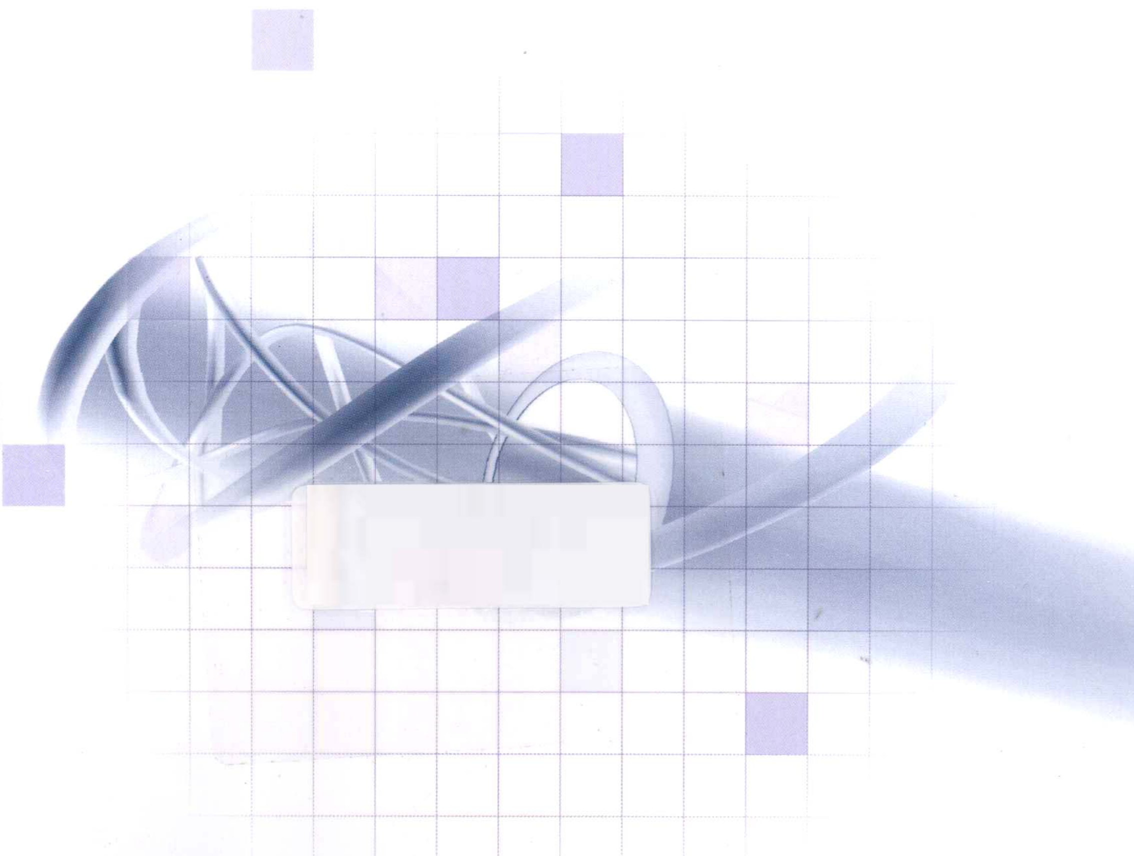
快速掌握多物理场数值仿真技术

Broadview®
www.broadview.com.cn

COMSOL Multiphysics 工程实践与理论仿真

——多物理场数值分析技术

王刚 安琳 编著



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

COMSOL Multiphysics 工程实践与理论仿真

——多物理场数值分析技术

王刚 安琳 编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京•BEIJING

内 容 简 介

本书介绍什么是数值模拟技术，以及数值模拟技术如何与工程科学相结合，解决实际的工程问题。

本书从数理方程的基本知识出发，介绍各种经典数理方程以及应用，进而介绍目前应用最广泛的矢量有限元数值方法。接下来结合具体的工程问题从单物理场仿真、多物理场弱耦合仿真和多物理场强耦合仿真三个方面，解释实际问题如何抽象归结为合理的数学模型。读者可以系统地理清工程物理的仿真思路，理解并习惯用工程物理仿真，也就是物理理论与工程实践相结合的思维方式去看待问题。

本书面向广大工程师，深入浅出地讲解有限元法及工程问题的多物理场仿真技术。全书涉及实际工程问题的方方面面，包括声学、结构力学、流体力学、热量传递、质量运移、电磁场计算、化学反应工程分析等，是真正的多物理数值仿真的入门指导书。作者希望通过本书，能让读者理解数值仿真技术的真谛，以及这些理论知识应该如何与实际相结合。

