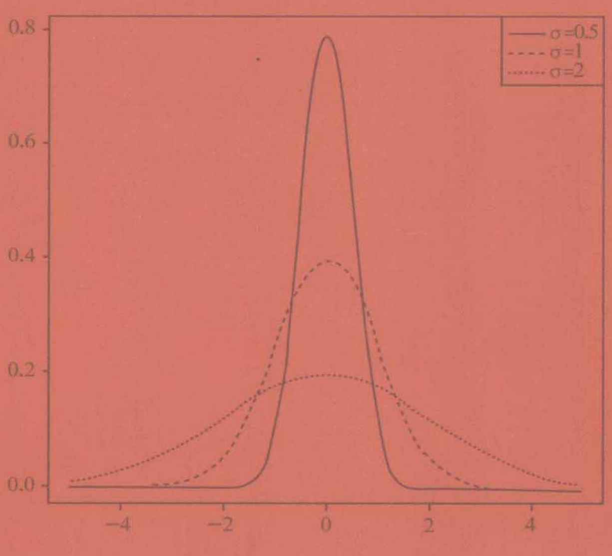
中国精算师资格考试用书

数学

MATHEMATICS

中国精算师协会　组编



中国财政经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学/肖宇谷主编．—北京：中国财政经济出版社，2010．11

中国精算师资格考试用书

ISBN 978－7－5095－2546－3

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①肖…　Ⅲ．①高等数学－资格考核－自学参考资料

Ⅳ．①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 199438 号

责任编辑：张　铮　　　责任校对：胡永立

封面设计：耕者设计　　版式设计：兰　波

中国财政经济出版社出版

URL：http://www.cfeph.cn

E－mail：cfeph@cfeph.cn

社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码：100142

发行处电话：88190406　财经书店电话：64033436

北京财经印刷厂印刷　　各地新华书店经销

787×1092 毫米　16 开　22 印张　524 000 字

2010 年11月第 1 版　2010 年11月北京第 1 次印刷

定价：48.00 元

ISBN 978－7－5095－2546－3/O·0027

（图书出现印装问题，本社负责调换）

本社质量投诉电话：010－88190744

中国精算师资格考试教材

编审委员会

总　　序

ZONGXU

精算起源于保险业，是保险公司经营不可或缺的核心技术之一。保险公司只有运用精算技术进行保险产品定价、准备金评估、风险管理等，才能在科学基础上实现保险业务的稳健经营，有效防范风险。

我们常说的精算，包括三个方面，即：精算理论技术、精算规则和精算师资格认证。

精算理论是对保险业务经营中各种不确定因素和风险规律的认识，精算技术以精算理论为指导，是精算工作中对各种不确定因素和风险进行识别、评估、定价、处置等所采用的方法、技术，包括所使用的数学模型、数学工具等。随着保险业经营实践的发展和人们认识的深化，精算理论技术也在不断发展。精算理论技术属于学术研究的范畴，可以存在不同的观点和流派，各种不同观点和流派之间的讨论、交流，可以促进精算理论技术的发展。

精算规则，是保险监管机关制定或认可的关于精算工作应当遵循、遵守或采用的原则、方法、标准、制度等规范。制定精算规则，以精算理论技术为基础，又要综合考虑一定时期的经济环境、保险业发展状况和风险特征、精算技术力量、监管政策的要求等多种因素。

精算工作需要专业人员从事，精算师就是具备精算的知识、技能，从事精算工作的专业技术人员。虽然精算师的从业范围不限于保险业，但主要还是在保险及相关行业就职（如对保险公司的精算报告进行审核的会计师事务所，为保险公司服务的精算咨询公司等）。在保险公司中，精算师责任重大。因此，必须经过资格认证，才能担任精算师（如同律师、注册会计师需要资格认证）。在国外，精算师资格的取得一般有两种方式：一种是通过专业资格考试取得，另一种是经过学历教育后取得，但主流是通过考试取得。在发达国家，精算师有自己的专业团体——精算师协会，一般由精算师协会组织资格考试，对通过考试的人授予精算师资格。

