



中学教育百家讲坛——李志强老师讲数学

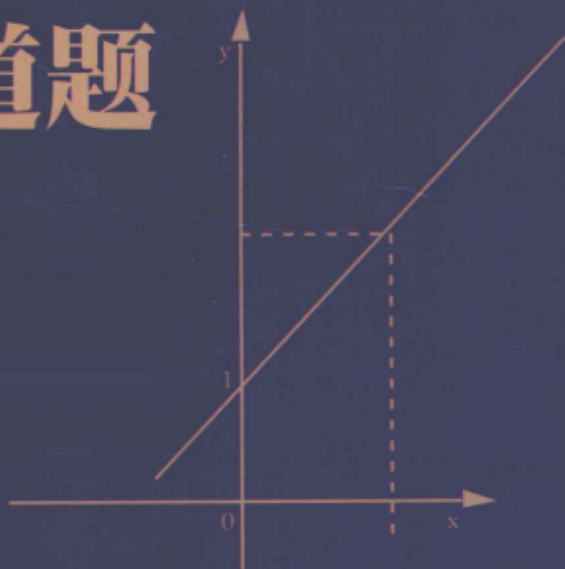
李志强◎编写

高考数学

精在答题法

轻松搞定每道题

- 专题一：向量在高考数学中的应用
- 专题二：直观法在高考数学中的应用
- 专题三：导数在高考数学
- 专题四：推理证明在高考
- 专题五：常规法在高考数学中的应用
- 专题六：解析几何的做题方法



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

高考数学精益答题法

高考数学精益答题法是李志强老师跟踪高考数学30年，潜心研究，总结命题规律，结合高考数学的特点，总结的一套行之有效的答题方法。李志强老师称之为“精益答题法”，其突出特点是思路清晰，准确性高，答题速度快。在高考数学设置既有难度区分，又有速度区分的今天，李志强用他的方法证明了，“just in time”不仅是一个激动人心的口号，更是一个广大中学生人人都能采取的行动。

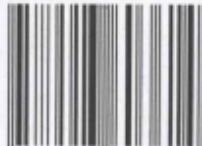
李志强老师的精益答题法教给学生们的的是学会怎样考试，特别是高考数学的考试。只有会考试的同学，其高考成绩才会有保障。精益答题法的精髓是“吃透每道题，抓牢每一分”。要做到这一点，需要对高考数学有个全新的认识，而李志强老师用现代数学思想给同学们做了一系列精彩的解答。

责任编辑：许秀江



上架建议 高考数学

ISBN 978-7-5136-0361-4



9 787513 603614 >

定价：38.00元



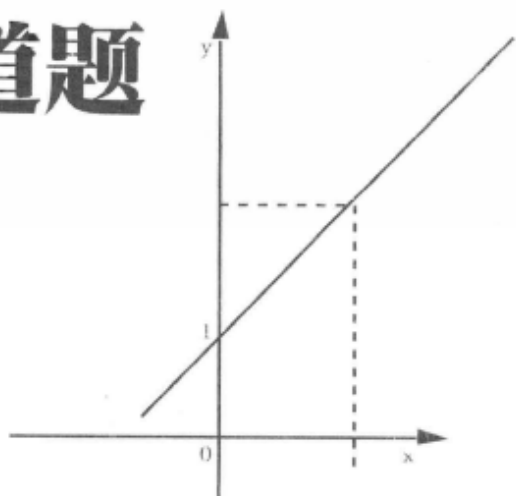
中学教育百家讲坛——李志强老师讲数学

高考数学

精选题法

轻松搞定每道题

- 专题一：向量在高考数学中的应用
- 专题二：直观法在高考数学中的应用
- 专题三：导数在高考
- 专题四：推理证明在
- 专题五：常规法在高考数学中的应用
- 专题六：解析几何的做题方法



中国经济出版社
CHINA ECONOMIC PUBLISHING HOUSE

北京

图书在版编目(CIP)数据

高考数学精益答题法/李志强编写.

