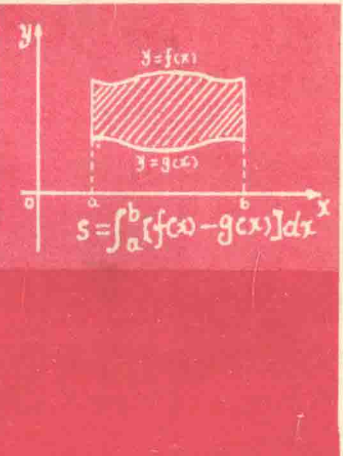
帮你参加高等教育 自学考试系列丛书

总主编
杨文雅 赵洁川 曹守明

高等数学(一)指南

主 编 刘泮振 张 瑞 苏白云



海南国际新闻出版中心

帮你参加高等教

高等数学(一)指南

主　编　刘洋振　张　瑞　苏白云

海南国际新闻出版中心

责任编辑　吴章胜
封面设计　张金豫

帮你参加高等教育自学考试系列丛书
总主编　杨文雅　赵洁川　曹守明

海南国际新闻出版中心出版发行
社址:海口市海府一横路 19 号华宇大厦 1201 室
邮编:570203　电话:(0898)5371546　传真:(0898)5371264
河南财经学院印刷厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 8.6625　字数 214 千字
1997 年 7 月第 1 次印刷　　1997 年 7 月第 1 版
印数 1－10,000
ISBN7－80609－456－3/G·351

全套(10 册)　总定价:120.00 元

前　言

在改革大潮中涌现出来的全国高等教育自学考试已走过了十几年的历程，它作为高等教育的重要组成部分，也已得到了很大的发展。高等数学是自学考试经济类专业的基础理论课程之一，由于这门学科本身内容的抽象性和研究方法的特殊性，加之没有必要的指导，学习重点不明确，尤其缺乏练习，对学员学习高等数学增加了一定的难度，因而有一套针对性很强的自学辅导书无疑对广大学员是非常重要的，而且随着参加学习人员的迅速增加，这种需求愈来愈迫切。为此，我们成立了编委会，组织编写了这套高等数学自学指导书。

编写这套自学指导书的原则是紧扣全国高等教育自学考试委员会编发的高等数学考试大纲，紧扣自考委指定的高等数学的推荐教材。在选材上我们结合多年的授课经验和评改历届成人自学考试试卷积累的信息，精选内容，集思广益，写成了这套自学指导书，以期为广大学员学习时解惑排难。

本书具有如下特点：

1．按指定高等数学(一)教材体系，对各章内容进行了条理化的总结，变复杂为简明扼要，不仅使学员在平时学习教材时对掌握要点有所帮助，而且在总复习时只要抓住内容就能全面掌握该章的要领。

2．本书注重学员基本方法和技巧的训练，因此，省略了所有的数学理论推导，但对一些较难的数学问题的提出，基本概念、定理和性质的使用给出了注释，并总结出了所有基本运算方法。

3．本书选择了大量有代表性的典型例题，通过剖析解题的思

路，总结归纳解题方法，辅导学员掌握基本内容和基本运算技能，力图通过对典型例题的分析提高学生分析问题和解决问题的能力。

4. 每一章列出一些有关概念、性质、运算方法方面的标准化试题，供学员在使用本书时练习。

5. 书末按全国自学考试高数题型附有三套模拟试题(附标准答案和评分标准)，为学员提供了自我检查、自我评估的标准和条件。

本书作者分工为：苏白云编写一、二、三章，刘泮振编写四、五、六章，张瑞编写七、八、九、十章，最后由曹守明教授和臧振春副教授通审全书。

本书在编写过程中曾得到河南人民出版社、河南财经学院信息系及原河南财经学院成教部付主任徐振申同志的大力支持和帮助，在此一并感谢。

由于时间仓促，编写水平有限，书中难免有不妥之处，望广大读者赐教。

1997 年元月于河南财经学院

目 录

第一章　函数及其图形

本课程主要讨论函数微积分、无穷级数论和作为理论基础的极限论.而这些问题的基本研究对象就是函数,因而函数是高等数学中最重要的概念之一.在第一章里,我们将对某些中学里已学过,而又为学习本课程必不可少的内容加以系统复习,为以后各章的学习作准备.

本章重点内容是函数的定义域和性质,难点是反函数定义、复合函数的复合条件.

