

“十一五”国家重点图书出版规划项目

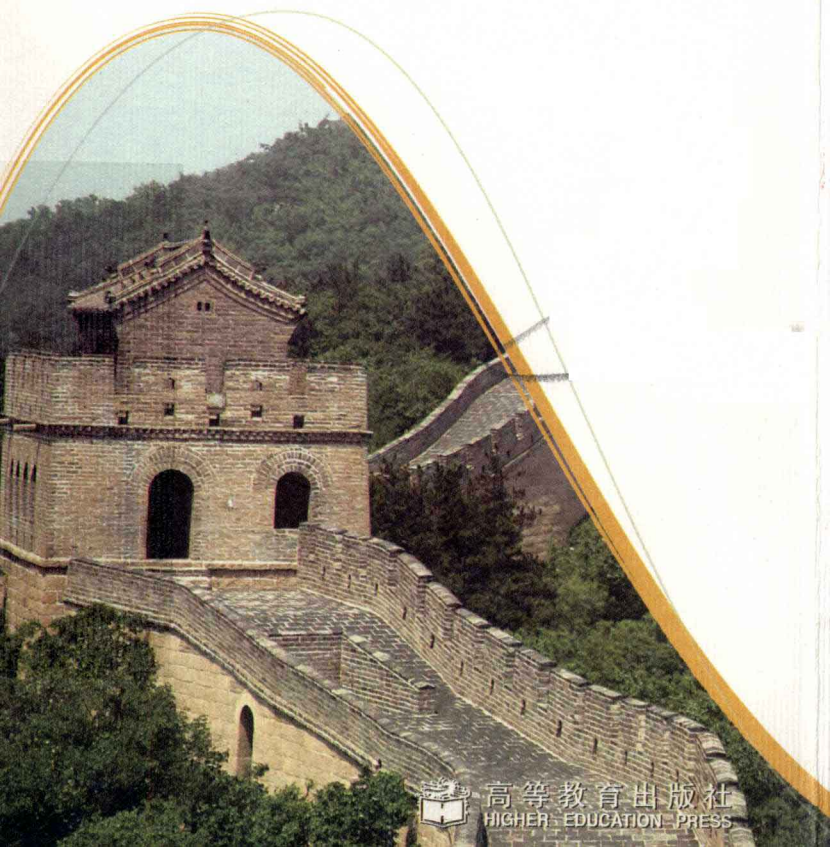
13

□ 数学文化小丛书


李大潜 主编

# 笛卡儿之梦

○ 李文林



高等教育出版社  
HIGHER EDUCATION PRESS



“十一五”国家重点图书出版规划项目

数学文化小丛书

李大潜 主编

# 笛卡儿之梦

Descartes zhi Meng

李文林



高等教育出版社·北京  
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

## 图书在版编目(CIP)数据

笛卡儿之梦/李文林编. —北京: 高等教育出版社, 2011.3

(数学文化小丛书/李大潜主编.)

ISBN 978-7-04-031412-0

I. ①笛… II. ①李… III. ①解析几何-普及读物 IV. ①O182-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第015538号

策划编辑	李蕊	责任编辑	张耀明
封面设计	张楠	责任绘图	尹文军
版式设计	王艳红	责任校对	王效珍
责任印制	张福涛		

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
			<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	<a href="http://www.landracom.com">http://www.landracom.com</a>
			<a href="http://www.landracom.cn">http://www.landracom.cn</a>
印 刷	北京奥鑫印刷厂	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
开 本	787×960 1/32	版 次	2011年3月第1版
印 张	2.125	印 次	2011年3月第1次印刷
字 数	35 000	定 价	6.00元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请在所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 31412-00

# 数学文化小丛书编委会

- 顾 问：谷超豪（复旦大学）  
项武义（美国加州大学伯克利分校）  
姜伯驹（北京大学）  
齐民友（武汉大学）  
王梓坤（北京师范大学）
- 主 编：李大潜（复旦大学）
- 副主编：王培甫（河北师范大学）  
周明儒（徐州师范大学）  
李文林（中国科学院数学与系统科学研究所）
- 编辑工作室成员：赵秀恒（河北经贸大学）  
王彦英（河北师范大学）  
张惠英（石家庄市教育科学研究所）  
杨桂华（河北经贸大学）  
周春莲（复旦大学）

