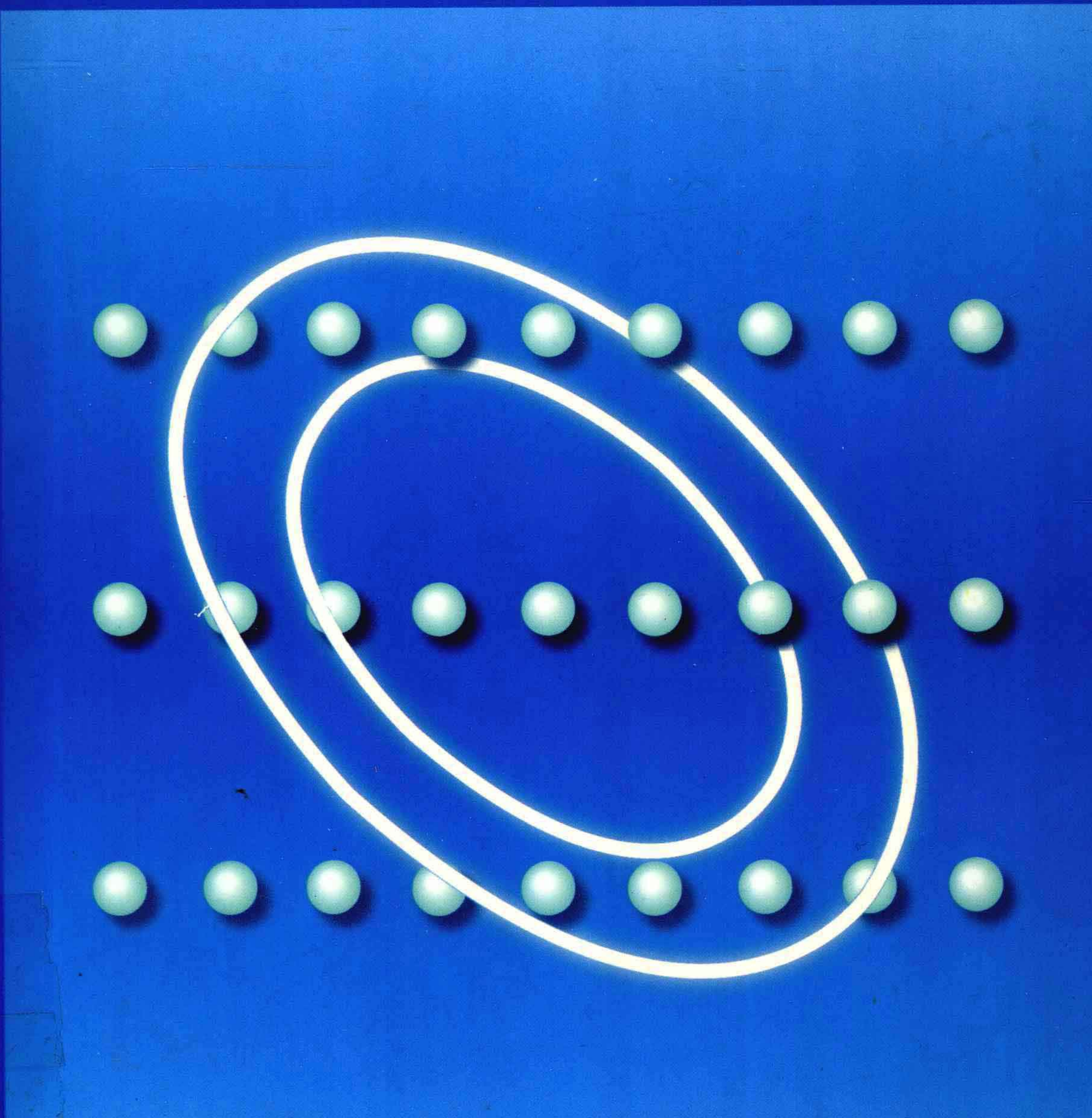
试验设计与数据处理

郁　飞　编



中国标准出版社

试验设计与数据处理

郁　飞　编

中国标准出版社

内 容 提 要

本书从理论和实践两个方面系统地介绍了数据处理、回归分析和试验设计等数理统计的基本原理和应用方法。为了便于理解，各章都附有例题。除了用传统的解题方法外，在本书最后一章中，还有用计算机工具软件——Mathcad 对各类例题的解法示范。

