成立.

这个命题告诉我们在验证一个 $f:X\longrightarrow Y$ 是否连续时, 有时只要对 $\mathcal{U}_Y$ 的基或者子基来验证就足够了, 这对我们验证映射的连续性提供了方便.

定义 1.2.11　$f:X\longrightarrow Y$ 是连续映射的条件告诉我们, 若 X 的拓扑越细或者 Y 的拓扑越粗, 则映射 $f:X\longrightarrow Y$ 成为连续的可能性就越大. 例如 $\mathcal{U}_Y=\{Y,\varnothing\}$ 这个最粗拓扑, 则任何映射 $f:X\longrightarrow Y$ 都是连续的, 同样如果 X 赋予最细拓扑, $\mathcal{U}_X=\{X\text{的所有子集}\}$, 则任何映射 $f:X\longrightarrow Y$ 都是连续的.

定义 1.2.12　设 X 是一个拓扑空间, X_1 是 X 的一个子集, 今在 X_1 上赋予拓扑 $\mathcal{U}_{X_1}=\{U\cap X_1|U\in\mathcal{U}_X\}$, $(X_1, \mathcal{U}_{X_1})$ 称为拓扑空间 X 的子空间, $\mathcal{U}_{X_1}$ 称为由

$\mathcal{U}_X$ 诱导的相对拓扑.

$i: X_1 \longrightarrow X$ 是内射, 即 $\forall x \in X_1$, $i(x)=x$, 从上面的分析知道要保证上面的内射 i 连续, 只要对 X_1 赋以充分细的拓扑就可以了. 上面使得 X_1 成为 X 子空间的诱导拓扑就是在 X_1 上赋予保证 i 是连续的最粗拓扑.

设 X 是一个拓扑空间, 今在 X 的点之间引进一个等价关系 $\sim$, 即 $\forall x \in X$, $x \sim x$; $\forall x,y \in X$, $x \sim y$, 则 $y \sim x$; $\forall x,y,z \in X$, 如 $x \sim y$, $y \sim z$, 则 $x \sim z$. 用 $[x]$ 表示 x 的等价类, 此等价类的集合用 $X/\sim$ 表示之. $p: X \longrightarrow X/\sim$ 有一个自然的映射, $p(x)=[x]$, 称之为 X 到 $X/\sim$ 的投影. 现在我们要赋予 $X/\sim$ 一个拓扑, 使得投影映射 p 是连续的, 从上面关于连续映射的定义知道, 只要赋予 $X/\sim$ 较粗的拓扑, 则较易保证 p 是连续的, 但这样的拓扑未必有意义. 真正有意义的是保证 p 连续的 $X/\sim$ 上的最细拓扑, 这个拓扑就称为 $X/\sim$ 的商拓扑, $X/\sim$ 亦称为 X 关于等价关系 $\sim$ 的商拓扑空间.

我们用 $\mathcal{U}_{X/\sim}$ 表示这个商拓扑, $\mathcal{U}_{X/\sim}=\{A$ 是 $\mathcal{U}_{X/\sim}$的子集 $\mid p^{-1}(A)\in\mathcal{U}_X\}$, 很容易验证 $\mathcal{U}_{X/\sim}$ 是 $X/\ \sim$上保证 p 为连续的最细拓扑. 很显然在 $X/\sim$ 上若赋予的拓扑较之上述的 $\mathcal{U}_{X/\sim}$ 更细, 则表示存在 $X/\sim$ 的开集 B, 使得 $p^{-1}(B)\notin\mathcal{U}_X$, 因此 p 的连续性就不再成立. 很容易验证如此引进的 $\mathcal{U}_{X/\sim}$ 确实是一个拓扑, 因为 $p^{-1}(\varnothing)=\varnothing$, $p^{-1}(X/\sim)=X$; 如果 $A_i(i\in I), A_i\in\mathcal{U}_{X/\sim}$, 则 $p^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I}A_i\right)=\bigcup\limits_{i\in I}p^{-1}(A_i)\in\mathcal{U}_X$; 同样, 如果 $A,B\in\mathcal{U}_{X/\sim}$, 则 $p^{-1}(A\cap B)=p^{-1}(A)\cap p^{-1}(B)\in\mathcal{U}_X$. 因此 $\mathcal{U}_{X/\sim}$ 的确是 $X/\sim$ 的一个拓扑.

1.3 紧 空 间

设 X 是一个拓扑空间, $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 上的一个开集族, 如果 $\bigcup\limits_{i\in I}U_i=X$, 则称 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖.

定义 1.3.1 设 X 是一个拓扑空间, 若对 X 的任一开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$, 必存在一个有限子覆盖, 即存在有限个 $U_{i_1},\cdots,U_{i_k}$, 使得 $\bigcup\limits_{j=1}^{k}U_{i_j}=X$, 则称 X 是一个紧空间.

