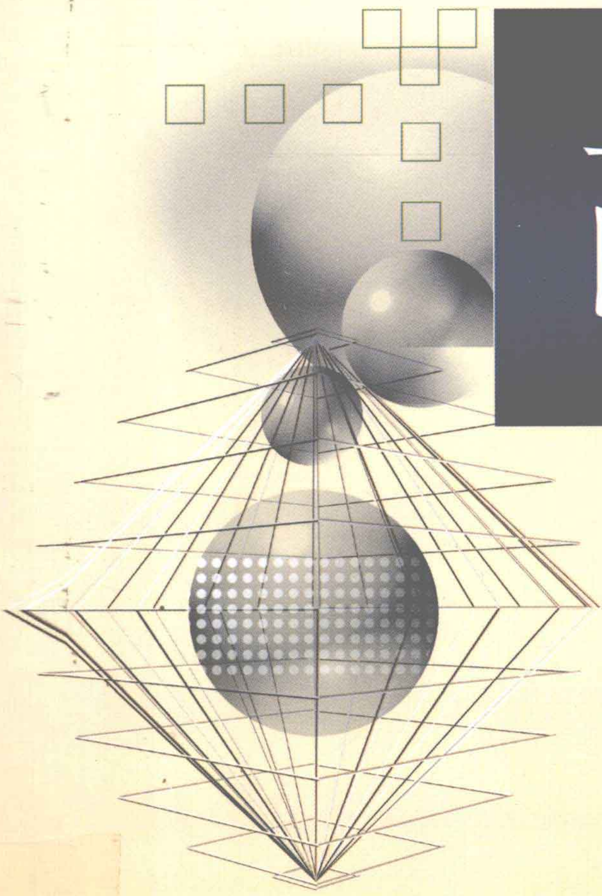
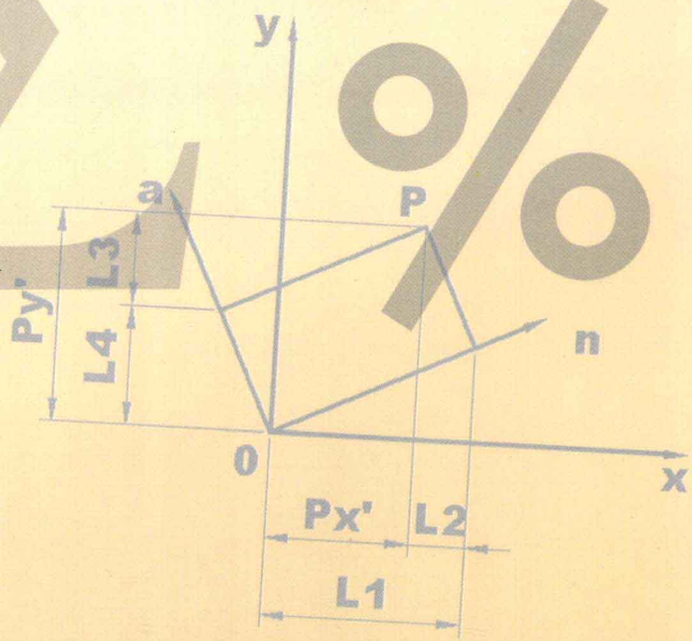
二十一世纪高职高专教育规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学