本书责任编辑：杨桂华

# 数学文化小丛书总序

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的。数学不仅是一种精确的语言和工具、一门博大精深并应用广泛的科学，而且更是一种先进的文化。它在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，是人类文明的一个重要支柱。

要学好数学，不等于拼命做习题、背公式，而是要着重领会数学的思想方法和精神实质，了解数学在人类文明发展中所起的关键作用，自觉地接受数学文化的熏陶。只有这样，才能从根本上体现素质教育的要求，并为全民族思想文化素质的提高夯实基础。

鉴于目前充分认识到这一点的人还不多，更远未引起各方面足够的重视，很有必要在较大的范围内大力进行宣传、引导工作。本丛书正是在这样的背景下，本着弘扬和普及数学文化的宗旨而编辑出版的。

为了使包括中学生在内的广大读者都能有所收益，本丛书将着力精选那些对人类文明的发展起过重要作用、在深化人类对世界的认识或推动人类对世界的改造方面有某种里程碑意义的主题，由学有

专长的学者执笔，抓住主要的线索和本质的内容，由浅入深并简明生动地向读者介绍数学文化的丰富内涵、数学文化史诗中一些重要的篇章以及古今中外一些著名数学家的优秀品质及历史功绩等内容。每个专题篇幅不长，并相对独立，以易于阅读、便于携带且尽可能降低书价为原则，有的专题单独成册，有些专题则联合成册。

希望广大读者能通过阅读这套丛书，走近数学、品味数学和理解数学，充分感受数学文化的魅力和作用，进一步打开视野，启迪心智，在今后的学习与工作中取得更出色的成绩。

李大潜

2005年12月

## 郑 重 声 明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

**反盗版举报电话：**(010) 58581897/58581896/

58581879

**传 真：**(010) 82086060

**E - mail：**dd@hep.com.cn

**通信地址：**北京市西城区德外大街 4 号

高等教育出版社打击盗版办公室

**邮 编：**100120

**购书请拨打电话：**(010) 58581118

# 目 录

一、笛卡儿的梦 .....	1
二、东方神韵——中国古代数学的启示 .....	6
“方程术”与线性方程组 .....	6
“正负开方术”与高次多项式方程 .....	9
“四元术”与多元高次方程 .....	11
三、西方复兴——从笛卡儿到希尔伯特 .....	18
笛卡儿方案 .....	18
莱布尼茨的“通用符号演算” .....	23
布尔代数 .....	25
希尔伯特形式主义 .....	27
四、现代曙光——计算机与数学机械化 .....	30
五、“吴方法”与数学机械化 .....	36
一个例子 .....	37
又一个例子 .....	45



理论基础 .....	47
转折与应用 .....	48
<b>参考文献 .....</b>	<b>55</b>

## 一、笛卡儿的梦

大约四百年前，一个冬日的夜晚，德国乌尔姆多瑙河畔的一座军营里、当时正在服兵役的法国青年、日后的解析几何发明人笛卡儿(René Descartes, 1596—1650)做了一串奇怪的梦。

梦之一：笛卡儿被一阵狂风吹落到遥远的地方；

梦之二：接着雷电轰鸣，烈火熊熊；

梦之三：狂风烈焰之后，万籁俱寂，在笛卡儿面前呈现出一本书，扉页上写道：“我应该走哪条路？”一位陌生人向笛卡儿指点迷津。

笛卡儿从梦中醒来，陷入了沉思。

这就是科学史上有名的笛卡儿之梦。笛卡儿后来说正是这三个连贯的梦向他提示了“一门奇特的科学”和“一项惊人的发现”。笛卡儿所说的“奇特的科学”和“惊人的发现”究竟是什么呢？他本人从未进一步作过解释。尽管如此，这三个梦后来成为每本介绍解析几何诞生的著作必提的佳话。