第一节　集　合

一、集合的概念

1.集合:具有某种共同属性的事物放在一起称为集合.集合中的个别事物称为集合的元素.

例 1　某校全体九六级新生构成一个集合,其元素为张三、李四等.

例 2　全体自然数构成一个集合,其元素为1,2,3 等.

[注]1°　集合具有属性的确定性和对象的不重复性.

[注]2°　集合用大写字母 A、B、C 等表示,元素用小写字母 a、b、c 等表示.若 a 是 A 的元素,记作"$a\in A$",读作 a 属于 A;若 a 不是 A 的元素,记作"$a\overline{\in} A$"或"$a\notin A$",读作 a 不属于 A.

例 3　设 F 是全体有理数构成的集合,则 $\frac{3}{5}\in F$,$\sqrt{2}\overline{\in} F$.

[注]3°　集合按其元素个数多少分为有限集合和无限集合.

[注]4° 微积分中涉及的集合均为数集,即由数构成的集合.

2.集合的表示法.

①列举法:按任意顺序列出集合中的所有元素,并用花括号括起来.

例4 由 a、b、c、d 四个元素组成的集合,可用列举法表示为 $\{a, b, c, d\}$.

例5 由 $x^2-5x+6=0$ 的所有实根构成的集合,可用列举法表示为 $\{2,3\}$.

[注]1° 列举时不得遗漏和重复.

[注]2° 列举无顺序性.

[注]3° 列举法一般适用于元素较少的集合.

②描述法:$A=\{a \mid p(a)\}$.其中 $p(a)$ 为集合中元素 a 所具有的性质.

例6 满足 $x>2$ 的所有实数构成的集合,用描述法表示为 $\{x \mid x>2, x\in R\}$.

[注]4° 描述法一般用于元素个数较多列举困难或根本无法列举的集合.

③图示法:用一个简单的平面区域表示集合,集合中元素用区域中的点表示.

3.两个特殊的集合.

①空集.不包含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

例7 $x^2+1=0$ 的实根构成的集合就是一个空集.两条平行线的交点构成的集合也是一个空集.

[注]1° 空集中不包含任何元素.$\{0\}$、$\{\varnothing\}$ 均不是空集.

②全集:由所有研究对象构成的集合称为全集,记作 U.

[注]2° 全集具有相对性.

例如,讨论的问题仅限于正整数,则全体正整数的集合为全集.若讨论的问题包括正整数和负整数及零,则全体整数的集合就

是全集，而全体正整数的集合就不是全集.

4. 集合间的关系.

①子集. 设 A、B 为两个集合，如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 为 B 的子集. 记作，$A \subset B$. 读作，A 含于 B.

例 8 设 A 为全体自然数的集合，B 为全体实数的集合，则 $A \subset B$.

[注]1° $a \in A$ 是元素与集合之间的关系，$A \subset B$ 是集合与集合间的关系，要将二者区分开.

[注]2° $\varnothing \subset A$. $A \subset A$.

②相等. 设 A、B 为两个集合，如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等. 记作 $A = B$.

例 9 设 $A = \{x \mid x$ 为大于 1 小于 4 的整数$\}$，$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$. 则 $A = B$.

二、集合的运算

1. 交集　由所有属于 A 又属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$. 即：$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

例 10 设 $A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{3,4,5,6\}$，则 $A \cap B = \{3,4\}$.

[注]1° $A \cap \varnothing = \varnothing$，$A \cap A = A$，$A \cap U = A$.

2. 并集　由 A 与 B 中所有元素构成的集合称为 A 与 B 的并集. 记作 $A \cup B$. 即：$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

例 11 设 $A = \{1,2,3,4\}$. $B = \{3,4,5,6\}$. 则 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$.

[注]1° 求并集时注意重复的元素只能出现一次.

[注]2° $A \cup \varnothing = A$，$A \cup A = A$.

3. 差集　所有属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合称为 A 与 B 的差集. 记作 $A - B$. 即 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \overline{\in} B\}$.

例 12 设 $A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{3,4,5,6\}$则 $A - B = \{1,2\}$.

4. 补集　全集 U 与 A 的差集称为 A 的补集. 记作 A'. 即

$A' = \{x \mid x \in U \text{ 且 } x \overline{\in} A\}$.

［注］ 补集是一种特殊的差集，求法与差集相同.

例 13 设 $A = \{x \mid 3 < x \leqslant 5\}$ $B = \{x \mid 4 \leqslant x \leqslant 7\}$

$C = \{x \mid 6 \leqslant x < 8\}$ 求 $(A \cup B) \cap C$.