精算理论技术、精算规则、精算师资格认证三者相互联系，密不可分：精算理论技术是基础，制定精算规则、考试认证精算师，均以精算理论技术为基础，精算规则是精算师从事精算实务的直接依据。

我国自1980年恢复办理国内保险业务之后，曾长期缺乏精算专业人才，既没有制定精算规则，也没有建立自己的精算师资格考试认证制度。1988年南开大学在北美精算协会的支持下开办精算专业教育，此后国内又有多所大学开办精算专业教育，培养了一批精算人才。由于当时中国没有精算师资格认证制度，这些国内学习精算的人员主要是考取北美和英国等国外的精算师资格。1992年，国内的保险市场对外开放，外资保险公司进入国内市场，一些具有国外资格的精算师到国内工作。

1995年颁布并施行的《中华人民共和国保险法》中，要求寿险公司必须聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度。《保险法》首先要求寿险公司聘用精算师、建立精算报告制度，是因为：第一，精算起源于寿险业务经营，精算技术在寿险业的应用较为成熟；第二，寿险业务期限长，风险更具隐蔽性，对精算技术的运用更为迫切和重要，第三，在精算专业人员严重不足、精算规则空白的条件下，同时要求寿险业和非寿险业聘用精算专业人员、建立精算报告制度，难以实现。

为此，当时的保险监管部门——中国人民银行保险司于1997年10月启动了“中国精算制度建设”研究项目，决定建立中国的精算师资格考试认证制度，并逐步制定精算规则。中国的精算师资格考试认证制度，主要借鉴北美精算协会的考试体系，把精算师资格分为准精算师和精算师两个阶段，分别设立考试课程，通过准精算师考试课程的，授予准精算师资格，在获得准精算师资格基础上，再通过精算师资格考试的课程，授予精算师资格。在课程设置、考试内容、难度等方面，均力求达到与发达国家的精算师考试相当的水平。在制度设计、拟定考试大纲、教材编写过程中，得到国际精算团体的大力支持和帮助。1998年11月，中国保监会成立之后，继续推进精算制度建设。2000年，中国精算师资格考试开考，与此配套的教材也陆续出版发行。中国保监会1999年发布了关于寿险公司的精算规定，建立了寿险公司精算规则体系的基本框架。

2002年10月《保险法》进行了第一次修改，于2003年1月1日起施行。修改后的《保险法》把聘用经金融监管部门认可的精算专业人员，建立精算报告制度的要求扩大到非寿险公司。因此，经过论证、筹备后，自2004年开始进行非寿险精算师的资格考试认证，称为中国精算师（非寿险方向），与此相适应，以前的精算师则称为中国精算师（寿险方向）。同时关于非寿险精算的规则也由中国保监会陆续制定发布。

2007年，中国精算师协会成立，组织精算师资格考试是协会的重要职能之一。协会设立了考试教育委员会，负责精算师资格考试和后续教育事宜（此前是由中国保险行业协会的精算工作委员会负责精算师资格考试）。

中国精算师资格考试施行10年来，通过考试认证了一批中国精算师和

中国准精算师，取得了一定成绩，积累了一定经验。目前已在北京、上海、天津、广州等15个城市设立了考试中心，并在香港、加拿大滑铁卢大学设立了2个海外考试中心，每年春秋两季举办考试。

随着国内保险市场的发育、精算技术的发展及国际精算界的变革，原有的考试体系已不完全适应。为此，中国精算师协会于2009年决定对中国精算师资格考试认证体系进行调整，并于2011年实施。调整的基本内容是：精算师资格考试仍分为准精算师和精算师两个阶段；在准精算师阶段，不再区分方向，对原寿险和非寿险两个方向的考试课程进行整合，考生通过8门必考的准精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国准精算师资格；精算师则继续分为寿险和非寿险两个方向，有3年以上工作经历的准精算师，通过5门精算师考试课程，并经过职业道德培训后，可获得中国精算师（寿险方向）或中国精算师（非寿险方向）的资格，5门精算师考试课程，既有必考的，也有选考的，具体科目，因寿险和非寿险方向有所不同。