图 1 R. 笛卡儿

单看这几个梦，人们很难将它们跟解析几何的发明联系起来。俗话说：“日有所思，夜有所梦。”勤于思考，善于思考，这是一切科学创新的必由之路。笛卡儿出生于法国都伦的拉哈耶，父亲是一个律师。他早年受教于拉福累歇的耶稣会学校。笛卡儿在耶稣会学校读书期间养成了“晨思”的习惯：每天清晨，他都要静静地躺在床上潜心思考一两个时辰。笛卡儿后来终身保持着这种晨思的习惯，可以说是生命不息，思考不止。那么笛卡儿昼思夜想、梦寐以求的究竟是什么呢？

实际上，深入考察笛卡儿的全部论著就会明了，笛卡儿梦寐以求的，是一个远比解析几何更为宏大的目标。众所周知，笛卡儿的《几何学》是他的哲学著作《方法论》的附录。这意味着笛卡儿的解析几何只不过是在他的一般科学方法指导下的一项发现。笛卡儿的科学梦想，在他的一部生前未正式发表的著作《指导思维的法则》（简称《法则》）中有更清楚的说明。笛卡儿在这部著作中首先批判了传统的主要是希腊的研究方法，认为古希腊人的演绎推理只能用来证明已经知道的事物，“却不能帮助我们发现未知的事情”。笛卡儿认为希腊人作出他们的发现“往往是凭机遇”，因此他提出“需要一种发现真理的方法”，也就是一种“普遍的科学”，笛卡儿称之为“通用数学”（*mathesis universalis*）。“通用数学”作为发现真理的普遍方法，正是笛卡儿《法则》全书的宗旨，也是笛卡儿终身的科学追求。笛卡儿在《法则》中描述了这种通用数学的蓝图，他提出

的大胆计划概而言之就是要将一切科学问题转化为求解代数方程的数学问题：

任何问题→数学问题→代数问题→方程求解。

笛卡儿的《几何学》，只不过是他的上述方案在几何领域的具体实施和示范。

翻开《几何学》，笛卡儿开宗明义，在任意选取单位线段（广延单位）的基础上定义了线段的加、减、乘、除、乘方、开方等运算。他以特殊的字母符号（ $a, b, c, \dots$ ）来表示线段，这样就可以在几何中自由运用算术术语，运用这些算术术语又可以将一切几何问题化为关于一个未知线段的单个代数方程，而《几何学》接下去的主要篇幅就是用来讨论如何给出这些方程的标准作图解法。笛卡儿的作图解法依赖于平面上圆与次数随方程次数而逐次增高的代数曲线的交点（详见本书第三节之“笛卡儿方案”）。正是在这里，出于讨论三次及三次以上方程作图曲线性质的需要，笛卡儿引进了坐标系并借以建立曲线与方程之间的对应。这使他成为解析几何的发明人，但对笛卡儿本人来说，坐标几何在整个方案中扮演的只是重要的工具作用，而他贯串全书的主要目标始终是：将一切几何问题化为代数方程问题，这些代数方程则可以用一种标准的、几乎自动的方法去求解。因此可以说解析几何其实是笛卡儿代数方程求解理论的副产品。事实上，《几何学》中并没有解析几何的独立陈述，人们在其中甚至找不到“坐标”和“解析几何”这两个词。解析几何

作为一门独立的数学理论，其发展与完善，是由笛卡儿的后继者们实现的，其中尤其是笛卡儿的挚友、荷兰数学家范斯霍滕，他将笛卡儿《几何学》由法语译成了当时欧洲通行的科学语言拉丁语，并加了许多评注。这些评注明确地揭示并系统地阐释了笛卡儿《几何学》中蕴含的解析几何思想，在很大程度上使之具备了今天的形式。