主编◎王德印　崔永新



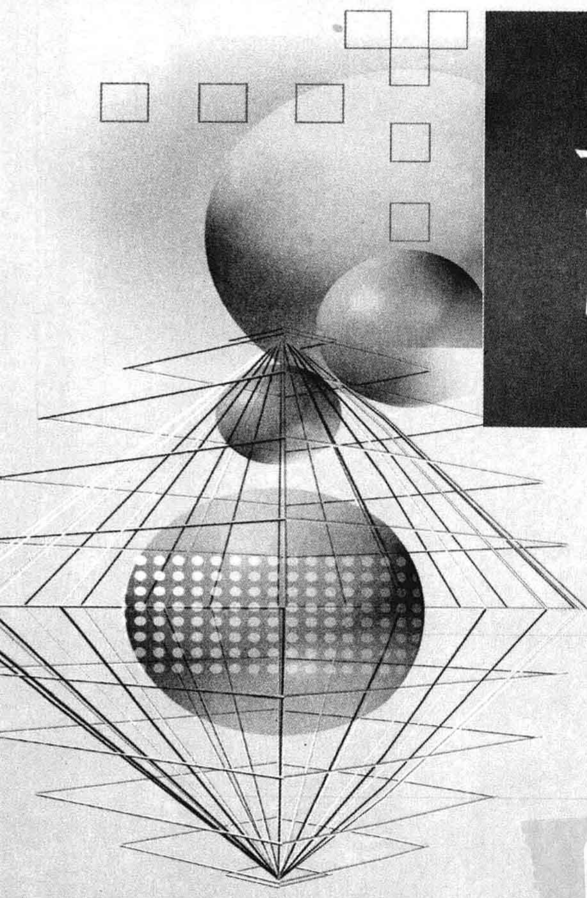


中国传媒大学出版社

二十一世纪高职高专教育规划教材

GAO DENG SHU XUE

高等数学



主　编　王德印　崔永新
副主编　吉宏威　何彦波
编　者　宿彦莉　张彦龙　王　萍

中国传媒大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王德印,崔永新主编. —北京:中国传媒大学出版社,2010.5

ISBN 978-7-81127-943-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①王… ②崔… Ⅲ. ①高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 095060 号

高等数学

主　　编	王德印　崔永新
责任编辑	王　进　高秀妍　曾文鹏
责任印制	曹　辉
出 版 人	蔡　翔
出版发行	中国传媒大学出版社(原北京广播学院出版社) 北京市朝阳区定福庄东街 1 号　邮编 100024 电话:010-65450532　65450528　传真:010-65779405 http://www.cucp.com.cn
经　　销	全国新华书店
印　　刷	北京市通县华龙印刷厂
开　　本	850×1168mm　1/16
印　　张	15.75
版　　次	2010 年 6 月第 1 版　2010 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81127-943-6/O·943　　定　价:30.00 元

前　言

FOREWORD

为响应《教育部关于加强高职高专教育人才培养工作的意见》中强调的以“应用”为主旨和特征来构建课程和教学内容体系的号召，按照教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专高等数学课程的教学实际，我们组织编写了这本《高等数学》教材。

本教材由实例引入概念和定义，淡化理论说明和推导过程，强调几何和物理应用。在编写过程中，遵循面向专业需求，关注应用能力；面向学生素质，关注数学思想的原则，注重学生学习兴趣的提高，注重学生应用能力的培养，同时满足学生继续教育的需要。充分体现了高职高专特色，体现了公共基础特色。本教材具有以下几个方面的特性：

1. 趣味性。在保证知识系统严谨全面的前提下，每章后面都有拓展空间板块，涵盖趣味数学、名人轶事、专家点评、解题方法等内容，提高学生的学习兴趣。

2. 新颖性。版式设计活泼，在板块前，加上趣味生动的图标，起到消除视觉疲劳的效果；整体上采用板块式结构，使学生不会产生千篇一律的感觉；知识结构采用框式结构图，立体感强，清晰明了地呈现本章主要内容。

3. 实用性。内容丰富、图文并茂、通俗易懂。课后有同步训练、章后有阶梯训练（基础训练和拓展训练），重点突出，强化训练，涵盖了全部知识点，有助于学生对知识点的掌握和巩固。

参加本教材编写的有盘锦职业技术学院的王德印老师（第 5 章、第 10 章）、宿彦莉老师（第 1 章）；鸡西大学的崔永新老师（第 2 章、第 3 章）；新乡职业技术学院的吉洪威老师（第 8 章、第 9 章）；齐齐哈尔师范高等专科学校的何彦波老师（第 6 章）；铁岭师范高等专科学校的张彦龙老师（第 7 章）、王萍老师（第 4 章）。全书由王德印老师统稿。

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不妥之处，衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正。

编　者

目 录

第 8 章　多元函数微分学

第 9 章　多元函数积分学

第 10 章　无穷级数

课堂速记

第 1 章　函数、极限与连续

学习导航

知识目标

了解函数的性质、极限的性质、无穷小的性质、闭区间上连续函数的性质. 理解函数的概念、极限的概念、无穷小与无穷大的概念、函数连续性的概念. 会求函数的定义域、会利用等价无穷小求极限、会求间断点并判断其类型.