对于在旧考试体系下已经通过的考试科目，如何转换为新考试体系的相应科目，也进行了研究，制定了转换规则。

为编写新考试体系的教材，中国精算师协会成立了教材编审委员会。教材编写力图贯彻国际性、先进性和实用性三个原则。国际性是指，鉴于中国精算师协会已正式申请加入国际精算师协会，因此精算师资格考试必须符合国际精算师协会的要求，达到国际精算师协会的标准。所以，在课程设置、课程内容、必考科目等方面，均以国际精算师协会的要求为标准。先进性是指，尽可能把精算理论技术的最新成果包括在这套教材之中。实用性是指，教材内容紧密联系国内保险业的实际，考虑国内精算人员需要掌握的知识和技能。

教材的具体编写实行主编负责制。教材编审委员会研究、协调、决定教材编写中的重大事项，确定各门课程的主编和主审人员，指定协调人对若干相关课程的内容调整、取舍和进度进行协调。教材初稿完成后，不仅由主审进行审阅，而且组织保险公司的相关人员进行试读，提出修改意见。教材的主编、主审、试读人员，都是在保险业、精算界具有业务专长、经验较为丰富、具有一定影响力的人员。可以说，这套教材的编写，是集中了行业的智慧和力量，凝结着组织协调人员、编审人员、试读人员的心血。

尽管如此，我们仍不认为这套教材已经尽善尽美。由于经验不足、认识水平有限，也由于时间仓促，教材在某些方面还显粗糙，还存在许多可改进、待完善之处。我们希望在教材投入使用之后，听取专家、考生和社会各界人士的意见，将来进一步修订。

回顾中国精算师资格考试10年来的历程，是在保险监管机关的领导

下，在保险业、有关高等院校及社会各界的积极参与下，在国际精算组织的支持下，不断发展、完善，取得进步的。在此，我谨代表中国精算师协会，对多年来关心、支持、参与、帮助中国精算事业发展的有关领导、专家和广大的精算专业人员表示真诚的敬意和感谢！

中国精算师协会　会长

2010 年 11 月 15 日

编写说明

BIAN XIE SHUO MING

本书为精算和风险管理中的随机数学基础，通过本书的学习，让读者能够掌握基本的概率统计知识，具备基本的数据分析能力，初步了解各种随机过程的性质，为后续课程的学习建立扎实的数理基础。

本书包含了国际精算师协会（IAA）课程 C2（Probability and Mathematical Statistics）大纲中的全部内容和 C6（Statistical Methods）大纲中的统计模型和随机过程，即包含了概率论、数理统计、应用时间序列和应用随机过程在精算和风险管理中最基础的内容。由于涉及内容较多，本书不可能像专著那样把每个领域都讲得很详细，但尽可能地将该领域在精算和风险管理中最基础、最常用的部分讲清楚。

本书由三个部分组成：第一部分为概率论（1～4 章），但削弱了大数定律和中心极限定理的理论要求；第二部分为统计模型（5～9 章），包含参数估计、假设检验、方差分析、一维线性回归分析和应用时间序列；第三部分为应用随机过程（10～12 章），包含常用的随机过程和随机微积分。本书第一章至第四章、第十章至第十二章由肖宇谷（中国人民大学）编写，第五章至第九章由王燕（中国人民大学）编写。

本书属于随机数学的基础读物，适合具有微积分基础、有志于精算和风险管理行业的读者学习和参考。

鉴于作者水平有限，书中肯定存在很多不足，敬请批评指正。

目　录

第一章　随机事件与概率

学习目标

- □ 掌握样本空间、事件与概率的概念
- □ 掌握事件的运算及概率的性质
- □ 熟悉古典概率最基本的计算方法
- □ 掌握条件概率、全概率公式和贝叶斯公式的计算与应用
- □ 掌握事件的独立性，并熟悉与之有关的概率计算