解：
$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cap C &= \{x \mid 3 < x \leqslant 7\} \cap \{x \mid 6 \leqslant x < 8\} \\
&= \{x \mid 6 \leqslant x \leqslant 7\}.
\end{aligned}
$$

三、区间与邻域

区间与邻域均为特殊的集合，只是为了讨论问题方便而引入的概念.

1.区间

①$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的闭区间.

②$(a,b) = \{x \mid a < x < b)$ 称为以 a,b 为端点的开区间.

③$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$ 及 $(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的半开半闭区间.

以上区间称为有限区间，$b-a$ 称为区间长.下面几种称为无限区间.

④$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in R\}$.

⑤$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\}$.

$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$.

$(b, +\infty) = \{x \mid b < x < +\infty\}$.

$[b, +\infty) = \{x \mid b \leqslant x < +\infty\}$.

2.邻域

$\{x \mid |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $O(x_0, \delta)$. $\{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta, \delta > 0\}$ 称为点 x_0 的空心 δ 邻域，记作 $O(x_0,\delta) - \{x_0\}$.

［注］ $O(x_0,\delta)$ 实际上就是以 x_0 为中心，半径为 δ 的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

第二节　函　　数

一、函数的概念

1. 函数定义：设 D 为一非空数集．若对任一 $x\in D$，按照某种确定的对应规则 f，都仅有一个实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数．记作 $y=f(x)(x\in D)$．

[注]1°　D—定义域，x—自变量，y—因变量，$z=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$—值域．

[注]2°　D 为非空集合，f 为单值对应，如 $y=\sqrt{-x^2-1}$ 与 $x>y$ 均不是函数关系．

[注]3°　函数的两个基本要素：定义域和对应规则．因此判断两个函数是否相同要看①定义域是否相同，②对应规则是否相同．

例 14　判断函数 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否相同？

解：是不同函数．因为 $y=x$ 的定义域为 R，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为非零实数，二者定义域不同．

例 15　判断 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 是否相同？

解：是不同的函数．尽管二者定义域都是 R，但对应规则不一样，故也是不同函数．

2. 定义域求法．

①单一解析式子表示的函数：定义域为使函数表达式有意义的自变量取值的集合．一般有以下几种情况可供参考：

(i). 分式的分母不能为零；

(ii). 负数不能开偶次方；

(iii). 零与负数无对数；

(iv). 反正弦函数与反余弦函数的自变量只能在 -1 与 1 之间取值;

(v). 正切函数 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$;

余切函数 $x \neq k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

例 16 求函数 $y = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域.

解:要使表达式有意义,只须 $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases}$ 即 $x>1$,故定义域 $D = \{x \mid x>1\} = (1, +\infty)$

②分段函数:由两个或两个以上的式子表示的函数称为分段函数,其定义域为各部分自变量取值的总和.

例 17 求函数 $y = \begin{cases} \sqrt{9-x^2} & |x| \leqslant 3 \\ x^2 - 9 & 3 < |x| < 4 \end{cases}$ 的定义域.

解:$D = \{x \mid -4 < x < 4\} = (-4, 4)$

③实际问题:要结合具体情况而定.

[注] 定义域可用集合与区间两种形式表示,但同一问题只需一种即可.

3. 函数值求法:只需将自变量作相应代换即可,$f(x)$ 中的 x 可以表示实数、字母、单项式、多项式甚至另一个函数,要正确认识 x 的广泛性.

例 18 设 $f(x) = \sin x^2$,求 $f(0), f(a), f\left(-\frac{x+1}{2}\right)$.

解:$f(0) = \sin 0 = 0$

$f(a) = \sin a^2$

$f\left(-\frac{x+1}{2}\right) = \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$

例 19 已知 $f(x) = \frac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.

解：$f[f(x)]=\dfrac{f(x)}{1-f(x)}=\dfrac{x}{1-2x}$.

例 20 已知 $f(x+1)=x(x+1)$，求 $f(x)$.

解：$f(x+1)=[(x+1)-1](x+1)$，

$\therefore \quad f(x)=(x-1)x$.

二、函数的表示法

1.公式法：用解析式子表示函数关系的方法.

2.列表法：函数关系用列表的形式表现出来的一种方法.

3.图象法：在平面直角坐标系中，用一条曲线来表示函数关系的方法.