掌握复合函数与初等函数的概念、极限的运算法则. 熟练掌握两个重要极限、求极限的方法.

能力目标

培养学生抽象思维能力和计算能力,利用极限思想解决实际问题.

函数是高等数学的主要研究对象,极限是高等数学的基本研究工具,连续则是函数的一个重要性质. 本章在复习函数的基础上,讨论函数的极限和连续.

1.1　函 数

函数一词是微积分的奠基人——德国的哲学家兼数学家莱布尼兹首先采用的. 1837年,德国数学家狄利克雷抽象出了人们易于接受且较为合理的函数概念.

1.1.1　函数及其性质

1. 函数的概念

引例　汽车以 60 千米/小时的速度匀速行驶,那么行驶里程与时间有什么关系?

设行驶路程为 s 千米,行驶时间为 t 小时,依题义可得 $s=60t(0<t<+\infty)$. 变量 t 和 s 的这种对应关系,即是函数概念的实质.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个非空实数集,如果对于数集 D 中的每一个数 x 按照一定的对应法则 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应,则称 f 是定义在数集 D 上的函数,记作 $y=f(x),x\in D$. 其中 D 称为函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量.

如果对于确定的 $x_0\in D$,通过对应法则 f,有唯一确定的实数 y_0 与之对应,则称 y_0

课堂速记

为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $y_0=f(x_0)$. 集合 $Y=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

2. 函数的表示法

(1)解析法：用一个等式来表示两个变量的函数关系. 如一次函数 $y=kx+b(k,b$ 为常数，且 $k\neq 0)$.

(2)列表法：列出表格来表示两个变量的函数关系. 如三角函数表.

(3)图像法：用函数图像表示两个变量之间的关系. 如二次函数图像.

3. 函数的两个要素

函数的对应法则和定义域称为函数的两个要素. 函数的对应法则通常由函数的解析式给出，函数的值域由定义域和对应法则确定. 函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量取值的全体. 在实际问题中，函数的定义域要由问题的实际意义确定. 在求函数的定义域时，应注意：分式函数的分母不能为零；偶次根式的被开方式必须大于等于零；对数函数的真数必须大于零；反正弦函数与反余弦函数的定义域为 $[-1,1]$ 等，如果函数表达式中含有上述几种函数，则应取各部分定义域的交集.

两个函数只有当定义域和对应法则都相同时，才是同一个函数. 例如，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 是相同的函数；而函数 $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$ 因定义域不同而不是相同函数.

例 1.1.1 求函数 $f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x+4}$ 的定义域.

解 当且仅当 $1-x>0$ 且 $x+4\geqslant 0$ 时，$f(x)$ 才有意义，即 $-4\leqslant x<1$，所以函数的定义域为 $[-4,1)$.

例 1.1.2 已知 $f(x)=x^3+1$，求 $f(a-1)$ 及 $f(\frac{1}{x})$.

解 $f(a-1)=(a-1)^3+1=a^3-3a^2+3a$；$f(\frac{1}{x})=(\frac{1}{x})^3+1=\frac{1}{x^3}+1$.

例 1.1.3 已知 $f(x+1)=x^2-x+1$，求 $f(x)$.

解 令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，从而 $f(t)=(t-1)^2-(t-1)+1=t^2-3t+3$.

所以
$$f(x)=x^2-3x+3.$$

4. 几种常见函数简介

(1)分段函数

有些函数在定义域不同的范围内有不同的表达式，这样的函数叫做分段函数.

例 1.1.4 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 求 $f(3),f(0),f(-5)$.

解 $f(3)=1,f(0)=0,f(-5)=-1$.