§1.1　随机事件及其运算

随机数学包括概率论、数理统计和随机过程，是研究和揭示随机现象的统计规律性的数学学科，是风险管理和精算的基础。

随机事件与概率是概率论与数理统计中最基本的概念，本章将介绍随机事件、概率的概念和性质，给出在不同条件下随机事件的概率计算公式，并对相互独立的随机事件进行专门讨论。

1.1.1　随机试验与样本空间

先来看看概率的直观背景。

概率是建立在随机试验的基础上的，我们把对某个感兴趣对象的观察过程称为试验，若事先无法预知将要出现的结果，则称这样的试验为随机试验，通常用 E 表示。通常要求随机试验在相同的条件下可以重复进行。

虽然我们不能预知会出现什么结果，但随机试验的所有可能出现的结果应该是已知的。研究任何一个随机试验，首要任务就是要弄清楚该试验的所有可能发生的结果，而每一个可能的结果被称为**随机试验 E 的样本点或基本事件**，记为 ω。全体样本点所构成的集合称为**样本空间**，通常用 Ω 表示。Ω 可以是有限集，也可以是无限集。

应该指出，这里所说的可能出现的结果将依赖于人们所关心的问题与所使用的解决问题的方法。因此样本空间的选择不是唯一的。

以下是一些例子。

【例 1－1】　如果试验是抛掷一枚硬币，那么

$$\Omega = \{H, T\}$$

此处 H 表示抛掷的结果是正面(Head)，而 T 表示抛掷的结果是反面(Tail)。

【例 1-2】 如果试验是掷一颗骰子，那么样本空间是

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

此处的结果 i 表示骰子掷出的点数是 i，$i=1,2,3,4,5,6$

【例 1-3】 如果试验是抛掷两枚硬币，那么样本空间由以下 4 个点组成

$$\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

如果两枚硬币都出现正面，结果就是(H,H)。如果第一枚硬币出现正面，且第二枚硬币出现反面，结果就是(H,T)。如果第一枚硬币出现反面，且第二枚硬币出现正面，结果就是(T,H)。如果两枚硬币都出现反面，结果就是(T,T)。

【例 1-4】 如果试验是掷两颗骰子，那么样本空间由下列 36 个点组成

$$\Omega=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{matrix}\right\}$$

其中 $(i,\ j)$ 表示第一颗骰子掷出 i，且第二颗骰子掷出 j。

【例 1-5】 如果试验是测量一辆汽车的车龄，那么样本空间由所有的非负实数构成，即

$$\Omega=[0,\ +\infty)$$

1.1.2 随机事件

当我们通过随机试验来研究随机现象时，常常不是关心某一个样本点在试验后是否出现，而是关心满足某些条件的样本点在试验后是否出现。例如，在例 1-5 中，假定车龄超过 5 年便认为需要大修。这时，我们关心的就是试验结果是否大于 5，满足这一条件的样本点组成了样本空间的一个子集。我们称一个随机试验的样本空间的子集为随机事件，简称为**事件**。随机事件通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示。仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**。在例 1-1 中，有两个基本事件 {正面}、{反面}；在例1-5 中，有无限多个基本事件。

在试验后，如果出现随机事件 A 中所包含的某个样本点，那么，称**事件 A 发生**；否则，就称**事件 A 不发生**。在例 1-5 中，设 A 表示“车龄超过 5 年”，在试验后事件 A 可能发生，也可能不发生。如果试验结果是 6.5

年，那么，就认为事件 A 发生。又如在例 1-2 中，设 A 表示“掷出的点数为偶数”，在试验后如果掷出的点数是 3，则事件 A 没有发生。如果掷出的点数是 6，则事件 A 发生。