北京:中国经济出版社,2010.11

ISBN 978-7-5136-0361-4

I. ①高… II. ①李… III. ①数学课—高中—解题—升学参考资料

IV. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第221638号

图书策划 张兴东

责任编辑 许秀江

责任审读 霍洪涛

责任印制 石星岳

封面设计 任燕飞

出版发行 中国经济出版社

印刷者 三河市佳星印装有限公司

经销者 各地新华书店

开本 787mm×1092mm 1/16

印张 17.75

字数 312千字

版次 2011年1月第1版

印次 2011年1月第1次

书号 ISBN 978-7-5136-0361-4/G·1458

定价 38.00元

中国经济出版社 网址 www.economyph.com 社址 北京市西城区百万庄北街3号 邮编 100037

本版图书如存在印装质量问题,请与本社发行中心联系调换(联系电话:010-68319116)

版权所有 盗版必究(举报电话:010-68359418 010-68319282)

国家版权局反盗版举报中心(举报电话:12390)

服务热线:010-68344225 88386794

出版说明

我们说，考试是一门技术。李志强老师总结的《高考数学精益答题法》就是这样一种专门针对高考数学考试的技术。精益答题法的精髓是“吃透每道题，抓住每一分”。只有这样，高考数学的成绩才会有保障。

要想在高考中脱颖而出，不但要具备丰富的知识，较强的解题能力，更要对考试本身有一个清晰的认识。我们不妨把高考看作是一场题目给定的主题对话。考官问你什么，考生就答什么。谁答得准确，谁就会得高分。高考数学很难拿到高分，很多考生之所以有这样的看法，其根本原因就是没有真正读懂考题。特别是那些压轴题，考生能否准确理解命题人的意图就成了能否得分的关键。

今年高考结束以后，李志强老师给我们做了一个有趣的实验。他用通俗的语言把2010年北京高考数学的最后一道压轴题是什么意思，讲给了一个从没有接触过高中数学的刚上初三的学生，结果这个孩子很快就做出来了。这个孩子并不是人们所说的神童。用李志强老师的话来说，高考数学是用数学语言表达的一种逻辑关系，只要考生读懂了这套语言的准确含义，那么，在这个考生的眼里就不会有难题了。

那么，怎样才能读懂考题呢？最直接的办法就是研究历年的高考真题、谁能在里面看出名堂，找出规律，谁就能在高考数学中稳操胜券。

这里需要特别强调的是，随着新课标的普及，中学数学已经由过去的古典数学的教学过渡到了现代数学的教学。会用数学语言思考、解决问题已成为考生是否具备良好素质和能力的突出标志。体现在高考数学命题上，就是高考数学常考常新，强化了考题本身的内在逻辑。由此一来，过去考生普遍采用的题海战术就失灵了，答题不讲逻辑的“鸟枪法”也就失去了意义。正是在这个时代背景下，我们出版社才特别约请李志强老师把他研究高考数学30多年的心得写出来，与考生们共享。

在本书中，李志强老师对所有的考题，都做出了细致分析，并给出了

最佳解法，其目的就是要让考生能够更深入具体地了解高考数学的特点和规律。细心的考生会发现，李老师给出的解法在很多情况下与其他教辅书上给出的解法有很大不同。这正是精益答题法的优点所在。现在的高考是选拔性考试，考题的设置既有难度区分，又有速度区分。按照李老师给出的方法答题，考生的思路不容易乱，速度也比其他解法快，可以有效地在有限的时间内，把题做对、做完。而这正是广大考生所梦寐以求的。

有位考入清华大学的高考状元说，要提高解题能力，不能光靠做题，比较同一道题的不同解法，也是一个重要的学习内容，有时甚至是一个必不可少的学习环节。尤其是到了高考备考的后期，吸收、借鉴别人的解题方法，特别有助于形成适合自己的一套解题套路。这样才叫融会贯通，到了考场上才会发自如。