(2)隐函数

通常将形如 $y=f(x)$ 的函数称为显函数；由二元方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为隐函数. 有些隐函数可以通过一定的运算，把它转化为显函数，例如 $x^2+y^2=4$ 可以化为显函数 $y=\pm\sqrt{4-x^2}$；但有些隐函数却不能化为显函数，例如 $e^x+xy-e^y=0$.

课堂速记

(3)参数方程确定的函数

由参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t\in I\subseteq R)$来表示 x 与 y 之间的函数关系，称为由参数方程确定的函数. 例如，由参数方程$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t \end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant \pi)$，可以确定函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$.

(4)反函数

设 $y=f(x)$为定义在数集 D 上的 x 的函数，其值域为 M. 若对于数集 M 中的每一个数 y，数集 D 中都有唯一的数 x，使得 $f(x)=y$，则称由此确定的函数为 $y=f(x)$的反函数，记为 $y=f^{-1}(x)$，其定义域为 M，值域为 D.

注意：只有严格单调的函数才有反函数.

例 1.1.5 求函数 $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}$的反函数，并确定反函数的定义域.

解 由 $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}$ 得 $e^x=2y+3$，即 $x=\ln(2y+3)$. 将上式中的 x，y 互换，因此得到函数 $y=\frac{1}{2}e^x-\frac{3}{2}$的反函数为 $y=\ln(2x+3)$，反函数的定义域为$\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

5. 函数的几种特性

(1)奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称，对任意 $x\in D$，①若 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$为偶函数；②若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$为奇函数；③不是偶函数也不是奇函数的函数，称为非奇非偶函数. 由定义可知奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1.1.6 判断下列函数的奇偶性：

①$f(x)=x(x+\sin x)$；②$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；③$y=x^3+2$.

解 ①$f(-x)=(-x)[(-x)+\sin(-x)]=-x(-x-\sin x)=x(x+\sin x)=f(x)$，所以 $f(x)=x(x+\sin x)$是偶函数.

②$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

③$f(-x)=(-x)^3+2=-x^3+2$，它既不等于 $f(x)$，也不等于$-f(x)$，所以 $y=x^3+2$为非奇非偶函数.

(2)周期性

设 T 为一个不为零的常数，如果函数 $y=f(x)$对于任意 $x\in D$，都有 $x+T\in D$，且 $f(T+x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$是周期函数. 使上述关系式成立的最小正数 T，称为函数 $y=f(x)$的周期. 例如函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数.

(3)单调性

设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，对于任意 $a<x_1<x_2<b$

1) 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间(a,b)内为单调增加函数，这时(a,b)为 $y=f(x)$的单调增加区间.

2)若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$在区间(a,b)内为单调减少函数，这时(a,b)为

课堂速记

$y=f(x)$的单调减少区间.

例如函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$上是减函数,在$(0,+\infty)$上是增函数.

(4)有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 M,使得对任意 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称 $y=f(x)$在 D 上有界;如果不存在这样的正数,则称 $y=f(x)$在 D 上无界.例如,函数 $y=\sin x$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是有界的;$y=\ln x$ 在定义域$(0,+\infty)$上是无界的.

1.1.2 初等函数

1. 基本初等函数

我们称下列六种函数为基本初等函数.

(1)常数函数:$y=c,x\in(-\infty,+\infty)$(其中 c 是已知常数).

(2)幂函数:$y=x^{\alpha}$(α 为任意实数).

(3)指数函数:$y=a^x,x\in(-\infty,+\infty)$($a>0$ 且 $a\neq1$).

(4)对数函数:$y=\log_a x,x\in(0,+\infty)$($a>0$ 且 $a\neq1$).

(5)三角函数:

正弦函数 $y=\sin x,x\in(-\infty,+\infty)$;

余弦函数 $y=\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$;

正切函数 $y=\tan x,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$;

余切函数 $y=\cot x,x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$;

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$(不做详细讨论)

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$(不做详细讨论)

(6)反三角函数:

反正弦函数 $y=\arcsin x,x\in[-1,1]$;

反余弦函数 $y=\arccos x,x\in[-1,1]$;

反正切函数 $y=\arctan x,x\in(-\infty,+\infty)$;

反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x,x\in(-\infty,+\infty)$.