本书深入浅出，概念明确，运用性强，可作为高等院校的教学用书，也可供有关工程技术人员参考。

试验设计与数据处理

*

中国标准出版社出版

北京复兴门外三里河北街 16 号

邮政编码:100045

电　话:68522112

中国标准出版社秦皇岛印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 13¾　字数 322 千字

1999 年 7 月第一版　1999 年 7 月第一次印刷

*

ISBN7-5066-1856-7/O・020

印数 1—500　定价 33.00 元

前　言

试验设计和数据处理是关于实验技术的一门科学。随着科学的不断发展,它的应用也日益广泛,是当代工程技术人员必须掌握的技术方法之一,国内各高校也先后为本科生、研究生开设了试验技术课。

本书主要内容包括数据处理和试验设计两大部分。其中,数据处理部分对数据处理方法、误差、置信度等作了简单的介绍;试验设计部分为本书的重点,包括回归分析和试验设计。回归分析中包括一元线性回归、多元线性回归、多元非线性回归和多项式回归;试验设计包括方差分析、多因素要因设计、正交试验设计等。

本书力求从技术、应用观点对每一种方法的原理进行通俗的说明,略去了公式的和复杂的定理说明,通过简单的实例阐述各种方法的应用技术。除了采用传统的方法外,在第九章中还采用工具软件——Mathcad 作了解题示范,这样计算时一般不考虑计算方法、中间步骤,只要输入计算公式,即自动给出结果。对于比较复杂的计算,可采用其中的内嵌式编程来解决,十分方便。有一般计算机应用常识的读者,只要根据书中的解题步骤,就可以方便的掌握解题方法。

本书可作为高等院校的教学用书,也可供有关工程技术人员参考。

编　者

1998 年 10 月

目　　录

第一章　误差理论

第一节　概　　述

人类为了认识自然与改造自然,需要不断地对自然界的各种现象进行测量和研究,由于实验方法和实验设备的不完善,周围环境的影响以及受人们认识能力所限等,测量和实验所得数据和测量的真值之间,不可避免地存在着差异,这在数值上即表现为误差。随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高,虽可将误差控制得愈来愈小,但终究不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性,已为大量实践所证明,为了充分认识并进而减小或消除误差,必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行研究。

研究误差的意义为:

① 认识误差的性质,分析误差产生的原因,以消除或减小误差。

② 正确处理测量和实验数据,合理计算所得结果,以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。

③ 正确组织实验过程,合理设计仪器或选用仪器和测量方法,以便在最经济条件下,得到理想的结果。

一、测量方法的分类

按照获得测量参数结果的方法不同,通常把测量方法区分为直接测量和间接测量。

1. 直接测量

凡是被测参数直接与测量单位进行比较,其测量结果又可直接从测量仪表上获得的测量方法称为直接测量,例如使用水银温度计测量温度。直接测量又可分为直读法和比较法两类。

(1) 直读法

它是可以直接从测量仪表上读得被测的结果,如压力表等。这种方法的优点是使用方便,但一般精度较差。

(2) 比较法

这种测量方法一般不能从测量仪表直接读得测量结果,而需要使用标准量具,因此测量手续比较麻烦,但测量仪表本身的误差以及其他某些误差则往往在测量过程中被抵消,因此,测量精度一般比直读法高。根据不同的比较方法又可区分为:

① 零示法(又称零值法)

在测量时,使被测量的作用与已知量(量具)的作用效应互相抵消(平衡),以致总的效应减到零,这样就可以肯定被测量即等于这个已知量,例如利用电位差计来测量热电偶在测温时产生的热电势大小。

② 差值法

使用适当的手段测量出被测量 X 与一个已知量 x_k 的差值有 $(X-x_k)$,则有

$$X=(X-x_k)+x_k$$

例如用热电偶温度计测量温度 t 时，从仪表上得到的是被测温度 t 与热电偶冷端温度 t_n 之差。

③ 代替法

在一定的测量条件下，选择一个大小适当的已知量(通常是可调的标准量)，使它在测量装置中取代被测量而不致引起测量仪表指示值的变化，那末被测量的数值就等于这个已知量。由于在代替法的两次测量中，仪表的状态及其指标值都相同，所以仪表的准确度对测量结果基本上没有影响，从而消除了测量结果中的仪表误差，这样就可在测量中选择准确度较低的测量仪表而获得高的测量精度。

