志鸿优化系列丛书

丛书主编：任志鸿

数理化高手

互动教辅　家教专家

SHULIHUA

GAOS

方成老师教我学数学

源于家教情境的个性化、交互式学习方案

高中数学

思想、方法与技巧

知识出版社

数理化高手

SHU LI HUA GAO SHOU

高中数学

思想、方法与技巧

丛书主编　任志鸿
本册主编　王金芳
副主编　刘宝飞　张维英

知识出版社

图书在版编目(CIP)数据

数理化高手.高中数学思想、方法与技巧/任志鸿主编.—北京:知识出版社,2009.6(2010.5 重印)

ISBN 978-7-5015-5750-9

Ⅰ.数… Ⅱ.任… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 094301 号

责任编辑:崔小荷

知识出版社出版

http://www.ecph.com.cn

北京阜成门北大街 17 号 电话 010-88390797

新华书店经销

山东世纪天鸿书业有限公司总发行

山东鸿杰印务集团有限公司印刷

*

开本 890×1240 毫米 1/32 印张 10 字数 270 千字

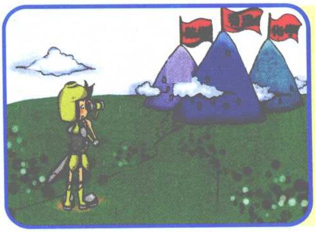
2009 年 7 月第 1 版 2010 年 5 月修订 2010 年 5 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5015-5750-9

定价:18.50 元

我的故事

我，一个很普通的中学生。一开始我的数理化成绩比较差，碰到较难理解的知识点，经常一头雾水。但是我有一个习惯，如果碰到不会、不熟悉的问题，会记录下来，通过问老师、问同学，非把它弄明白不可。



做的题多了，我发现数理化三科其实有很强的规律性。我把它们依次归纳出几十个针对性很强的点；这样我学习起来目标就非常明确了。

我在做每一类问题时，都会把这类问题的相似解决办法、解题技巧总结并记下来。有时我会把自己当成老师，与自己悄悄对话，讲解感悟每一种问题的难理解之处。我发现这种方法非常有效，相当于请了一个家教，特别有助于自己的理解。

学习时，我主动寻找某一类问题，集中训练，效果比较好。我发现自己对数理化解题好像有了窍门，以后考试碰到的每一个问题，我几乎都能够迅速地联想到它属于自己总结归纳的哪一个“点”，很快就解决了。而我做到这些只用了三个月的时间。

丛书人物档案

姓名 阿聪

性别　男
星座　双鱼座
血型　A
口头禅　我的地盘我做主
最喜欢的电影　《阿甘正传》
最喜欢的明星　乔丹
最自豪的事儿　周杰伦在我背上签名啦!

姓名 牛钝

性别　男
职业　物理teacher
最喜欢的运动　足球
最喜欢的明星　大小罗
我的教学宣言　我教故我在!

姓名 方成

性别　男
职业　数学teacher
最难改的习惯　爬楼梯时数数
最喜欢的数字　1、2、3……是数字都喜欢
我的教学宣言　世上无差生,只怕用心教!

姓名 袁素

性别　女
职业　化学teacher
最喜欢的明星　奥黛丽·赫本
最尴尬的经历　一次买衣服时问:这件衣服多少化合价?
我的教学宣言　世界上没有笨学生,只有笨老师!