我们已经进入了一个精确化的时代，考试本身也变成了一门技术。这种技术体现在命题和应考两个方面。就应考而言，也需要专门的教练指导，教会你考试，你才能拿高分。李志强老师就是这样一位热心的考试教练。他自谦地说：“我只是一个数学题老师。”其实，李老师教给考生的不仅是考试的方法，更是用现代数学的眼光对高考数学的理解。

中国经济出版社

2010年12月

对高考数学的冷思考

——编写精益答题法

人类在进步，社会在进步，科技在进步，数学随着科技的进步，在不断向前发展。现代数学在逐渐取代古典数学，这自然要反映到中学的数学教学中，所以，高考数学中的解法，自然也要由古典数学的解法，走向现代数学的解法。

2010年北京市迎来了新课改后的第一届高考，高考数学仍保持了一贯的风格，不侧重考查复杂的计算和难度极大的解题技巧，而侧重考查学生的基本数学素养和能力。在命题上，体现了新课改的精神，注重学习能力和创新能力的挖掘。

高考数学新课改考查的内涵是：注重考查中学数学的基础知识、基本技能、基本思想方法，考查空间想象能力、抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力、数据处理能力，以及分析问题和解决问题的能力。对数学基础知识的考查，既全面又突出重点，注重学科的内在联系和知识的综合；对数学思想和方法的考查则与数学知识的考查相结合，注重通性通法，淡化特殊技巧。

近几年来，中学数学教育引入了导数、向量、概率，将大学高等数学教育和现代数学基础内容下沉到了中学，并强调实施素质教育和培养学生创新意识和实践能力的要求。因此，高考数学的命题，越来越重视学生思维过程、思维层次、思维容量的考查，强化了能力的考查，淡化了知识的考查。随着教改的深化，随着高考数学命题的深化，对教与学进行深层次的冷思考就变得十分必要。

中学数学教学已经从古典数学发展为现代数学，由此带来一系列新的变化，通过高考数学命题的导向作用，给中学教学带来很多困惑。为了解决这些困惑，我们做的冷思考就是编写精益答题法。精益答题法起到了衔

接中学教学与大学应用的桥梁作用，我的学生们在高考数学应试中取得的理想成绩表明，精益答题法是一种行之有效的学习方法。

在中学数学教学已经从古典数学转向现代数学的今天，研究高考数学，从近几年高考数学试题当中，观察到出题者的心路历程，探索出题者的思维，形成行之有效的解题思路，放弃旧有的成题，研究最新出的真题，归纳、总结、升华，而形成行之有效的解题方法。这正是我们要追求的。

一、通解的追求——点坐标算法

由于计算机的需求，计算机数学得到了迅速的发展。计算机图像处理技术，需要在屏幕上建立三维空间，建立空间直角坐标系，需要确立屏幕上的点坐标，以便绘出各种图形乃至动画，而向量恰是解决这些问题的最好的算法工具。因此立体几何用向量方法解，成了今后发展的必然趋势。因为点坐标只有用向量编制程序，才能进入计算机，而用古典方法是无法编制点坐标程序进入计算机的。用向量做立体几何题的关键是建立空间直角坐标系，利用向量方程确立有难度的点的坐标，形成新的“点坐标算法”，这才是通解。因此，我们应该大力推广：在学习的过程中，随时注意思考“通解的追求”。

鉴于以上的认知，精益答题法在“向量在高考数学中的应用”这个课题中提出了第一个思考：“通解的追求”。在“向量在立体几何中的应用”中提出的通解是：“点坐标算法”；在“向量在选择题、填空题中的应用”中提出的通解是：“代坐结合法”；在“向量在解析几何中的应用”中提出的通解是：“解向转换法”。