2. 间接测量

所谓间接测量就是不直接测量被测量，而是通过测量与被测量有一定关系的其他一个或几个物理量，然后通过它们之间的函数关系计算出被测量的数值。例如在测量风道中空气流量 Q 时，通过测量出风道中的空气流速 C(m/s)和风的截面积 S(m^2)，则空气流量 Q 由下式计算而得

$$Q=S\times C \quad (m^3/s)$$

二、测量误差特性的分类

1. 系统误差

它是指在测量中产生的量值大小和符号都恒定不变或遵循一定规律变化的误差，一般情况下，产生这种误差的原因是知道的。

2. 随机误差(又称偶然误差)

在消除了系统误差之后，对同一物理量进行多次重复测量时还会由于某些不可知的原因引起测量值或大或小的现象，而此现象又无一定的变化规律，它的出现完全是随机的。但它一般都遵循正态分布，因此可通过数理统计的方法加以处理，我们把这种误差称为随机误差或偶然误差。

3. 过失误差

在测量过程中完全是由于测量者人为的过失而造成的误差称为过失误差，当然此种误差无规律可循，但却是完全可以通过主观的努力加以克服。

第二节 有效数字

一、有效数字与数据运算

在测量结果和数据运算中，确定用几位数字来表示测量或数据运算的结果是一个十分重要的问题。测量结果既然包含有误差，说明它是一个近似数，其精度有一定限度，在记录测量结果的数据位数或进行数据运算时取值多少，皆应以测量所能达到的精度为依据。如果认为，不论测量结果的精度如何，在一个数值中小数点后面的位数愈多，这个数值就愈精确；或者在数据运算中，保留的位数愈多，精度就愈高，这种认识都是片面的。若将不必要的数字写出来，既费时间，又无意义。一方面是因为小数点的位置决定不了精度，它仅与所采用的单位

有关，如 35.6mm 和 0.0356m 的精度完全相同，只不过小数点位置不同。另一方面，测量结果的精度与所用测量方法及仪器有关，在记录或数据运算时，所取的数据位数其精度不能超过测量所能达到的精度；反之，若低于测量精度，也是不正确的，因为它将损失精度。此外，在试验及数字计算中，由于测量误差的存在，人们测得的数值往往都是近似值。在数字计算中，如 π、e、$\sqrt{3}$ 等也只能取用近似值，但是近似值的正确选定，将直接影响计算结果。以解如下方程为例：

$$\begin{cases} x - y = 1.0 \\ \pi \cdot x - 3.1420 \cdot y = 0 \end{cases}$$

在求解方程组时，若取 $\pi = 3.1415$ 时，$x = 6284$，$y = 6283$；当 $\pi = 3.1416$ 时，$x = 7855$，$y = 7854$，π 仅差 0.0001，而结果相差 25%，可见取值多少对方程组的解有很大影响，由此也可看出研究有效数字和数据运算规则的重要性。

二、有效数字

含有误差的任何近似数，如果其绝对误差界是最末位数的半个单位，那么，从这个近似数左方起的第一个非零的数字，称为第一位有效数字。从第一位有效数字起到最末一位数字止的所有数字，不论是零或非零的数字，都叫有效数字。若具有 n 个有效数字，就说是 n 位有效位数。例如取 $\pi = 3.14$，第一位有效数字为 3，共有三位有效数字；又如 0.0027，第一位有效数字为 2，共有两位有效位数；而 0.00270，则为三位有效位数。若近似数的右边带有若干个零的数字，通常把这个近似数写成 $A \times 10^n$ 形式，如用 2.40×10^3 和 2.4×10^3 来表示近似数的有效位数。

三、数字舍入规则

对于位数很多的近似数，当有效位数确定后，其后面多余的数字应予舍去，而保留的有效数字最末一位数字应按下面的舍入规则进行凑整：

① 若舍去部分的数值，大于保留部分的末位的半个单位，则末位加 1；

② 若舍去部分的数值，小于保留部分的末位的半个单位，则末位不变；

③ 若舍去部分的数值，等于保留部分的末位的半个单位，则末位凑成偶数。即当末位为偶数时则末位不变，当末位为奇数时则末位加 1。

例如，按上述舍入规则，将下面各个数据保留四位有效数字进行凑整。

原有数据	舍入后数据
3.14159	3.142
2.71729	2.717
4.51050	4.510
3.21550	3.216

由于数字舍入而引起的误差称为舍入误差，按上述规则进行数字舍入，其舍入误差皆不超过保留数字最末位的半个单位。必须指出，这种舍入规则的第 3 条明确规定，舍去的数字不是见 5 就入，从而使舍入误差成为随机误差。在大量运算时，其舍入误差的均值趋于零。这就避免了由于舍入误差的累积而产生系统误差。

