College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

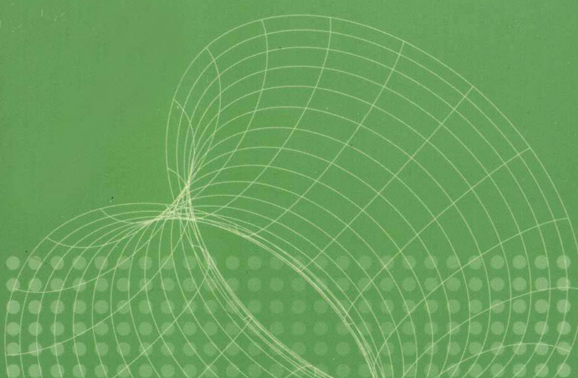
工程数学

积分变换

（第五版）

习题全解指南

东南大学数学系 张元林 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

书

工程数学
积分变换
（第五版）
习题全解指南

Jifen Bianhuan (Di-wu Ban)
Xiti Quanjie Zhinan

东南大学数学系　张元林　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是《工程数学——积分变换》(第五版)教材的配套参考书，不仅对教材中所有习题作了详尽解答，而且在每章开始列出了“内容要点”，给出了“例题分析”。书中各章节习题的题号均与教材相一致，书后附有与教材相同的Fourier变换简表(附录Ⅰ)和Laplace变换简表(附录Ⅱ)，以方便查用。

此外，本书还增添了MATLAB软件的应用(第三章)，可供有兴趣的读者参考。

本书可作为“积分变换”课程的教学参考书，除可供高等学校非数学专业的师生参考使用外，也可供广大工程技术人员及自学积分变换的读者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学——积分变换(第5版)习题全解指南/张元林编. --北京:高等教育出版社,2012.7
ISBN 978-7-04-035197-2

Ⅰ.①工… Ⅱ.①张… Ⅲ.①工程数学-高等学校-题解②积分变换-高等学校-题解 Ⅳ.①TB11-44 ②O177.6-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第132065号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 田 玲　封面设计 于 涛　版式设计 马敬茹
插图绘制 宗小梅　责任校对 殷 然　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	河北鹏盛贤印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm　1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	9.75	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	240千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	18.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　35197-00

修订版前言

本书是高等教育出版社出版的《工程数学——积分变换》(第五版)教材的配套参考书。为了方便读者使用,对教材中所有习题作了详尽的解答和说明。

本书保持了初版的系统结构,即每章仍按“内容要点”、“例题分析”和“习题全解”三部分编写。编写本书的目的、要求和期望已在初版中说明。

随着科学技术的发展和计算机应用的普及,本版中增加了“积分变换的 MATLAB 运算”作为第三章。主要用它来求解函数的 Fourier 变换、Laplace 变换以及它们的逆变换等问题,从而扩大读者的视野,增加解题的方法。这些内容可供有兴趣的学生、有关的工程技术人员和科研工作者参考。

在本书编写的过程中,编者对高等教育出版社数学分社的同志,特别是李艳馥、于丽娜、田玲等诸位编辑所给予的建议、付出的辛勤劳动和大力支持表示衷心感谢。

由于编者水平所限,书中错误或不妥之处在所难免,敬请同行们和广大读者批评指正。

编　者

2012 年 1 月于南京

前　言

本书是高等教育出版社出版的《工程数学——积分变换》(第四版,东南大学数学系张元林编)教材的配套参考书。为了方便读者使用,对教材中所有习题作了详尽的解答。

本书也具有相对的独立性,每章开始列出"内容要点",简述本章的基本概念、主要定理、性质及计算公式,使读者能尽快地掌握其主要内容,也可起到复习、小结的效果;在习题解答前,选出一些有代表性的题目给出"例题分析",不仅给出其详细的解答过程,更着重于解题思路的分析,并尽可能地提供解题的多种方法,从而提高读者的分析问题和解决问题的能力;最后,对该教材的所有习题作出"习题全解",这里,将按习题所在的章节,提供与教材内容的次序相适应的一种解题方法,并给出解答的全过程,对于有些习题可能遇到的难点或一题多解的情形,尽可能地加以注明,以期读者达到解题方法的多样性与灵活性。另外,教材中带有星号*内容的习题也同样作出了解答,以供需要此内容的读者及学有余力的学生参考。书中各章节习题的题号均与教材相一致。书后附有与教材相同的 Fourier 变换简表与 Laplace 变换简表,以方便查用。