方老师诊所病历卡

[临床反应]

某患者出现只会机械做题，不善体会数学思想、总结数学规律，从而越做越累、越做越乱的症状。

[诊断说明]

脑电图显示，该患者大脑中思辨、归纳细胞过少，且功能极度弱化，脑神经缺乏对数学思想的体悟、感知能力。

[治疗方案]

采用心理疗法，汇集典型问题，对数学思想方法在各知识板块中的应用进行集中训练，强化脑细胞对数学思想方法的感应功能，提高神经系统的敏感性。

[预期效果]

三个月后，能够对数学思想方法的应用建立起条件反射般的敏感；看到数学问题，首先想到借助数学思想方法进行技巧化处理，打开数学思路。

[注意事项]

副作用：药劲太过者，容易沉醉于逻辑严密而妙趣横生的数学思想中而不能自拔，为其美丽奇妙所迷倒，甚至茶饭不思，故酌量使用。

目录 CONTENTS

CONTENTS

CONTENTS

CONTENTS

专题一　数形结合思想

思想理念概述

思想体验

老　师　阿聪，昨天王宏同学问了我这样一道题，你看你会做吗？

方程 $\sqrt{2(x-1)^2+2(y-1)^2}=|x+y+1|$ 表示的曲线是 ……… (　　)

A. 抛物线　　B. 椭圆

C. 双曲线　　D. 圆

阿　聪　这道题既有根号又有绝对值，是不是先两边平方再化简？哎呀，做起来太麻烦了！

老　师　你这种做法的确是很麻烦的，并且在实际运算过程中，一旦计算失误就会前功尽弃的.我这儿有种方法，你不妨感受一下哦！

把上述方程变形为：$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}$，它表示的是点 (x,y) 到点 $(1,1)$ 的距离与点 (x,y) 到直线 $x+y+1=0$ 的距离相等.由抛物线的定义可知选 A.

阿　聪　哇！这种做法真是既简单又巧妙，您这是用的数形结合思想吧？

老　师　是的，数形结合其实就是利用数与形的辩证统一和各自的优势尽快地得到解题途径.这种思想方法在高中数学中的应用是极为广泛的，比如下面的例子：

1. (几何意义法)已知 $5x+12y=60$，则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最小值是 ……… (　　)

A. $\dfrac{60}{13}$　　B. $\dfrac{13}{5}$　　C. $\dfrac{13}{12}$　　D. 1

解析：$\sqrt{x^2+y^2}$ 可看成是直线上一点到原点的距离.

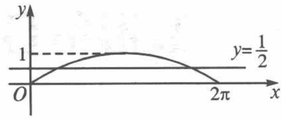
答案：A

2. (函数图象法)在同一平面直角坐标系中，函数 $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\right)(x\in[0,2\pi])$ 的图象和直线 $y=\dfrac{1}{2}$ 的交点个数是 ……………………………… (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

解析：把 $y=\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{3\pi}{2}\right)(x\in[0,2\pi])$ 化简为 $y=\sin\dfrac{x}{2}(x\in[0,2\pi])$，然后

作出其图象，再做出$y=\frac{1}{2}$的图象，观察即可.



答案：C

3.（几何图形法）设全集$U=\{(x,y)|x,y\in\mathbf{R}\}$，集合$M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$，那么$(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$等于 …………………………（　　）

A. $\varnothing$　　　　B. $\{(2,3)\}$

C. $(2,3)$　　　　D. $\{(x,y)|y=x+1\}$

解析：求出M、N中所表示的点的范围，画出其几何图形求解.

答案：B

4.（根的分布法）若方程$x^2-3ax+2a^2=0$的一个根小于1，而另一根大于1，则实数a的取值范围是________.

解析：设$f(x)=x^2-3ax+2a^2$，作出其大致图象，由$f(1)<0$即可求得.

答案：$\frac{1}{2}<a<1$

阿　聪　老师，请您给我系统的讲讲数形结合思想吧.

老　师　好的.

方法一览

在高考中，数形结合思想主要在以下几个知识模块中有所应用：

知识模块	常用方法
集合运算	文氏图法，数轴法，几何图形法
函数	函数图象法，根的分布法，几何意义法
不等式	函数图象法，几何意义法，函数性质法
三角函数	单位圆法，三角函数图象法
向量	平行四边形法则，三角形法则
线性规划	图象法，几何意义法
圆锥曲线	定义法，几何意义法，图象法
概率	区域面积法

1. 数形结合思想在集合运算中的应用

应用指南 YINGYONG ZHINAN

在集合运算中，有些题目从形态上感觉无从下手，此时可认真观察集合中元素的特征，将其准确的转化为图形关系，借助于图形将集合间的交、并、补直观、形象地表现出来，从而使问题获解. 在求解这类题目时，要善于运用数轴、几何图形、文氏图等图形语言准确的进行数学语言的转化.