追求通解是我们的目的。因为我们希望一种算法的提出，能够尽可能多地适合一些场合。因此，通解的研究是我们要致力的；而所谓巧解，其实是追求过时的古典解法，反而是需要摒弃的。作为通解的研究恰恰是数学发现之所在！

同时我们看到对于学生能力培养的过程，就是启发学生独立创造通解的过程，而摒弃各种所谓巧解的过程，摒弃各种固有的一成不变的思维定式的过程。人类追求的是过程，而不是结果，其乐趣不在于结果而在于过程。我们要培养的是有智慧的人，因此养成思考问题的习惯，形成思维的

方法，反而是我们教学的宗旨。

二、创新的追求——直观思维法

高考数学是选拔性考试，不但考核做题的准确性，还考核做题的速度。现在每年高考数学出 20 个题，8 个选择题、6 个填空题和 6 个解答题。考试时间为 120 分钟。一般来说，若想考到满分 150 分的话，时间分配大致为：前 14 个选填题用时 30 分钟；第 15、16 题用时 10 分钟；第 17、18 题用时 20 分钟；第 19、20 题各用时 30 分钟。也就是说，14 道选择题、填空题，平均每道题只能用 2 分钟！如果每道题，都老老实实在地用常规方法做题，是绝对做不完的。因此，必须用“偷手”做题！

鉴于以上的认知，精益答题法在“直观法在高考数学中的应用”这个课题中提出了第二个思考：“创新的追求”。创新追求“直观思维”的做题方法。在“直观思维法在代数领域选填题中的应用”中，创新追求的是：“排代画图法”；在“直观思维法在几何领域选填题中的应用”中，创新追求的是：“代坐结合法”和“几何特位法”；在“直观思维法在选填题轴题中的应用”中，创新追求的是：“先想后做法”。我们把“排代画图法”、“代坐结合法”、“几何特位法”和“先想后做法”等等统称为“直观思维法”，因他们的特点都是在对理性思维有深刻认识的基础上，而出现的更高一个层次上的感性思维。

感觉到了的东西，不能够立刻理解它，只有理解了的东西，才能更深刻地感觉它。因此，对选择题、填空题要在充分理解的基础上，更深刻地感觉它。人类的思维方式主要有两种：一种是感性思维，一种是理性思维。人类创新意识的形成往往是从感性思维开始的。感性思维又可称之为直观思维，人类与生俱来就有着直观思维的能力，能够通过丰富的形象而做出直观的定性的判断，可以省去严密推理的定量计算，从而形成灵活的解题方式，对解高考数学中选择题和填空题大有裨益，既准确，又能提高解题速度。灵活的解题方式不但针对一个题目能提出多种解法，更主要的是能灵活地思考问题。它包括能正向地思维，能反向地思维，能逻辑地思维，能跳跃地思维，更能时而综合，时而分析，尤其能把风马牛不相及的问题联系在一起思维。

人对于知识的认识，是一个由薄到厚，再由厚到薄的过程。因此，当人对知识已经有了丰富认识的时候，便会产生升华，从而形成高一个层次的感性认识，从而能够通过丰富的形象而做出直观的定性的判断。人，必须具有丰富的想象力，要善于观察，善于联系，从而提出各种方案的可能性，其合理性与不合理性。人，必须具有准确的判断力，在诸多选择中，直观地感觉到正确的结论，做出正确的判断！

三、认知的追求——二次求导法

当牛顿、莱布尼兹发现微积分之后，数学得以飞速的发展，人类对事物做出了全新的认识，爆发工业革命。而微积分的基础是导数，导数的引入，使求解函数的值域得以解决。由于导数的引入，使我们产生了精益答题法的第三个思考：“认知的追求”。