必须指出,学好数学离不开自己做习题。如果用"阅读题解"代替"自己做题",必将会影响自己解题能力的提高。但若是自己做了,再参考本书并作一些分析和比较,那将会收到触类旁通、举一反三的效果。这也是编者所期望的。

本书的编写力求层次分明,步骤清楚,书写格式规范化,使读者通过本书的学习,能对积分变换的理论与方法有更加深入的理解。

由于编者水平所限，本书给出的解题方法未必都是最好的，难免有误，不妥之处，敬请指正。

编 者

2003年8月于南京

目　　录

第一章　Fourier 变换

一　内容要点

本章从讨论周期函数的 Fourier 级数的展开式出发，进而讨论非周期函数的 Fourier 积分公式及其收敛定理，并在此基础上引出 Fourier 变换的定义、性质、一些计算公式及某些应用.

本章的重点是求函数的 Fourier 变换及 Fourier 变换的某些应用. 函数的 Fourier 变换也是本章的一个难点，要解决好这个难点，必须掌握好 Fourier 变换的基本性质及一些常用函数（如单位脉冲函数，单位阶跃函数，正、余弦函数等）的 Fourier 变换及其逆变换的求法. 从而才能较好地运用 Fourier 变换进行频谱分析，解某些微分、积分方程和偏微分方程的定解问题.

1. Fourier 积分

（1）Fourier 级数的展开式

设 $f_T(t)$ 以 T 为周期且在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足 Dirichlet 条件（即在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上满足：1° 连续或只有有限个第一类间断点；2° 只有有限个极值点）. 则 $f_T(t)$ 在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上可以展成 Fourier 级数. 在 $f_T(t)$ 的连续点处，有

$$f_T(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)\quad\text{（三角形式）}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\omega_n t} \quad （复数形式或称复指数形式），$$

其中

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \omega_n = n\omega, c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega t} dt \ (n=0, \pm 1, \cdots),$$

$c_0 = \dfrac{a_0}{2}, c_n = \dfrac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \dfrac{a_n + jb_n}{2} (n=1,2,\cdots)$. 在 $f_T(t)$ 的间断点 t 处，上面的展开式左边 $f_T(t)$ 应以 $\dfrac{1}{2}[f_T(t+0)+f_T(t-0)]$ 代替.

（2）Fourier 积分定理

对于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何一个非周期函数 $f(t)$ 都可以看成是由某个周期函数 $f_T(t)$ 当 $T \to +\infty$ 时转化而来的. 由此，从 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数的复数形式出发，能够得到一个非周期函数 $f(t)$ 的 Fourier 积分公式，其条件为：

若 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上满足下列条件：

1° $f(t)$ 在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件；

2° $f(t)$ 在无限区间 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积（即积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ 收敛），

则在 $f(t)$ 的连续点处有如下的 Fourier 积分公式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau\right] e^{j\omega t} d\omega.$$

在 $f(t)$ 的间断点 t 处，上面展开式左端的 $f(t)$ 应以 $\dfrac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$ 代替. 这个公式也称为 Fourier 积分公式的复数形式.

这个定理在教材中虽然未加证明，但应当看到它是 Fourier 变换的理论基础，必须深刻理解其含义，掌握它成立的条件，以便为学习 Fourier 变换奠定理论基础.

（3）Fourier 积分公式的其他形式

1）Fourier 积分公式的三角形式

利用 Euler 公式，由 Fourier 积分公式的复数形式可推出它的三角形式：

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

2）Fourier 正弦积分公式

当 $f(t)$ 为奇函数时，利用三角函数的和差公式，由 Fourier 积分公式的三角形式可推出其 Fourier 正弦积分公式

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega.$$

3）Fourier 余弦积分公式

当 $f(t)$ 为偶函数时，同理可得

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega.$$

若 $f(t)$ 仅在 $(0,+\infty)$ 上有定义，且满足 Fourier 积分收敛定理的条件，通过奇式（偶式）延拓，便可得到 $f(t)$ 的 Fourier 正弦（余弦）积分展开式.