四、数据运算规则

在近似数运算中，为了保证最后结果有尽可能高的精度，所有参与运算的数据，在有效数字后要多保留一位数字作为参考数字，或称为安全数字。

1. 加减运算

在近似数加减运算时，各运算数据以小数位数最少的数据位数为准，其余各数据可多取一位小数，但最后结果应与小数位数最少的数据小数位数相同。

例如：求$2643.3+987.7+4.187+0.2354\approx 2643.3+987.7+4.19+0.24$

$=3635.13=3635.1$

2. 乘除运算

在近似数乘除运算时，各运算数据以有效位数最少的数据位数为准，其余各数据要比有效位数最少的数据位数多取一位数，而最后结果应与位数最少的数据位数相同。

例如：$15.13\times 4.12=62.3356\approx 62.3$

在一些复杂的运算中，由于数字舍入引起误差积累，如果计算方法不当会产生很大误差。

例如：$a=100$，$b=3$，$c=166.5$，$d=5$，取一位小数。

求：$E=10^6\times(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})$

解 1：$a/b=33.3$，$c/d=33.3$　故 $E=0$

解 2：$E=10^6\times(\frac{a}{b}-\frac{c}{d})=\frac{ad\cdot 10^6-bc\cdot 10^6}{bd}=33333.3$

是什么原因引起上述计算的差呢？分析研究指出：在一个复杂的运算中，除不尽的除法运算进行的愈早或者进行运算的次数越多，则累计误差愈大。因此，在组织和安排运算时，应尽量避免和减少除不尽的除法运算。在不可避免时，应设法把这一步运算尽可能安排或推迟到整体运算的最后一步中。另外，参加运算的数值，如果相互间数量级相差很悬殊，也将促使上述除法运算中累计误差的增大。

第三节　等精度测量中的误差分析

由于测量中的系统误差可以消除，本节讨论是以已经消除了测量的系统误差为前提进行的。

一、直接测量

1. 等精度测量中的最可信赖值

由于真值不能测得，所以在几乎所有测量中都以出现概率最大的最佳值来代替真值。可以证明，一组测量值的算术平均值与各测量值的离差平方和最小。因此可以得出结论，算术平均值是最能代表真值的最佳值。

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i/n$$

2. 有限观察次数中，标准误差计算

在有限测量中，首先由贝塞尔导出标准误差(均方差)计算方程为：

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1-1}$$

算术平均值比单次测量结果要精确，算术平均值的标准误差计算方程为：

$$\hat{S}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1-2}$$

3. 置信区间、置信概率

设有一组服从正态分布的数据 X，子样容量为 n，子样均值为 $\overline{X}$，标准误差为 $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$，母体均值为 a，标准误差为 σ。服从正态分布的随机变量的正态分布概率可表示为：

$$P\left(-1<\frac{\overline{X}-a}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}}<+1\right)=0.683$$

由于子样平均值 $\overline{X}$ 本身也是随机变量，故 $\overline{X}\pm\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ 也应是随机的，则

$$P\left(\overline{X}-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)=0.683$$

或

$$P\left(a-\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}<\overline{X}<a+\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)=0.683$$

该两式说明在区间 $\overline{X}\pm\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ 内包含真值的可靠程度为68.3%，或者说子样均值有68.3%的可能性落在以真值 a 为中心、$\overline{X}\pm\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ 的区间范围内。

通常，称 $\overline{X}\pm\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ 为置信区间(或置信限)，$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ 为置信区间的半长，68.3%称为置信概率(或置信度)，常用 $1-\alpha$ 表示。这里 α 叫作危险率(或显著水平)，它是上述结论可能犯错误的概率。

概括起来，可以对测量结果作以下结论：

测量结果＝子样平均值±置信区间半长(置信度 $1-\alpha$)

该结论说明，一切测量结果应该理解为在一定置信概率下，以子样平均值为中心，以置信区间半长为界限的量。

4. 可疑数据剔除

我们要对实验数据作出正确的整理，首先要求所获得的测量数据是可靠的，但是在进行一列等精度的测量中，有时会出现某一个测量值与其余各测量值相差甚远即该测值的绝对误差特别大，而正态分布其大误差出现的概率极小，其误差绝对值大于 3σ 出现的概率仅0.26%，因此，我们就有理由在测量中对误差特别大的测量值是否可靠提出怀疑，如不可靠，则就应把这一次测量值舍弃，下面介绍几种常用可疑数据的判别方法。

(1)莱特准则(也称 3σ 判据)