精典示例 JINGDIAN SHILI

【例 1】定义集合 A 和 B 的运算 $A*B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$，下列命题：

(1) $A*(A\cap B)=(A\cup B)*B$；(2) $B*(A\cap B)=(A\cup B)*A$；(3) $(A\cup B)*(A\cap B)=(A*B)\cup(B*A)$；(4) $(A*B)\cap(B*A)=[A*(A\cap B)]\cup[B*(A\cup B)]$.

其中正确命题的个数是……………………………………………………（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 0

【例 2】设 $A=\{x|-2<x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，已知 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，试求 a、b 的值.

【例 3】已知集合 $M=\{(x,y)|y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)|y=x+b\}$，若 $P=M\cap N$，且 P 为单元素集合，试求 b 的取值范围.

互动探究 HUDONG TANJIU

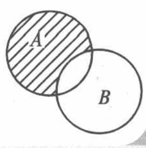
老　师　请你仔细观察上述示例，看一看用什么方法求解更为简洁呢？

阿　聪　我觉得例 1 用文氏图法；例 2 用数轴法；例 3 可考虑其几何图形.

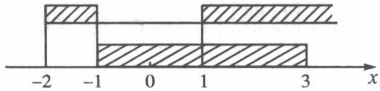
老　师　分析的不错. 例 1 中集合之间的关系太复杂，如果用文氏图处理，复杂的问题就变得简单化；例 2 是与不等式有关的问题，借助于数轴会使问题迎刃而解；对于例 3，直接求解很麻烦且易错，若结合其几何意义画出图形，题意就清晰了很多. 你不妨做做看.

阿　聪　我正想试试呢！

【例 1】运算 $A*B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 怎样理解？结合文氏图看一看，噢！$A*B$ 就是图中的阴影部分，再结合文氏图对四个命题进行分析，易知(1)，(2)，(3)正确，故选 C.

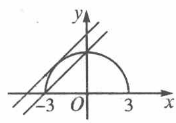


【例 2】该题与不等式有关，我先画数轴理顺一下题意，不妨让集合 B 所表示的范围在数轴上移动，



显然只有当 B 覆盖住集合$\{x|-1\leqslant x\leqslant 3\}$，才能使 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，且 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$. 根据二次不等式与二次方程的关系，可知 -1 与 3 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两根，$\therefore a=-(-1+3)=-2, b=(-1)\times 3=-3$.

【例 3】从集合中元素所表示的几何意义来看，集合 M 表示的是以原点为圆心，3 为半径的圆位于 x 轴及其上方的那部分；集合 N 的图象是一条直线. 因为 P 为单元素集合，这就意味着直线 $y=x+b$ 与半圆 $x^2+y^2=9(y\geqslant 0)$ 只有一个公共点. 其题意如图所示：



由图可知当直线过点$(3,0)$时，$b=-3$；当直线过点$(-3,0)$时，$b=3$；当直线 $y=x+b$与半圆相切时，$b=3\sqrt{2}$. 所以当 P 为单元素集合时，b 的取值范围为 $-3<b\leqslant 3$ 或 $b=3\sqrt{2}$.

老 师 你太棒了！对于例 3 特别要注意的是直线与半圆只有一个公共点，包含相交和相切两种情况，容易只注意到相交而忽略相切的情况导致解题错误. 总之，设法把抽象的符号语言转化为直观的图形语言是我们解决集合问题的一条捷径.