当 $X=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$, 则 $\varnothing=X\backslash X=X\backslash\bigcup\limits_{i=I}U_i=\bigcap\limits_{i\in I}(X\backslash U_i)$. 令 $F_i:=X\backslash U_i$ 是 X 中闭集, 因此 X 是紧空间的定义亦可以改写为: 若 X 是一个拓扑空间, $\{F_i\}_{i\in I}$ 是 X 的任一个闭集族, 且 $\bigcap\limits_{i\in I}F_i=\varnothing$, 则一定存在有限个 $F_{i_1},\cdots,F_{i_k}$, 使得 $F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_k}=\varnothing$.

显然这个叙述与定义 1.3.1 是完全等价的, 定义 1.3.1 是用开集来描绘紧性, 而后者是用其对偶的闭集来描绘紧性.

命题 1.3.2　*设 X 是一个拓扑空间, X 是紧空间的充分必要条件是对于每一个由 $\mathcal{U}_X$ 的基 $\mathcal{B}$ 的开集组成的 X 的开覆盖必存在一个有限子覆盖.*

证　X 是紧空间的定义为: 对每一个由 $\mathcal{U}_X$ 的开集组成的 X 的开覆盖必存在一个有限子覆盖. 因为 $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_X$, 因此由 $\mathcal{B}$ 的开集组成的开覆盖可以视为 $\mathcal{U}_X$ 开集组成的开覆盖, 因此当 X 是紧空间时, 由 $\mathcal{B}$ 的开集组成的 X 的开覆盖一定存在有限子覆盖, 这就证明命题的必要性.

要证明命题的充分性, 只要证明对任意由$\mathcal{U}_X$ 的开集组成的 X 的开覆盖$\{U_i\}_{i\in I}$, 一定可以取出有限子覆盖. 由定义 $U_i = \bigcup\limits_{j\in J_i} V_{ij}$, 这里 J_i 是指标集, $V_{ij} \in \mathcal{B}(j \in J_i)$, 因此 $\{V_{ij}\}_{i\in I, j\in J_i}$ 是由 $\mathcal{B}$ 中开集组成的开覆盖, 根据假设条件存在有限 $V_{i_1j_1}, \cdots, V_{i_kj_k}$ 覆盖 X, 由 $V_{i_1j_1} \subset U_{i_1}, \cdots, V_{i_kj_k} \subset U_{i_k}$, 因此 $\bigcup\limits_{t=1}^{k} U_{i_t} = X$, 故 X 是紧的.

同样由于开集与闭集互为补集, 因此命题 1.3.2 亦可以改用闭集来陈述.

一个拓扑空间 X 是紧的当且仅当对 X 中任意由 $\mathcal{B}$ 内集合的补集所成的闭集族 $\{F_i\}_{i\in I}$, 当 $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \varnothing$ 时, 必存在有限个 $F_{i_1}, \cdots, F_{i_k}$, 使得 $\bigcap\limits_{j=1}^{k} F_{ij} = \varnothing$.

下面证明空间的紧性与子基 $\mathcal{S}$ 的开覆盖之间的关系, 有类似于对于基 $\mathcal{B}$ 的开覆盖的结果.

命题 1.3.3　*一个拓扑空间 X 是紧的当且仅当对于每一个由子基 $\mathcal{S}$ 中的开集 $\{W_i\}_{i\in I}$ 组成的 X 的开覆盖, 必存在一个 X 的有限子覆盖.*

这个命题的证明并不像前面的命题那样简单, 要运用 Zorn 引理, 为此先介绍一些必要的概念.

设 $\mathcal{S}$ 是一个集合, 其元素用 $a, b, c, d, \cdots$ 来表示, $\mathcal{S}$ 上的一个偏序关系 "$\prec$" 是指一个可传递的关系, 即如果有 $a \prec b, b \prec c$, 则必有 $a \prec c$. 这里称 a 前于 b 与 b 前于 c, 则 a 前于 c, 对于偏序集来讲, 不是任意两个元素 $a, b \in \mathcal{S}$, 其间一定有这个关系. 当 $\mathcal{S}$ 的任意两个元素 $a, b \in \mathcal{S}$ 都具有 $a \prec b$ 或 $b \prec a$ 的关系时, 则称 $\prec$ 是 $\mathcal{S}$ 上的全序关系. $m \in \mathcal{S}$, 如果不存在元素 $a \in \mathcal{S}$, 使得 $m \prec a$, 则称这个 m 是 $\mathcal{S}$ 关于偏序关系 $\prec$ 的极大元素. 一个偏序集 $\mathcal{S}$ 的全序子集一般称为一个链.

引理 1.3.4(Zorn 引理)　*如果偏序集 T 的链 T_1 具有上界, 则 T_1 一定在 T 中有极大元.*

此为试读, 需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com