导数解决函数值域问题的核心是将函数分了段，形成诸多的单调区间。关键在于分界点——极值点的确定，极值点左右函数增减性的确定。认知的追求，实现了思维的升华，出现了“二次求导法”。同时，无论函数题，还是几何题，都能形成一个完整的解题思路链：首先建立几何模型：直观看出结论；提出建立代数模型的思路。然后建立代数模型：根据题设和几何模型中的结论，按照函数与方程的思想，构造出方程或不等式组；解方程或不等式组。最后用导数处理方程、不等式而得出结论。这种认知上的追求，使我们解题思路得以升华。另外，极限问题，上下求导做，事半功倍，使我们解题方法也得以升华。

学习数学的过程，实质上是学习方法论的过程，掌握方法才是学习之根本，而能否形成正确的思维，取决于独立地思考。也就是说：必须靠自己憋出来，要善于观察，善于联系。在养成学习习惯的基础上，要随时随地地用自己的语言书写自己的笔记，以便梳理自己的思路，要随时随地地进行知识的迁移，以便归纳总结升华。通过课题去探索它们的一般规律，升华到理论上去认识它，这要靠自己的独立思维。一开始，不管前人是否已经有过总结，都要靠自己思考出来。如果老是这样思考问题，老是靠自己从脑子里掏出来，一旦这种独立思维能力形成，你就真正地具有了自学能力。随时归纳、总结、升华，长此以往，就会形成强大的自学能力，就

能养成举一反三的能力，解决问题时，就有能解决一连串问题的能力。因此学习方法的形成过程就是独立思维能力形成的过程，就是创新意识形成的过程，就是认知升华的过程。

这就是“认知的追求”意义之所在！当把认知追求发挥到极致的时候，我们的学习能力也就培养出来了。

四、完美的追求——推理证明法

近几年来，北京高考数学试题命题保持着平稳，只是在最后一题、最后一问上才翘起了尾巴。说难吧，它不难，但就是看不懂，无从下手。为什么，平时根本就没有过这方面的训练，造成全北京市上十万名的考生，只有很少的个别考生做得出来，给人一种凝重的感觉、一种压抑的感觉。

这种感觉就是：平时强调基本功的训练把握不住度，一通无限制的升级，加大难度，该讲容易了的内容，不往容易处讲；反之，该翘尾巴处，又翘不起来，做不出翘尾巴处的训练。形成一种本该容易的地方不让它容易，本该难的地方又让它难不起来的局面。用学生的话讲，就是：我们复习什么，它不考什么；我们不复习什么，它却考什么。

其实，几年来翘尾巴的这个点就是一个点：数列的推理证明或类似的推理证明。

我们提出精益答题法的第四个思考是：“完美的追求”。试图通过这些翘尾巴题的分析，而形成“翘尾巴”的做题方法，暂起名为“推理证明法”。

推理证明，需要的不是数学公式，而是数学原理，说得更确切一点，是数学背后的哲学原理。特殊性在普遍性之中，小道理在大道理之内，反面都不存在，只好正面存在，甲大于等于乙，乙又大于等于甲，甲只好等于乙，等等。这些在哲学中极普通的道理，恰恰是数学原理，是推理证明的依据。再有就是对数学语言的理解，平时加强训练，将自己看不懂的数学语言叙述，变成自己看得懂的数学符号，或是文字叙述。由于最后一题，考核的不是计算，而是思维能力。因此，当你看明白题目的时候，难题就变成了容易题，反而很容易作出。

数学的教与学有着四个环节：扎实的基础、熟练的技巧、直观的思维、

逻辑的推理。现在的教学注重了扎实的基础、熟练的技巧的教与学，对能力的培养、思维习惯的培养略显苍白。其实对能力的培养，主要在后两点。直观的思维就是感性思维，是人类接触课题后的第一反应。逻辑的推理就是理性思维，是在感性思维的基础上，进行逻辑推理后而产生的认知上的飞跃。