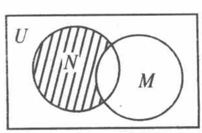
跟踪训练 GENZONG XUNLIAN

1 设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，则 $\complement_U(A\cap B)$等于（　　）

A. $\{2,3\}$　　B. $\{1,4,5\}$

C. $\{4,5\}$　　D. $\{1,5\}$

2 设全集 U 是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x|x^2>4\}$，$N=\{x|1<x<3\}$，则图中阴影部分所表示的集合是 ……………………………………（　　）



A. $\{x|-2\leqslant x<1\}$　　B. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$

C. $\{x|1<x\leqslant 2\}$　　D. $\{x|x<2\}$

3 已知集合 $M=\{x|x^2-3x-28\leqslant 0\}$，$N=\{x|x^2-x-6>0\}$，则 $M\cap N$ 为……………………………………………………………………（　　）

A. $\{x|-4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$　　B. $\{x|-4<x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x<7\}$

C. $\{x|x\leqslant -2$ 或 $x>3\}$　　D. $\{x|x<-2$ 或 $x\geqslant 3\}$

4 若非空集合 $A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x|3\leqslant x\leqslant 22\}$，则使 $A\subseteq B$ 成立的 a 的集合是 ……………………………………………（　　）

A. $\{a|1\leqslant a\leqslant 9\}$　　B. $\{a|6\leqslant a\leqslant 9\}$

C. $\{a|a\leqslant 9\}$　　D. $\varnothing$

5 集合 $P=\{(x,y)|y=k,x\in\mathbf{R}\}$，$Q=\{(x,y)|y=a^x+1,x\in\mathbf{R},a>0$ 且 $a\neq 1\}$，已知 $P\cap Q=\varnothing$，那么实数 k 的取值范围是 ……………………（　　）

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

6 设 U 是全集，$B\subseteq A\subseteq U$，则(1) $\complement_U A\subseteq\complement_U B$；(2)$A\cap B=B$；(3)$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$；(4)$(\complement_U A)\cap B=\varnothing$. 上面结论中不正确的是________.

7 已知集合 $A=\{x||x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x|x^2-5x+4\geqslant 0\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，求 a 的取值范围.

8 某班级共有 48 人，其中爱好体育的 25 人，爱好文艺的 24 人，体育和文艺都爱好的 9 人，试求体育和文艺都不爱好的有几人?

DAAN JIEXI 答案解析

1. B　方法 1：$\because A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$\therefore A\cap B=\{2,3\}$.

又 $\because U=\{1,2,3,4,5\}$，$\therefore \complement_U(A\cap B)=\{1,4,5\}$，故选 B.

方法 2：根据题意作出文氏图，可知选 B.

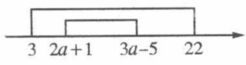
2. C　依题意，该图形中阴影部分表示的集合应该是 $N\cap\complement_{\mathbf{R}}M$，而 $M=\{x|x^2>4\}=\{x|x>2$ 或 $x<-2\}$，于是 $\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，因此 $N\cap\complement_{\mathbf{R}}M=\{x|1<x\leqslant 2\}$，选 C.

3. A　$M=\{x|-4\leqslant x\leqslant 7\}$，$N=\{x|x>3$ 或 $x<-2\}$，

由数轴可知 $M\cap N=\{x|-4\leqslant x<-2$ 或 $3<x\leqslant 7\}$，故选 A.

4. B　$\because A$ 为非空集合，$\therefore 2a+1\leqslant 3a-5$. $\therefore a\geqslant 6$.

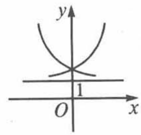
又 $\because A\subseteq B$，如图所示：



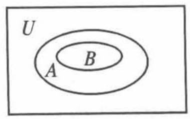
可知 $\begin{cases}2a+1\geqslant 3,\\3a-5\leqslant 22,\end{cases}$ $\therefore 1\leqslant a\leqslant 9$. 综上所得：$6\leqslant a\leqslant 9$，故选 B.