样本空间 Ω 是其自身的一个子集，因而也是一个事件。由于样本空间 Ω 包含所有的样本点，因此，每次试验后，必定有 Ω 中的一个样本点出现，即 Ω 必然发生，称 Ω 为**必然事件**。空集 $\varnothing$ 永远是样本空间的一个子集，因而也是一个事件。由于空集 $\varnothing$ 不包含任何一个样本点，因此每次试验后 $\varnothing$ 必定不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**。必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是两个特殊的随机事件。

1.1.3　事件间的关系与运算

概率论着重研究随机事件发生的规律，对于较复杂的事件，希望能用若干简单的事件去表示，为此，需要研究事件之间的关系和运算。现在我们是用集合的语言来描述随机试验和随机事件，事件之间的关系与运算自然和集合之间的关系与运算是一致的，也有交、并、补等运算，不过它们在概率论中另有特殊的含义。对事件间的关系和运算的理解，不仅要从集合的角度理解，更重要的是从“事件的发生”这一概率论的角度去理解。

以下设随机试验的样本空间为 Ω，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集。

1. 事件的包含关系。若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。此时 A 是 B 的子集。

【例 1-6】　掷一枚均匀的骰子，设 $A=\{$掷出 6 点$\}$，$B=\{$掷出的点数为偶数$\}$，则事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，故事件 B 包含事件 A，即 $A\subset B$。从集合的角度看，B 中的元素（样本点）显然包含了 A 中的元素（样本点）。

2. 事件相等或等价。当事件 B 包含事件 A 且事件 A 也包含事件 B 时，称事件 A 与事件 B 相等（等价），记为 $A=B$。

【例 1-7】　在例 1-6 中，设事件 $C=\{$掷出的点数最大$\}$，则有 $A=C$。

3. 对立事件。对于事件 A，由所有不包含在 A 中的样本点所组成的事件称为事件 A 的对立事件或逆事件，记为 $\overline{A}$，$\overline{A}$ 发生等价于 A 不发生。显然，若 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，则 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，即 $\overline{\overline{A}}=A$。

【例 1-8】　抛一枚均匀的骰子，设 $A=\{$出现奇数点$\}$，$B=\{$出现偶数点$\}$，则事件 A 与事件 B 互为对立事件，即 $A=\overline{B}$，$B=\overline{A}$。

4. 事件的并。“两事件 A 与 B 中至少有一件发生”这一事件称为事件 A 与 B 的并，记为 $A\cup B$，也即 $A\cup B$ 发生等价于 A 发生或者 B 发生或者两者都发生。

推广到任意 n 个事件："n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一件发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

【例 1-9】 还是在抛骰子的随机试验中，设 $A_i=\{$出现 i 点$\}(i=1,2,\cdots,6)$，$B=\{$出现偶数点$\}$，则事件 B 为事件 A_2，A_4，A_6 的并，即$B=A_2\cup A_4\cup A_6$。

5. *事件的交*。"两事件 A 与 B 都发生"这一事件称为事件 A 与 B 的交，记为 $A\cap B$ 或 AB。也即 AB 发生等价于 A 发生而且 B 发生。

推广到任意 n 个事件："n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生"这一事件称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$。

【例 1-10】 在抛骰子的随机试验中，设 $A=\{$掷出的点数为 5$\}$，$B=\{$掷出的点数大于 3$\}$，$C=\{$掷出的点数为奇数$\}$，则事件 A 发生等价于事件 B 与 C 都发生，即 $A=BC$。

6. *事件的差*。即集合的差，记为 $A-B$，表示去掉 A 中 A 与 B 相交的部分，故也可表示为 $A-AB$。$A-B$ 发生等价于 A 发生而 B 不发生。

【例 1-11】 在例 1-6 中，设事件 $C=\{$掷出的点数为 2 或 4$\}$，则 C 发生等价于 B 发生而 A 不发生，即 $C=B-A$。

7. *事件的互不相容（互斥）*。若两事件 A 与 B 不可能同时发生，也就是说它们没有共同的样本点，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的（或互斥的）。这时事件 A 与 B 的并可以表示为 $A+B$。