我们以等差数列为例：等差数列是基础数列，前人经过研究形成了等差数列的理论，提出了等差数列的通项公式和求和公式。而现行教学的方法，使学生形成了套公式做题的思维定式。往深了讲，只是按照“技巧”这条思路往下走，且跳不出这个圈子，形成了一种倒着认知事物的怪圈。应该跳出这个圈子，还我历史的本来面目。不要只在“扎实的基础、熟练的技巧”上打转，而应回到能力的学习上去。先做感性认识，再做理性认识。如果我们平时把普通的套公式做的题，都变成用推理证明方式做的题，进行推理证明题的训练。恐怕学生遇到必须用推理证明的题，就都会做了吧！

在提出素质教育的今天。我们不能把眼睛只盯在套公式做题阶段。也不能只强调“技巧”，做技巧性强的难题，而认为是提高了学生的学习能力。我们认为应该把眼界放宽一点，多从逻辑推理方面去做题。这是一个美好的愿望，是一种完美的追求。

五、夯实的追求——常规做题法

我们的不完美之处在于，上述我们只是在高考数学四个前沿领域中展开了学习，而高考数学的很多基础领域我们却没有涉及。作为高考数学的一些基础领域我们现在展开讨论：这些领域是高考数学必须要掌握的一些基础知识，我们是在使用常规的方法做题，我们是在使用前人已经总结出来的公式、定理的基础之上做题，是理性思维的做题，是在“扎实的基础，熟练的技巧”的基础之上做题。而且，高考数学这部分所出的题目，是容易题，是志在必得的题，我们必须拿下。因此，我们要总结、归纳、升华常规做题的方法，所以我们要作“夯实的追求”，在选填题中，在三角题中，在概率题中，在函数题中，在一切高考数学涉及的领域中做常规做题法的升华，并提出了一些行之有效的做题方法，这就是我们做的“夯实的

追求”。

六、争夺的追求——解析做题法

解析几何的解答题在理科一般出在第19题，而文科有时是第19题，有时是第20题。解析几何题是难题，是能不能考入一类大本的分水岭。因此，引起了学生们的高度重视。为此我们做了深入的学习，形成一种“解析做题法”。

高考数学是能力的考试，是决定学生能上哪一类层次大学的考试。所以高考数学出的题分为了四类，一类是容易题，为1到6号题，9到12号题和15号题，共计63分。一类是中等题，为7号题，13号题和16到18号题，共计50分。一类是难题，为8号题，14号题和19题，共计23分或24分。一类是翘尾巴题，为20号题，计13分或14分。一般的来说：只要做出来全部容易题，可以讲，已经达到了基本要求，因此有大学上。再做得上一部分中等题，就能上二类大本。显然，如果再能做出一部分难题，上一类大本就有保障了。因此，能不能做得了一部分难题，成为了学生们关注的焦点。因此，解析几何题能不能做得上来，是关键争夺！所以深入学习解析几何题的做法势在必行！

能否完成这种追求，我们认为最行之有效的方法是培养学生的自学能力，让学生学会自己学习。培养学生的观察问题、思维问题、解决问题的能力。因此，我们绝不能采用题海战术、填鸭式的教学方式，而是要采用启发式教学，更要教会学生如何思考问题、如何建立数学模型、如何进行逻辑推理、如何提出自己的算法。久而久之，让学生养成一种习惯，总是用自己的语言编写自己的笔记，不断地总结、归纳、升华自己的已学知识。长此以往，我们自己的新一代学者就会树立于世界民族之林！