[注] 三种方法中经常用的是第一种方法，有时将公式法与图象法结合起来应用，第二种方法在微积分中应用较少.

三、函数的几何特性

1.单调性

设有函数 $y=f(x)(x\in D)$. 如果对 D 内任意两点 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（$f(x_1)\geqslant f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 单调增加（单调减少）.

[注]1° 将定义中的 $\geqslant$ 及 $\leqslant$ 改成 $>$ 及 $<$，则称 $f(x)$ 为严格单调增加及严格单调减少.

[注]2° 单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.

[注]3° 单调增加函数图象为上升曲线，单调减少函数图象为下降曲线.

[注]4° 判断函数单调性一般用导数理论.

[注]5° 用定义判断函数单调性有以下几种方法可供参考：

(i).直接比较.(ii). y_1-y_2 与 0 比较.(iii). $\dfrac{y_1}{y_2}$ 与 1 比较.

[注]6° 讨论函数的单调性，如无特殊声明即在定义域上讨论.如在定义域上不是单调函数，可将定义域根据具体情况分成若

干部分讨论.

2.有界性

设有函数 $y=f(x)(x\in D)$.如果存在常数 A、B 使得对一切 $x\in D$,有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$,则称函数 $f(x)$有界.否则称 $f(x)$无界.

例 21 判断函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$在$[2,3]$上的有界性.

解:$\because$ 在$[2,3]$上,$\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x-1}\leqslant 1$,故有界.

[注]1° $A\leqslant f(x)\leqslant B$ 等价于 $A<f(x)<B$, $A\leqslant f(x)<B$, $A<f(x)\leqslant B$ 及 $|f(x)|\leqslant M$, $|f(x)|<M$.

[注]2° 有界函数有无穷多界.

[注]3° 有界函数图形介于两平行线 $y=A$ 及 $y=B$ 之间.

3.奇偶性

对于函数 $y=f(x)(x\in D)$,如果对每个 $x\in D$ 有 $-x\in D$ 且 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.如果对每个 $x\in D$ 有 $-x\in D$ 且 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数.

例 22 讨论函数的奇偶性.

①$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$;

②$f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})\quad(a>0,a\neq 1)$.

解:①$f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}=f(x)\quad\therefore f(x)$为偶函数.

$$②f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})$$
$$=\log_a\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$
$$=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$$

故 $f(x)$为奇函数.

[注]1° 一个函数并不是非奇即偶的关系.

[注]2° 奇函数图象关于原点对称,偶函数图象关于 y 轴对

称.

4.周期性

设有函数 $y=f(x)(x\in D)$.如果存在常数 $T>0$,使对任何 $x\in D$,有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数.T 称为周期.使 $f(x+T)=f(x)$成立的最小正数 T 称为函数$f(x)$的最小周期.

[注]1° 一般情况下求周期即为最小周期.

[注]2° 周期函数的图象在定义域内每隔长度为 T 的相邻区间上有相同形状.

[注]3° 常见的周期函数有 $y=A\sin(Bx+C)+D$.其周期为 $T=\dfrac{2\pi}{B}$.$y=A\operatorname{tg}(Bx+C)+D$,其周期为 $T=\dfrac{\pi}{B}$.

如 $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos2x}{2}=-\dfrac{1}{2}\cos2x+\dfrac{1}{2}$,周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

四、复合函数与反函数

1.复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 $D(f)$.函数 $u=\varphi(x)$的定义域为 $D(\varphi)$,值域为 $Z(\varphi)$.若 $Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$,则称 $y=f[\varphi(x)]$为复合函数.其中 x 为自变量,y 为因变量,u 为中间变量.

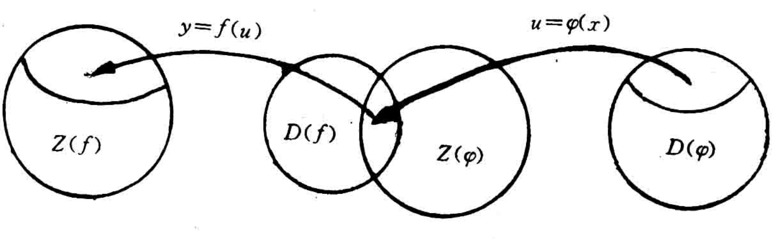


图 1-1

[注]1° 判断两个函数能否复合,关键在于 $Z(\varphi)\cap D(f)$是否非空.$Z(\varphi)\cap D(f)\neq\varnothing$称为复合条件.否则即使复合在一起也