它们的性质和图像在中学数学里已经学过,在此不再赘述(详见附录一).

2. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域与函数 $u=\varphi(x)$的值域的交集非空.则称函数 $y=f[\varphi(x)]$是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中 u 称为中间变量.

例 1.1.7 求函数 $y=\sqrt{u}$与 $u=1-x^2$ 的复合函数.

解 将 $u=1-x^2$ 代入到 $y=\sqrt{u}$得复合函数 $y=\sqrt{1-x^2},x\in[-1,1]$.

不是任何两个函数都能复合成一个复合函数.如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数.

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数,还可以把一个较复杂的

课堂速记

函数分解成几个简单的函数.

例 1.1.8 指出复合函数 $y=\sin^2(x+1)$ 是由哪些函数复合成的.

解 $y=\sin^2(x+1)$ 是由 $y=u^2, u=\sin v, v=x+1$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 1.2 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如：$y=\sqrt{\ln 5x+3^x+\sin^2 x}$，$y=\arcsin(x-2)$ 等都是初等函数. 而分段函数不是初等函数.

1.1.3 函数关系的建立

构造函数是函数思想的重要体现，运用函数思想要善于抓住事物在运动过程中那些保持不变的规律和性质. 下面举例介绍运用函数思想来解决实际问题.

例 1.1.9 某种旅行帽的沿接有两个塑料帽带，其中一个塑料帽带上有 7 个等距的小圆柱体扣，另一个帽带上扎有七个等距的扣眼，用第一个扣分别去扣不同扣眼所测得帽圈直径的有关数据(单位：cm)见表 1－1.

表 1－1

扣眼号数(x)	1	2	3	4	5	6	7
帽圈直径(y)	22.92	22.60	22.28	21.96	21.64	21.32	21.00

(1)求帽圈直径 y 与扣眼号数 x 之间的函数关系式；

(2)小明的头围约为 68.94cm，他将第一个扣扣到第 4 号扣眼，你认为松紧合适吗？

解 (1)读者可根据统计数据，画出它们相应的散点图. 可以看出与以前所学过的一次函数的图像(直线)较为接近. 由此确定近似的函数关系. 设一次函数关系式 $y=kx+b$ $(k\neq 0)$，依题意可得

$$\begin{cases}k+b=22.92,\\2k+b=22.60.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k=-0.32,\\b=23.24.\end{cases}\quad 所以函数关系式为\ y=-0.32x+23.24.$$

(2)当 $x=4$ 时，$y=-0.32\times 4+23.24=21.96$，$c=\pi y=\pi\times 21.96\approx 68.95$，而 $68.95-68.94=0.01$cm，因为 0.01cm 很小，所以将第一扣扣到第 4 扣时合适.

学习思考 1.1

1. 分段函数 $f(x)=\begin{cases}2x+3, & x\in[-1,0),\\ x^3, & x\in[1,2]\end{cases}$ 的定义域是什么？

2. 任意两个函数都可以复合成一个复合函数吗？

同步训练 1.1

1. 下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否是同一个函数，为什么？

课堂速记

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$；(2) $f(x)=\ln x^5$, $g(x)=5\ln x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(2-x)}+\sqrt{x+1}$；(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(2x-1)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=x\sin x-\cos x$；(2) $y=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$.

4. 下列函数中，哪些是周期函数？并指出其周期.

(1) $y=\sin^2 x$；(2) $y=|\cos x|$.

(3) $y=\cos \pi x$；(4) $y=\tan 4x$.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-3}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(-x+1)$.

6. 求由函数 $y=\lg u$，$u=v^2$，$v=3+t$ 复合而成的复合函数.

7. 指出下列各函数的复合过程.

(1) $y=(1+x)^5$；　　　(2) $y=\sqrt{\tan x}$；

(3) $y=e^{-\sin\frac{1}{x}}$；　　　(4) $y=\ln\cos(x^2-1)$.