七、学习方法的形成和学习习惯的养成

综上所述，显然摆在我们面前的首要课题就是如何学习？我们认为在这个课题上，要从两个方面着手：一个是学习方法的形成，一个是学习习惯的养成。

首先，我们谈学习方法的形成，可从四个方面入手：

1. 扎实的基础：这是基本功，要扎实地牢记基本的数学公式和基本的

数学概念。

2. 熟练的技巧：熟练地掌握各种不同类型题目的解题技巧。

3. 灵活的思路：由几何模型走向代数模型，提出灵活的解题思路。

4. 开阔的视野：一个题做十遍，总结、归纳、升华，才能站得高，看得远。

其次，我们谈学习习惯的养成，也可从四个方面入手：

1. 学会放弃，学会追求：按照高考数学的要求，该放弃的放弃，该追求的追求。

2. 用自己的语言，书写自己的笔记：课后，一定要用自己的语言整理自己的笔记。

3. 归纳、总结、升华：随时梳理自己的思想，形成高一层次的认识。

4. 做事后诸葛亮：平时，考前不复习，考后反而认真学习自己不会的地方。只有一次做事前诸葛亮，那就是高考，在考前将自己的笔记在归纳、总结、升华的基础上，集大成，从而脑海中形成强大的基础力量，笑迎高考，以逸待劳，后发制人，谁笑到最后，才是谁笑得最好。

以上，是作者对如何学习的一点浅薄的认识，因篇幅关系，这里不宜展开，以后找机会再说吧。

在这里，作者对中国经济出版社表示感谢，对许秀江博士表示感谢，能使自己的一点肤浅之见，得以和大家见面，望请不吝赐教。

作者签名

2010年11月15日



目录

CONTENTS



对高考数学的冷思考——编写精益答题法 / 001

- 一、 通解的追求——点坐标算法 / 002
- 二、 创新的追求——直观思维法 / 003
- 三、 认知的追求——二次求导法 / 004
- 四、 完美的追求——推理证明法 / 005
- 五、 夯实的追求——常规做题法 / 006
- 六、 争夺的追求——解析做题法 / 007
- 七、 学习方法的形成和学习习惯的养成 / 007

第一部分 向量在高考数学中的应用 / 001

- 第一章 向量在立体几何中的应用 / 003
- 第二章 向量在选填空题、填空题中的应用 / 022
- 第三章 向量在解析几何中的应用 / 029

第二部分 直观法在高考数学中的应用 / 041

- 第一章 直观思维法在代数领域选填空题中的应用 / 043
- 第二章 直观思维法在几何领域选填空题中的应用 / 054
- 第三章 直观思维法在选填空题轴题中的应用 / 061

第三部分 导数在高考数学中的应用 / 071

- 第一章 导数在导数题中的应用 / 073

第二章 导数在函数中的应用 / 080

第三章 导数在解析几何中的应用 / 085

第四部分 推理证明在高考数学中的应用 / 095

第一章 数列 / 097

第二章 推理证明 / 110

第三章 最后一题 / 138

第五部分 常规法在高考数学中的应用 / 147

第一章 常规法在选填题中的应用 / 149

第二章 常规法在三角题中的应用 / 164

第三章 常规法在概率题中的应用 / 172

第四章 常规法在函数题中的应用 / 187

第六部分 解析几何的做题方法 / 205

第一章 解析几何总论 / 207

第二章 求取已知曲线的方程 / 218

第三章 求取未知曲线的方程——轨迹 / 223

第四章 定点、定值及存在性的证明 / 236

第五章 参数取值范围和最值 / 243

第六章 从 2009 年模拟看解析几何的学习 / 250

跋 高考数学压轴题的秘密 / 261

第一部分

PART 1

向量在高考数学中的应用

在“向量在高考数学中的应用”这个课题中我们提出了一些通解的解法。在第一章“向量在立体几何中的应用”中提出的通解是：“点坐标算法”；在第二章“向量在选择题、填空题的应用”中提出的通解是：“代坐结合法”；在第三章“向量在解析几何中的应用”中提出的通解是：“解向转换法”。

追求通解是我们的目的。因为我们希望一种算法的提出，希望它尽可能地多适合一些场合。同时我们看到对于学生能力培养的过程，就是启发学生独立创造通解的过程，而摒弃各种所谓巧解的过程，摒弃各种固有的一成不变的思维定式的过程。人类追求的是过程，而不是结果，其乐趣不在于结果而在于过程。