2. Fourier 变换

（1）Fourier 变换的概念

Fourier 变换对的一般形式：

$$\begin{cases}\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t,\\ f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega;\end{cases}$$

Fourier 正弦变换对：当 $f(t)$ 为奇函数时，有

$$\begin{cases}\mathscr{F}_s[f(t)]=F_s(\omega)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t,\\ f(t)=\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega;\end{cases}$$

Fourier 余弦变换对：当 $f(t)$ 为偶函数时，有

$$\begin{cases}\mathscr{F}_c[f(t)] = F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)\cos \omega t\mathrm{d}t, \\ f(t) = \mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)] = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\omega)\cos \omega t\mathrm{d}\omega.\end{cases}$$

它们可分别简记为$f(t)\Leftrightarrow F(\omega)$，$f(t)\Leftrightarrow F_s(\omega)$及$f(t)\Leftrightarrow F_c(\omega)$. 显然，当$f(t)$为奇函数时，$F(\omega)=-2\mathrm{j}F_s(\omega)$，当$f(t)$为偶函数时，$F(\omega)=2F_c(\omega)$.

（2）单位脉冲函数及其 Fourier 变换

δ-函数的重要性质——筛选性质：若$f(t)$为无穷次可微的函数，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0).$$

一般地，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t=f(t_0).$$

由这一性质，可得$\mathscr{F}[\delta(t)]=1$，$\mathscr{F}^{-1}[1]=\delta(t)$，表明$\delta(t)$和 1 构成一个 Fourier 变换对，记为$\delta(t)\Leftrightarrow 1$. 同理，有$\delta(t-t_0)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$.

需要指出的是$\delta(t)$是一个广义函数，它的 Fourier 变换是一种广义 Fourier 变换. 在物理学和工程技术中有许多重要函数（如常数，符号函数，单位阶跃函数及正、余弦函数等）不满足 Fourier 积分定理中的绝对可积条件（即不满足$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$），然而其广义 Fourier 变换是存在的. 利用单位脉冲函数及其Fourier变换就可以求出它们的 Fourier 变换. 例如

$$\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega),\ \mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0),$$

$$\mathscr{F}[u(t)]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}+\pi\delta(\omega),\ \mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\frac{2}{\mathrm{j}\omega},$$

$$\mathscr{F}[\sin \omega_0 t]=\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)],$$

$$\mathscr{F}[\cos \omega_0 t]=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)].$$

（3）Fourier 变换的物理意义——频谱

1）非正弦的周期函数$f_T(t)$的频谱

在$f_T(t)$的 Fourier 级数展开式中，称

$$a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t=A_n\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

为第 n 次谐波，其中 $\omega_n=n\omega=\dfrac{2n\pi}{T}$，$A_0=\dfrac{|a_0|}{2}$，$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$称为频率为 ω_n的第 n 次谐波的振幅，在$f_T(t)$的 Fourier 级数的复数形式中，第 n 次谐波为 $c_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_n t}+c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_n t}$，并且$|c_n|=|c_{-n}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，从而$f_T(t)$的第 n 次谐波的振幅为

$$A_n=2|c_n|\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$

它描述了各次谐波的振幅随频率变化的分布情况. 所谓频谱图，通常是指频率 ω_n与振幅 A_n的关系图. A_n也称为$f_T(t)$的振幅频谱（简称为频谱）. 由于 $n=0,1,2,\cdots$，所以频谱 A_n的图形是不连续的，称之为离散频谱，其频谱图清楚地表明了一个非正弦的周期函数$f_T(t)$包含了哪些频率分量及各分量所占的比重（如振幅的大小）.

2）非周期函数$f(t)$的频谱

非周期函数$f(t)$的 Fourier 变换 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，在频谱分析中又称为$f(t)$的频谱函数，它的模$|F(\omega)|$称为$f(t)$的振幅频谱（简称频谱）. 由于 ω 是连续变化的，这种频谱称为连续频谱，频谱图为连续曲线. 振幅频谱$|F(\omega)|$是频率 ω 的偶函数，相角频谱 $\varphi(\omega)=\arctan\dfrac{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t}$ 是频率 ω 的奇函数. 对一个时间函数作 Fourier 变换，就是求这个时间函数的频谱函数.

频谱图能清楚地表明时间函数的各频谱分量的相对大小，因此，频谱图在工程技术中有着广泛的应用. 作出一个非周期函数$f(t)$的频谱图，其步骤如下：

1° 先求出非周期函数$f(t)$的 Fourier 变换 $F(\omega)$；

2° 选定频率 ω 的一些值，算出相应的振幅频谱$|F(\omega)|$的值；

3° 将上述各组数据所对应的点填入直角坐标系中，用连续曲线连接这些离散的点，就得到了该函数$f(t)$的频谱图.