5. B　P、Q 两个集合都表示点集，由 $P\cap Q=\varnothing$ 知，两函数图象无交点，画出

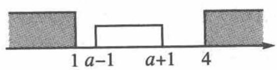
函数 $y=k$ 与 $y=a^x+1$ 的图象，观察图象可得 $k\leqslant 1$.



6. (3)　画出适合条件的文氏图即知(3)不正确.



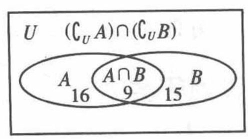
7. 解：$A=\{x\,|\,|x-a|\leqslant 1\}=\{x\,|\,a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$,
$B=\{x\,|\,x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4\}$，又∵ $A\cap B=\varnothing$,



由图可知 $\begin{cases}a-1>1\\a+1<4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>2\\a<3\end{cases}$

$\therefore 2<a<3$.

8. 解：设爱好体育的同学组成的集合为 A，爱好文艺的同学组成的集合为 B. 整个班级的同学组成的集合是 U. 则体育和文艺都爱好的同学组成的集合是 $A\cap B$，体育和文艺都不爱好的同学组成的集合是 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$. 根据题意作出示意图(如右图所示)，通过图形得到集合 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 的元素是 8 人，即体育和文艺都不爱好的同学有 8 人.



2. 数形结合思想在函数中的应用

应用指南 YINGYONG ZHINAN

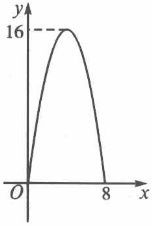
函数的图象和性质是函数部分的重点内容，函数的图象是研究函数的有力工具，是将代数问题转化为几何问题的思想基础，是数形结合思想的充分应用. 因此，在复习中要熟记基本函数的大致图象，并掌握作图的基本方法，在解题中，重视数形结合思想的运用.

精典示例 JINGDIAN SHILI

【例 1】已知 $f(x)=x^2+3x-5$，$x\in[t,t+1]$，若 $f(x)$ 的最小值记为 $h(t)$，写出 $h(t)$ 的表达式.

【例 2】已知函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称，并且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2-2x+3$，试求 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的表达式，并画出它的图象，根据图象写出它的单调区间.

【例 3】已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



(1)求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2)若 $g(x)=6\ln x+m$，问是否存在实数 m，使得方程 $f(x)=g(x)$ 有且只有三个根？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

互动探究 HUDONG TANJIU

老 师 阿聪，请你分别分析上面的三个示例，并解答这三个问题，体会求解过程中所用到的数学思想方法.

阿 聪 例 1 是一道二次函数在闭区间上的最值问题，求解时，应先画出二次函数的图象，借助图象利用单调性进行求解. 求解的过程中需用到数形结合、分类讨论的数学思想方法. 具体求解过程是这样的：

因为 $f(x)=x^2+3x-5=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{29}{4}$，其对称轴为 $x=-\frac{3}{2}$，

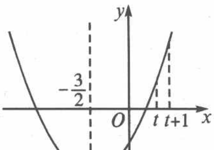


图1

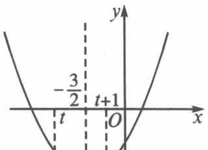


图2

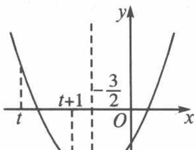


图3

(1)当 $-\frac{3}{2}\leqslant t$，即 $t\geqslant-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增（如图 1 所示），所以当 $x=t$ 时 $f(x)$ 取最小值，即 $f(x)_{\min}=f(t)=t^2+3t-5$.

(2)当 $t<-\frac{3}{2}<t+1$，即 $-\frac{5}{2}<t<-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[t,-\frac{3}{2}]$ 上单调递减，在 $[-\frac{3}{2},t+1]$ 上单调递增（如图 2 所示），所以当 $x=-\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值，即