由于误差绝对差值大于 3σ 的测量值出现概率仅有 0.26%，因此，就把它作为判别的依据，即把某次测量值的剩余误差大于 $3\hat{\sigma}$ 的测量值，判作可疑数据而把它舍弃。

由于这一判据是建立在 $n\to\infty$ 基础上的，当 n 有限时，特别是 n 较小时，这一判据并不十分可靠，但由于这一判据简单，使用方便，还是常常为测量者所引用。

(2)肖维纳判据

它是根据一列 n 次的等精度测量值，计算得到 $\bar{x}$ 和 $\hat{\sigma}$，当某次测量值 x_i 对应的 $\frac{|x_i-\bar{x}|}{\hat{\sigma}}$ 值大于附表 3a 所列之值，则认为该测量值 x_i 可疑而将其舍弃。

(3)格拉布斯判据

使用这种判据的步骤如下：首先必须选定一个危险率 α，它的含义是：我们根据这一判据，判定某一测量值 x_i 为可疑数据而将其舍弃，而实际上此测量值并非可疑数据，因此我们所犯错误的概率为 α，通常把这种错误称为第一类错误。危险率 α 选得小，我们犯第一类错误的概率也就小了，即确定的可疑数据的可靠性是大了，但是却把本来是可疑数据而判成不是可疑数据而犯的错误的概率增大了，通常把这种错误称为第二类错误。这是因为 α 选得小，就意味着判别的误差范围扩大了，在测量值中混入可疑数据的可能性就变大了，因此，危险率也不能选得过小。然后，根据一列测量值计算出 $\bar{x}$ 和 $\hat{\sigma}$，并计算出对应的 $\frac{|x_i-\bar{x}|}{\hat{\sigma}}$ 值大于附表 3b 所列 $T(N,\alpha)$ 之值，则认为该测量值 x_i 可疑而将其舍弃。

二、间接测量

间接测量的被测量为 N，直接测量的物理量为 u、z、w，它们之间函数关系为：

$$N=f(u、z、w)$$

1. 最可信赖值

间接测量中，函数量的最可信的值(即算术平均值)$\overline{N}$，只要把各个独立的直接测量量的算术平均值 $\bar{u}$、$\bar{z}$、$\bar{w}$ 代到函数关系式即可求得。

$$\overline{N}=f(\bar{u}、\bar{z}、\bar{w}) \tag{1-3}$$

2. 标准误差传递公式

$$\hat{S}_N=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2\cdot\hat{S}_{\bar{u}}^{\ 2}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\cdot\hat{S}_{\bar{z}}^{\ 2}+\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2\cdot\hat{S}_{\bar{w}}^{\ 2}} \tag{1-4}$$

3. 间接测量的特点

例 1-1：在一线路中，测量得电流 $I=10.0\text{A}\pm0.3\text{A}$、电阻 $R=10.0\Omega\pm0.3\Omega$、电压 $V=100.0\text{V}\pm3\text{V}$，求消耗在电阻中的电功率 P。

解：可用三种方法求得电功率，现分别计算如下：

方案	1	2	3
公式	$I\times V$	$I^2\cdot R$	$\frac{V^2}{R}$
P	$10\times100=1000=1\text{kW}$	$10^2\times10=1000=1\text{kW}$	$\frac{100^2}{10}=1000\text{W}=1\text{kW}$

续表

方案	1	2	3
公式	$\sqrt{I^2 \cdot \hat{S}_V^2 + V^2 \cdot \hat{S}_I^2}$	$\sqrt{(2 \cdot I \cdot R)^2 \cdot \hat{S}_I^2 + I^4 \cdot \hat{S}_R^2}$	$\sqrt{\left(\frac{2V}{R}\right)^2 \cdot \hat{S}_V^2 + \left(\frac{V^2}{R^2}\right)^2 \cdot \hat{S}_R^2}$
$\hat{S}_P$	$\sqrt{100 \times 1 + 10000 \times 0.01}$ $= \sqrt{200}$ $= 14.14\text{W}$	$\sqrt{(2 \times 10 \times 10)^2 \times 0.1^2 + 10^4 \times 0.1^2}$ $= \sqrt{400 + 100}$ $= \sqrt{500} = 22.4\text{W}$	$\sqrt{400 + 100} = 22.4\text{W}$