我们看到，笛卡儿《几何学》的整个思路与传统的方法大相径庭，在这里表现出笛卡儿向传统和权威挑战的巨大勇气。笛卡儿在《方法论》一书中尖锐地批判了经院哲学特别是被奉为教条的亚里士多德“三段论”法则，认为三段论法则“只是在交流已经知道的事情时才有用，却不能帮助我们发现未知的事情”。他认为“古人的几何学”所思考的只限于形相，而近代的代数学则“太受法则和公式的束缚”，因此他主张“采取几何学和代数学中一切最好的东西，互相取长补短”。这种怀疑传统与权威、大胆思索创新的精神，反映了文艺复兴时期的时代特征。笛卡儿的哲学名言是：“我思故我在”。他解释说：“要想追求真理，我们必须在一生中尽可能地把所有的事物都来怀疑一次”，而世界上唯一先需怀疑的是“我在怀疑”，因为“我在怀疑”证明“我在思想”，说明我确实存在，这就是“我思故我在”，它成为笛卡儿唯理主义的一面旗帜。他虽然在物质与精神的关系上有所颠倒，但主张用怀疑的态度代替盲从和迷信，认为只有依靠理性才能获得真理，在当时不仅打击了经院哲学的教会权威，而且也为笛卡

儿自己的科学发现开辟了一条崭新的道路。

简言之，笛卡儿解析几何将欧几里得几何所需要的证明难题的各种智巧抛到一边，代之以代数的或者毋宁说是机械的解题方法步骤。难怪有人这样说道：“解析几何就像是一架庞大的机器，将几何问题输进去，只需摇动曲柄，就可以得到答案。”这种说法虽然未免过于简单，却道破了笛卡儿之梦的天机：寻求一种统一的、机械的发现真理、解决问题的方法，或者用今天的话来说，使人所解决各种科学的和实际的问题的推理过程机械化！

与体力劳动机械化相比，脑力劳动的机械化是远为艰难的探索，然而这种探索同样源远流长，并非仅从笛卡儿开始。笛卡儿本人曾经说过，他的“通用数学”并不是不可及的目标，而是一门具有悠久历史的、可以古为今用的科学。因此，笛卡儿之梦——使数学推理乃至更广泛的推理过程机械化，这是人类共同的、古老而伟大的追求！

## 二、东方神韵——中国古代数学的启示

中国古代数学有着光辉的传统。与以证明定理为中心的希腊数学相比，中国古代数学则是以求解方程为主线。从线性联立方程到高次多项式方程，中国古代数学家创造了一系列先进、程式化的算法（中国数学家称之为“术”），他们用这些算法去求解相应类型的代数方程，从而解决导致这些方程的各种各样的问题。特别，几何问题也是归结为代数方程，然后用程式化的算法来求解。因此，中国古代数学具有明显的机械化、算法化的特征。下面通过典型的例子来说明中国古代数学的这种特征。

### “方程术”与线性方程组

中国古代最重要的数学经典《九章算术》（约公元前 2 世纪）卷 8 的“方程术”，是解线性联立方程组的算法。以该卷第 1 题为例：

“今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，实三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。问上、中、下禾实一秉各几何？”

题中“禾”为黍米，“秉”指捆，“实”是打下来的粮食。设上、中、下禾各一秉打出的粮食分别

为  $x, y, z$  (斗), 则问题就相当于解一个三元一次方程组:

$$3x + 2y + z = 39,$$

$$2x + 3y + z = 34,$$

$$x + 2y + 3z = 26.$$

《九章算术》没有表示未知数的符号, 而是用筹将  $x, y, z$  的系数和常数项排列成一个(长)方阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix}.$$

“方程术”的关键算法叫“遍乘直除”, 在本例中演算程序如下:

用右行上禾 ( $x$ ) 的系数 (3) “遍乘”中行和左行各数, 然后从所得结果按行分别“直除”右行, 即连续减去右行对应各数, 就将中行与左行  $x$  的系数化为 0. 反复执行这种“遍乘直除”算法, 就可以解出方程. 这相当于以下的一系列推导:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 9 & 3 & 1 \\ 78 & 102 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix} \rightarrow$$