3. Fourier 变换的基本性质

为叙述方便，在下述性质中，凡是需要求 Fourier 变换的函数，假定都满足 Fourier 积分定理中的条件.

(1) 线性性质　设$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$，$\alpha,\beta$为常数，则

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)]=\alpha f_1(t)+\beta f_2(t).$$

(2) 位移性质　设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，则

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega t_0}F(\omega),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega\mp\omega_0)]=f(t)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega_0 t}\quad \text{（象函数的位移性质）}.$$

(3) 微分性质　设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果$f^{(k)}(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续或只有有限个可去间断点，且$\lim\limits_{|t|\to+\infty}f^{(k)}(t)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，则有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(\mathrm{j}\omega)^nF(\omega),$$

$$F^{(n)}(\omega)=(-\mathrm{j})^n\mathscr{F}[t^nf(t)]\quad \text{（象函数的微分性质）}.$$

特别，当$n=1$有

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{j}\omega F(\omega),$$

$$F'(\omega)=-\mathrm{j}\mathscr{F}[tf(t)].$$

(4) 积分性质　设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$，如果当$t\to+\infty$时，$g(t)=\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\to 0$，则

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega);$$

当$\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)\neq 0$时，有

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega).$$

(5*) 乘积定理 设$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)$,$\mathscr{F}[f_2(t)]=F_2(\omega)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f_1(t)}f_2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\,\mathrm{d}\omega,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)\overline{f_2(t)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\,\mathrm{d}\omega,$$

其中$\overline{f_1(t)}$,$\overline{f_2(t)}$,$\overline{F_1(\omega)}$及$\overline{F_2(\omega)}$分别为$f_1(t)$,$f_2(t)$,$F_1(\omega)$及$F_2(\omega)$的共轭函数. 特别,当$f_1(t)$,$f_2(t)$为实函数时,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{F_1(\omega)}F_2(\omega)\,\mathrm{d}\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\overline{F_2(\omega)}\,\mathrm{d}\omega.$$

(6*) 能量积分 设$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega,$$

这一等式又称为 Parseval 等式. 函数$S(\omega)=|F(\omega)|^2$称为能量密度函数(或称能量谱密度). 它可以决定函数$f(t)$的能量分布规律. 将它对所有频率积分就得到$f(t)$的总能量,因此,Parseval 等式又称为能量积分. 它表明非周期函数$f(t)$在时间域内的能量与在频率域内的能量不因$f(t)$取 Fourier 变换后而改变. 由于能量密度函数$S(\omega)$是ω的偶函数,则能量积分可进一步写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}S(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

4. 卷积与相关函数

(1) 卷积的概念

$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$,且其运算满足

$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$ (交换律),

$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$ (结合律),

$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$ (分配律),

$|f_1(t)*f_2(t)| \leqslant |f_1(t)|*|f_2(t)|$ （卷积不等式）.

（2）卷积定理 设 $f_k(t)(k=1,2,\cdots,n)$ 满足 Fourier 积分定理中的条件，且 $\mathscr{F}[f_k(t)]=F_k(\omega)(k=1,2,\cdots,n)$，则

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)*\cdots*f_n(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\cdot\cdots\cdot F_n(\omega),$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot\cdots\cdot f_n(t)]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\omega)*F_2(\omega)*\cdots*F_n(\omega)$$

（象函数卷积定理）.

特别，

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega),$$

$$\mathscr{F}[f_1(t)\cdot f_2(t)]=\frac{1}{2\pi}F_1(\omega)*F_2(\omega).$$

（3*）相关函数的概念

相关函数的概念和卷积的概念一样，也是频谱分析中的一个重要概念. 记函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数为

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t)f_2(t+\tau)\,\mathrm{d}t.$$

记函数 $f(t)$ 的自相关函数（简称为相关函数）为

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)f(t+\tau)\,\mathrm{d}t.$$

显然，$R(\tau)=R(-\tau)$，$R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)$.

（4*）相关函数和能量谱密度的关系

1）自相关函数和能量谱密度构成一个 Fourier 变换对：$R(\tau)\Leftrightarrow S(\omega)$，即

$$\begin{cases}R(\tau)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\omega,\\ S(\omega)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}R(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau.\end{cases}$$

利用 $R(\tau)$ 和 $S(\omega)$ 的偶函数性质，可进一步写为

$$R(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\omega,$$