8. 某医药研究所开发一种新药，如果成年人按规定的剂量服用，据检测，服药后每毫升血液中的含药量 y(毫克)与时间 t(小时)之间的关系 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t-3}$ 用如图 1—1 所示的曲线表示. 据进一步测定，每毫升血液中含药量不少于 0.25 毫克时，治疗疾病有效. 则服药一次，治疗疾病有效的时间为多少？

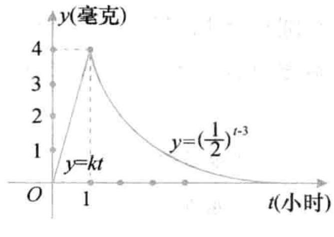


图 1—1

1.2　极限及其性质

极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念，极限概念的产生源于解决实际问题的需要，在学习过程中可逐步加深对极限思想的理解.

1.2.1　极限的概念

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1.3　如果当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)$ 有定义，且函数值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

由定义可知，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的极限为 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

如果当 $x>0$ 且 x 无限增大时，函数 $f(x)$ 有定义，且函数值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 例如，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=e^{-x}$ 的极限为 0，即 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}=0$. 如果当 $x<0$ 且 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 有定义，

课堂速记

且函数值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to-\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$. 例如，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)=e^x$ 的极限为 0，即 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

例 1.2.1 判断 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$. 因为 $e^x\to+\infty(x\to+\infty)$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在.

数列 $y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$ 可以写成 $y_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots)$，即数列可以看成是自变量为正整数的函数. 由定义 1.3 得到数列极限的定义.

定义 1.4 如果当 n 无限增大时，数列 y_n 无限接近于某一确定的常数 A，则称 A 为数列 y_n 的极限. 此时也称数列 y_n 收敛于 A，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$ 或 $y_n\to A(n\to\infty)$. 若数列 y_n 的极限不存在，则称该数列发散.

例如，(1) $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}$ 不存在.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

为了便于描述，先介绍邻域的概念：开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域；开区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域 $(\delta>0)$.

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果当 x 无限趋近于 x_0 时，$f(x)$ 无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$.

由极限的定义可知，$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$. $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}$ 不存在，但可以记为 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域的左侧有定义. 如果当 $x<x_0$ 且无限趋近于 x_0 时，$f(x)$ 无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域的右侧有定义. 如果当 $x>x_0$ 且无限趋近于 x_0 时，$f(x)$ 无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

根据定义可得：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 1.2.2 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$ 讨论 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在？

解 由图 1－2 可以看出：

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$. 显然 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

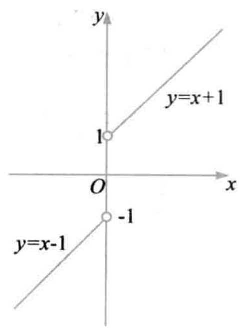


图 1－2

课堂速记

1.2.2 极限的性质

性质 1(唯一性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，那么这极限值 A 唯一.

性质 2(局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)$ 有界.

性质 3(局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则在 x_0 的某个去心邻域内有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

性质 4(夹逼定理)　若在 x_0 的某个去心邻域内，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$；则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

注意：对于 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to -\infty$，$x\to +\infty$ 时定理仍然成立.

1.2.3 无穷小与无穷大

1. 无穷小量

定义 1.6　在某变化过程中以零为极限的量称为无穷小量，简称无穷小.

例如，当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)=2^x-1$ 就是无穷小量.

注意：(1)无穷小不是很小的数，而是以零为极限的函数；(2)数 0 是无穷小；(3)若一个函数是无穷小，必须同时指出自变量的变化过程.

2. 无穷大量

定义 1.7　在某变化过程中绝对值无限增大的量称为无穷大量，简称无穷大.

注意：(1)无穷大不是很大的数，它是一个绝对值无限增大的函数；(2)若一个函数是无穷大，必须同时指出自变量的变化过程.

3. 无穷小量与无穷大量的关系

当 $x\to 0$ 时，x^2 是无穷小，而 $\dfrac{1}{x^2}$ 是无穷大. 说明无穷小(数 0 除外)的倒数是无穷大.

当 $x\to -2$ 时，$\dfrac{1}{x+2}$ 是无穷大，而 $x+2$ 是无穷小. 说明无穷大的倒数是无穷小.