我们通过上述例子的讨论，可以得出如下结论：

① 为了测量某一被测量的数值（如本例中之电功率），可以通过不同的途径（即通过直接测量不同的物理量，在本例中的 I、R、V）来获得。

② 由于使用的测量方法不同，尽管各实际测量量的相对误差相同（如本例中的标准误差均为 0.1），可是最终形成被测量（在本例中之 P）的误差却不相同，因此，在选用测量方法时应注意选择最终误差小的测量方案（例如本例中的测量方案一），这样我们就可以在满足允许误差的条件下选择准确度稍差的仪表，从而提高经济性，就是所为最佳测量方法的选择。

③ 使用直接测量某几个物理量，通过函数关系来计算被测量的数值的测量方法时，有时每一个直接测量对被测量最终误差影响程度是不相同的。例在方案二中，分别将电流和电阻的标准误差改为 $\hat{S}_I = 0.2\text{A}$、$\hat{S}_R = 0.2\Omega$，并计算如下

$\hat{S}_I = 0.2\text{A}$、$\hat{S}_R = 0.1\Omega$	$\hat{S}_I = 0.1\text{A}$、$\hat{S}_R = 0.2\Omega$
$\hat{S}_P = 41.2\text{W}$	$\hat{S}_P = 28.3\text{W}$

从计算结果可以看出，电流 I 的影响大，电阻 R 的影响小，因此，我们就应把注意力集中在降低对被测量的最终误差影响大的那个直接测量量的误差上。

4. 各类物理量误差处理原则

在间接测量中，各种物理常数、系数、一次测量量的误差可按如下原则处理；

① 常数项的处理：根据方差的性质，常数的方差为零，常数项不存在误差。在实际测量中，常遇到许多无理数及物理常数，如重力加速度、通用气体常数等。根据需要可以把它们的有效数字位数取足够多，以保证其很高的准确度。

② 试验系数（或经验系数）的处理：如节流元件中的流量系数、测速管的速度系数等，可以通过标定试验，从一组子样数据中整理出它们的标准误差。

③ 一次测量的物理量其误差计算的原则：对于绝大多数一次测量的物理量，通常其最大可能的测量误差是已知的。按误差原理，误差小于 $\pm 3\sigma$ 的概率达 0.997，所以可以认为最大可能绝对误差 $\pm\Delta$ 就是标准误差 σ 的 3 倍，故一次测量的标准误差 $\sigma = \pm\frac{1}{3}\Delta$。

5. 查阅图、表时物理量的误差处理

误差处理原则同上，即其标准误差按最大绝对误差的 1/3 确定。而最大绝对误差的大小取图、表数据最末一位有效数字单位值的 1/2。

6. 远传式（或远端式）测量的物理量的误差处理

一般来说，远传式仪表主要由变送器（或转换器）、导线（包括热电偶的补偿导线等）及显

示(或指示)仪表组成,总测量量是由各部分的量值按一定乘除关系转换而得。在计算测量总误差时必须考虑到各部分误差的传递,这时仍可按间接测量误差计算公式进行计算。

第四节　不等精度测量中的误差分析

前面讲述的内容皆是等精度的问题,在一般测量实践中基本上都属这种类型。但有时为了得到更精确的测量结果,往往在不同的测量条件下,用不同的仪器、不同的测量方法、不同的测量次数以及不同的测量者进行测量对比,这种测量称为不等精度测量。

在一般测量工作中遇到不等精度测量有两种情况。

第一种情况,用不同测量次数进行对比测量。例如用同一仪器测量某参数先后进行 n_1 和 n_2 次测量,分别求得算术平均值 $\overline{x}_1$ 和 $\overline{x}_2$。因为 n_1 和 n_2 不同,显然 $\overline{x}_1$ 和 $\overline{x}_2$ 的精度不一样。

第二种情况,用不同精度的仪器进行对比测量,显然所得的结果不会相同。

对于不等精度测量,计算最后测量结果及其精度(如标准差)、不能套用前面等精度测量的计算公式,需推导出新的计算公式。

一、权的概念

在等精度测量中,各个测得值可认为同样可靠,并取所有测得值的算术平均值作为最后的测量结果。在不等精度测量中,各个测量结果的可靠程度不一样,因而不能简单地取各测量结果的算术平均值作为最后测量结果,应让可靠程度大的测量结果在最后结果中占的比重大一些,可靠程度小的占比重少一些。各测量结果的可靠程度可用一数值来表示,这数值即称为该测量结果的权,记为 P。因此测量结果的权可理解为,当它与另一些测量结果比较时,对该测量结果所给予的信赖程度。