【例 1-12】 一袋中有分别编号为 $1,2,\cdots,10$ 的 10 个球，现从中任取一球，设 $A=\{$取到 5 号球$\}$，$B=\{$取到编号是偶数的球$\}$，则事件 A 与事件 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$。

最后我们将事件满足的运算律列出，因为与集合的运算律完全一样，这里不再证明了。

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$

（2）结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

（3）分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

（4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

对偶律又称为德·摩根律，是事件的并与事件的交互相转换的重要公式，可推广到任意 n 个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

即若干个事件的并的对立事件为各事件的对立事件的交，若干个事件的交的对立事件为各事件的对立事件的并。

【例 1－13】　设有三个人各购买了一注福利彩票，以 A 表示“第一个人中奖”，B 表示“第二个人中奖”，C 表示“第三个人中奖”，试用 A，B，C 表示下列事件：

（1）至少有一个人中奖；

（2）恰有一个人中奖；

（3）至多有一个人中奖。

解：（1）$A\cup B\cup C$；

（2）恰有一个人中奖是指其中有一个人中奖而另外两个人没中奖，即

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C;$$

（3）至多有一个人中奖是指没有人中奖或恰有一个人中奖，即

$$A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

§1.2　概率的定义及其性质

1.2.1　频率稳定性

人们经过长期的实践发现，虽然个别随机事件在某次试验或观察中可以出现也可以不出现，但在大量试验中它却呈现出明显的规律性——**频率稳定性**。

对于随机事件 A，若在 n 次试验中出现了 k 次，则称

$$f_n(A)=\frac{k}{n}$$

为随机事件 A 在 n 次试验中出现的频率。

下面是关于频率稳定性的几个著名的例子。

在掷一枚硬币时，既可能出现正面，也可能出现反面，预先作出确定的判断是不可能的，但是假如硬币均匀，客观上出现正面与出现反面的机会应该相等，即在大量试验中出现正面的频率，应接近于 50%，为了验证这点，历史上曾有不少人做过这个试验。

同样，如果多次测量同一物体，其结果虽略有差异，但当测量次数增加时，就会越来越清楚地呈现出一些规律性：测量值的平均值在某固定常数附近波动，诸测量值在此常数两旁的分布呈现某种对称性。以射击为例，当射击次数不多时，炮弹的弹落点似乎是前后左右杂乱无章，看不出什么明显的规律；但当射击次数增加时，弹落点的分布就会呈现出一定的规律性：如弹落点关于目标的分布略呈对称性，偏离目标远的弹落点比偏离目标近的弹落点少等。其他如灯泡寿命等，在进行多次观察或试验后，也都

可以发现类似的规律性。

大量试验证实，当重复试验的次数 n 逐渐增大时，频率 $f_n(A)$ 呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数。这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性。重复多次进行试验，计算频率 $f_n(A)$，以它来表征事件 A 发生可能性的大小是合适的。

但是在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得事件的频率，用以表征事件发生可能性的大小。同时，为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义。

1.2.2 概率

定义 1-1　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间。对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为**事件 A 的概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

（1）非负性：对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

（2）规范性：对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$；

（3）可列可加性：设 A_1，A_2，…是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…，有：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-1}$$

在第四章中将证明，当 $n\to\infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$。基于这一事实，我们就有理由将概率 $P(A)$ 用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质。

定理 1-1　不可能事件 $\varnothing$ 的概率为 0，$P(\varnothing)=0$。

证： 令 $A_n=\varnothing$（$n=1$，2，…），则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1$，2，…. 由概率的可列可加性（1-1）得：

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

由概率的非负性知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$。

定理 1-2（有限可加性）　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) \tag{1-2}$$

式（1-2）称为**概率的有限可加性**。

证： 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$，即有 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，i，$j=1,2,\cdots$. 由（1-1）得：

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$