定理 1.1　如果 $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$；反之，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

注意：对于 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to +\infty$，$x\to -\infty$ 定理也成立.

例 1.2.3　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x}$.

解　(1)因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+(x+1)}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x}\right)=0+0=0.$

课堂速记

学习思考 1.2

战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》有:“一尺之棰,日取其半,万世不竭.”怎样用极限的定义解释这句话?

同步训练 1.2

1. 观察下列函数的变化趋势,写出它们的极限.

(1) $\{u_n\}=\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$;　　(2) $\{u_n\}=\left\{2+\frac{1}{n^2}\right\}$;

(3) $y=2^x(x\to 0)$;　　(4) $y=\frac{2x^2-2}{x-1}(x\to 1)$.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+2, & x>0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

5. 判断下列函数,在什么条件下是无穷小,在什么条件下为无穷大?

(1) $y=\frac{x}{x-5}$;　　(2) $y=\ln(1+x)$.

1.3 极限的运算

利用极限的定义只能计算一些简单函数的极限,本节介绍极限的四则运算法则、两个重要极限、无穷小的比较,以期求较复杂函数的极限.

1.3.1 极限四则运算法则

定理 1.2 在自变量 x 的同一变化过程中,若$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$. 则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) 若$\lim g(x)=B\neq 0$,则$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$.

推论 1 $\lim[cf(x)]=c\lim f(x)$(c 为常数).

推论 2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

例 1.3.1 求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2}{x^2-5x+3}$.

课堂速记

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=-2.$

例 1.3.2 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\dfrac{1}{6}.$

例 1.3.3 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-1}{4x^3-x^2+3}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-1}{4x^3-x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\dfrac{3}{4}.$

同理可得：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty, & m<n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n.\end{cases}\quad (a_0\neq 0,b_0\neq 0).$

1.3.2 两个重要极限

在求极限过程中，利用两个重要极限公式来求，相当方便.

1. 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

经常应用它的变量代换形式，即：若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1.$

例 1.3.4 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin 2x}{x}}=\dfrac{1}{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}=\dfrac{1}{2}.$

例 1.3.5 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{\dfrac{\sin ax}{ax}}{\dfrac{\sin bx}{bx}}=\dfrac{a}{b}.$

例 1.3.6 求$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1.$

2. 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$

观察表 1—2.

课堂速记

表 1—2

x	-10	-1000	-100000	-1000000	$\cdots\to-\infty$
$(1+\frac{1}{x})^x$	2.86797	2.71964	2.71830	2.71828	$\cdots$
x	10	1000	100000	1000000	$\cdots\to+\infty$
$(1+\frac{1}{x})^x$	2.59374	2.71692	2.71827	2.71828	$\cdots$

从上表可以看出,当 x 无限趋于∞时,$(1+\frac{1}{x})^x$ 的值无限趋于 e.

经常应用它的变量代换形式,即 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}(1+\frac{1}{\varphi(x)})^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

例 1.3.7 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x-3}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+(-\frac{1}{x}))^{(-x)(-1)}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+(-\frac{1}{x}))^{(-x)}]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^x]^2\cdot(1+\frac{1}{x})^{-3}=[\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x]^2\cdot$

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-3}=\mathrm{e}^2\cdot 1=\mathrm{e}^2$.

1.3.3 无穷小的性质与比较

1. 无穷小的性质

由于无穷小是在某种趋向下,极限为零的函数,由极限的四则运算容易得到以下结论.

性质 1 有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 2 有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 3 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积仍是无穷小.

例 1.3.8 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$.

解 因为 $|\sin x|\leqslant 1$,$\frac{1}{x}$为 $x\to\infty$时的无穷小量,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$.

2. 无穷小的比较

定义 1.8 设$\lim\alpha=0$,$\lim\beta=0$,若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是 α 的高阶无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是 α 的低阶无穷小;若$\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c(c\neq 0)$,$k>0$,则称 β 是 α 的 k 阶无穷小;若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$. 当 $c\neq 1$ 时,称 β 与 α 是同阶无穷小;当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.