二、权的确定方法

测量结果的权说明了测量的可靠程度,因此可根据这一原则来确定权的大小,例如,可按测量条件的优劣、测量仪器如测量方法所能达到的精度高低、重复测量次数的多少以及测量者水平高低等来确定权的大小,也即测量方法愈完善,测量精度愈高,所得测量结果的权也应愈大。

最简单的方法可按测量次数来确定权,即测量条件和测量者水平皆相同,则重复测量次数愈多,其可靠程度也愈大,因此完全可由测量的次数来确定权的大小,即 $P_i=n_i$。由此可以证明,每组测量结果的权与其相对应的标准误差的平方成反比。即:

$$P_1:P_2:\cdots:P_m=\frac{1}{\hat{S}_1^2}:\frac{1}{\hat{S}_2^2}:\cdots:\frac{1}{\hat{S}_m^2} \tag{1-5}$$

例 1-2　对某一长度进行三次不等精度测量,其结果如下:

$$x_1=2000.45\text{mm}\qquad \hat{S}_1=0.05\text{mm}$$

$$x_2=2000.15\text{mm}\qquad \hat{S}_2=0.20\text{mm}$$

$$x_3=2000.60\text{mm}\qquad \hat{S}_3=0.10\text{mm}$$

求各测量结果的权。

解：由式(1-5)得

$$P_1 : P_2 : \cdots : P_m = \frac{1}{\hat{S}_1^2} : \frac{1}{\hat{S}_2^2} : \cdots : \frac{1}{\hat{S}_m^2} = \frac{1}{0.05^2} : \frac{1}{0.20^2} : \frac{1}{0.10^2} = 16 : 1 : 4$$

因此，取各组的权分别为16，1，4。

三、加权算术平均值

若对同一被测量 l 进行 m 组不同精度测量，得到 m 个测量结果 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_m$，设相应的测量次数为 $n_1, n_2, \cdots, n_m$，即

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} l_{1i}}{n_1},\ \bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} l_{2i}}{n_2},\ \cdots,\ \bar{x}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n_m} l_{mi}}{n_m} \tag{1-6}$$

全部测量的算术平均值为

$$\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n_1} l_{1i} + \sum_{i=1}^{n_2} l_{2i} + \cdots + \sum_{i=1}^{n_m} l_m \right) \Big/ \sum_{i=1}^{m} n_i$$

将式(1-6)代入上式得

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + \cdots + n_m\bar{x}_m}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m} = \frac{P_1\bar{x}_1 + P_2\bar{x}_2 + \cdots + P_m\bar{x}_m}{P_1 + P_2 + \cdots + P_m} = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i} \tag{1-7}$$

当各组权相等时，即 $P_1 = P_2 = \cdots = P$ 时，加权算术平均值可简化为

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^{m} P_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i}{m} \tag{1-8}$$

由式(1-8)计算的结果为等精度的算术平均值，由此可见，等精度测量是不等精度测量的特殊情况。

四、单位权的概念

在不等精度测量中，各测量结果的精度不同，权数也不相同，不能用等精度的测量公式，有时为了计算需要，可将不等精度测量列转化为等精度测量列，这样就可以用等精度测量的计算公式来处理不等精度的测量结果。所采用的方法是使权数不同的不等精度测量列转化为具有单位权的等精度测量列，即单位权化。

单位权的实质是使任何一个量值乘以自身权数的平方根，得到新的量值权数为1，若将不等精度测量的各组测量结果 $\bar{x}_i$ 皆乘以自身权数的平方根 $\sqrt{P_i}$，此时得到新的值的权数就是1。用这种方法可将不等精度的各测量结果皆进行单位权化，使该测量列转化为等精度测量列。

五、加权算术平均值的标准误差

对同一被测量进行 m 组不等精度测量，得到 m 个测量结果 $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m$，若已知单位权

测得值的标准误差 $\hat{\sigma}$，则其各组算术平均值的标准误差为

$$\hat{S}_i=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n_i}} \qquad i=1,2,\cdots m$$

而全部($m\times n$ 个)测得值的算术平均值 $\bar{x}$ 的标准误差为

$$\hat{S}_{\bar{x}}=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n_1+n_2+\cdots n_m}}=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}n_i}}$$

比较上面两式得

$$\hat{S}_{\bar{x}}=\hat{S}_i\sqrt{\frac{n_i}{\sum_{i=1}^{m}n_i}} \tag{1-9}$$

因为 $\qquad P_i=n_i \qquad \sum_{i=1}^{m}P_i=\sum_{i=1}^{m}n_i$

代入(1-9)式得

$$\hat{S}_{\bar{x}}=\hat{S}_i\sqrt{\frac{P_i}{\sum_{i=1}^{m}P_i}}=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}P_i}} \tag{1-10}$$

由式(1-10)已知，当各组的总权数 $\sum_{i=1}^{m}P_i$ 已知时，可由任一组的标准误差 $\hat{S}_i$ 和相应的权 P_i，或者由单位权的标准误差 $\hat{\sigma}$，求得加权算术平均值的标准误差 $\hat{S}$。当各组测量结果的标准误差为未知时，则不能直接应用式(1-10)而必须由各测量结果的残差来计算加权算术平均值的标准误差。

已知各组测量结果的残差为

$$v_{\bar{x}i}=\bar{x}_i-\bar{x}$$

将各组 $\bar{x}_i$ 单位权化，则有

$$\sqrt{P_i}v_{\bar{x}i}=\sqrt{P_i}\bar{x}_i-\sqrt{P_i}\bar{x}$$

因为上式中各组新值 $\sqrt{P_i}\bar{x}_i$ 为等精度测量列的测量结果，相应的 $\sqrt{P_i}v_{\bar{x}i}$ 也成为等精度测量列的残差，则用 $\sqrt{P_i}v_{\bar{x}i}$ 代替 v_i 代入等精度测量公式(1-1)，得

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}P_iv_{\bar{x}i}^2/(m-1)} \tag{1-11}$$

再将式(1-11)代入式(1-10)得

$$\hat{S}_{\bar{x}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}P_iv_{\bar{x}i}^2/(m-1)\sum_{i=1}^{m}P_i} \tag{1-12}$$

用式(1-12)可由各组测量结果的残差求得加权算术平均值的标准误差，但必须指出，只有当组数 m 足够多时，才能得到较为精确的 $\hat{S}_{\bar{x}}$ 值，一般情况下的组数较少，只能得到近似的估计值。

第二章　回归试验与分析

第一节　概　述

一、问题的提出

回归试验是研究随机现象中变量间关联函数的一种统计试验方法。在工业生产和科学试验中,人们经常会遇到各种变量,它们相互联系,相互依存,相互之间存在着一定的关系,这就需要我们去定量地建立各种变量间的关系式。例如,进行了一组试验以后,我们希望把试验指标与影响这些指标因素的经验公式找出来;在生产过程中积累了大量数据,我们希望把产品的数量或质量指标与各种生产条件之间的定量关系确立起来;在工业生产中新标准的制定、新工艺的探索以及自动控制数学模型的确立等等。所有这些,由于变量间关系的复杂性,由于生产过程和试验过程的随机性,在解决这类问题时,必须用统计的方法。

二、变量间的两种关系

人们通过各种实践,发现变量之间的关系,可以分为两种类型。

1. 确定性的关系

例如,自由落体运动。物体下落的距离 s 与所需的时间 t 之间,就有下列函数关系:

$$s=\frac{1}{2}gt^2=f(t)$$

变量 s 的值,随 t 值而定。也就是说,如果给定了 t 的值,s 值也就完全确定了。反过来,亦然。又如,理想气体,其体积 V、压力 P 与绝对温度 T 之间,也有如下的确定性关系:

$$PV=RT,\qquad P=\frac{R}{V}T$$

其中 R 为常数。变量中这种确定性的关系,我们称它们的函数关系。

2. 相关的关系

这是一类很值得我们注意且研究的重要关系。例如,人的身高与体重之间有一定的关系,但没有一个确定性的联系。一个人的身高并不能确定体重。但是,平均起来,身高者往往体也重。我们就说,身高与体重这两个变量之间具有相关关系。又如,在炼钢时含碳量与冶炼时间之间有一定的关系,但不存在确定性的联系。同一含碳量,在不同的炉次中,冶炼时间常不同。反之,冶炼时间相等的两炉钢,其含碳量一般也不相等。但大量的实践证明,含碳量提高,其熔炼时间大体也要延长。如果我们给定了含碳量,可以大致估计出冶炼时间。但它和函数关系不同,它不能精确地定出熔炼时间。对这种情况,我们就说钢的含量与冶炼时间之间具有相关关系。这种情况所以产生,是因为在炼钢过程中,各种工艺因素的影响是非常复杂的,影响冶炼时间的不单单是含碳量一个因素,还有其他如元素含量、钢水的温度及操作水平等因素。用一个或少数几个变量,希望精确求出多变量中因素影响的结果,是不可能的。在这种情况下,如果我们能多考虑一些变量因素,是会增加所考察因素确定性的程度的。