图书在版编目（CIP）数据

COMSOL Multiphysics 工程实践与理论仿真：多物理场数值分析技术 / 王刚，安琳编著. —北京：电子工业出版社，2012.10

ISBN 978-7-121-18581-6

Ⅰ. ①C… Ⅱ. ①王… ②安… Ⅲ. ①计算机仿真—应用软件—数值分析 Ⅳ. ①TP391.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 226575 号

责任编辑：徐津平
特约编辑：顾慧芳
印　　刷：北京东光印刷厂
装　　订：三河市鹏成印业有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：13.25　字数：254 千字
印　　次：2012 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：3000 册　定价：49.00 元

序

多物理场仿真——科研创新的新契机

如果纵览整个物理学发展史，不难发现物理学的发展就是数学方法的发展，物理问题的研究一直和数学密切相关。作为近代物理学始点的牛顿力学中，质点和刚体的运动用常微分方程来刻画。在 18 世纪中期，牛顿力学的基础开始由变分原理所刻画，这又促进了变分法的发展。变分法的发展成熟，对自 18 世纪以来的物理学有着深刻的影响，在连续介质力学、传热学和电磁场理论中，人们归结出许多偏微分方程，今天我们把它们通称为数学物理方程（也包括有物理意义的积分方程、微分方程和常微分方程），并且成为数学物理的主要内容。此后，为了满足等离子体物理、固体物理、非线性光学、空间技术、核技术等方面的需要，又有许多新的偏微分方程问题出现，例如孤子波、间断解、分歧解、反问题，等等。它们使数学物理方程的内容进一步丰富起来。

不管你是否意识到，数学方法的发展正在改变着我们认识这个世界的方式。一直以来，我们习惯把自然界的各种现象划分清晰的学科领域来进行研究。这种思维方式的形成很大程度上是由于人类研究物理现象的手段仍然十分有限。要借助有限的数学方法对自然界的各种现象进行研究，简化是必要的，这就是“单物理场”分析的思路。比如我们在连续介质力学计算中可以使用 Navier-Stokes 方程，解决大部分的流体问题；借助对流扩散方程，解决物质运动或者热量传递；借助麦克斯韦方程组，解决电磁场的问题。是的，我们用“简化”，建立了单物理场的认识体系。然而自然界本身，客观上是以极

其复杂的状态存在的——各种物理过程相互影响，错综复杂。在数学方法不够发达的时代，我们没有办法综合考虑这些复杂过程；今天数学方法已经极为丰富，于是人们已经可以联立偏微分方程组，从多物理场的角度重新认识这个世界。

例如，今天我们都已知道流体的流动会导致热量的传递。流体的流动路径对热量传递有很大影响，动量传递会影响到能量传递。从简化的角度，我们可以先解决流体问题，然后预测流体中的热量传递，这就是所谓的单向耦合，一个物理场单向影响另一个物理场，而不受到反向影响。然而，如果流体的密度和粘度依赖于温度而变化，就必须同时求解热量传递和动量传递，这些物理过程相互影响，使得方程变成双向耦合的偏微分方程组，这种耦合也称为强耦合。流固耦合问题是另一种强耦合的例子。例如，人体心脏瓣膜是一种弹性体，流体的压力会导致瓣膜的运动，而反过来瓣膜也会改变血液流动的区域。在气动弹性力学领域，飞机机翼由于受到气流压力的波动而开始振荡，而机翼的振荡又会导致周围气流的周期性压力波动。

再比如电磁场分析。单物理场分析，欧姆定律使用电压和电阻来定义电流。然而超导现象使人们认识到传统认识的局限，转而用磁场定义电流。今天，电磁相互依存早已成为共识。实际的情况往往更复杂。例如半导体仿真考虑载流子在电场作用下的对流扩散，同时产生焦耳热。热膨胀导致的形变会对扩散过程产生影响。实际上，材料的电导率、热导率、扩散率等特性通常也都具有热敏性。众多因素综合起来，半导体分析也表现为典型的多物理场强耦合问题。更比如磁流体、电流体、光化学反应、电化学反应、等离子体、地球科学，如此种种，不一而足。

这些多物理场强耦合问题的出现，说明我们正以一种更为深刻、更为贴近自然本质的方式，在重新认识这个世界。在牛顿和爱因斯坦把经典物理学的大厦描绘得无比辉煌的20世纪30年代，人们觉得物理学的所有基本问题都已解决，物理学不会再有大的发展了。但量子力学的诞生给我们打开的不只是一扇窗，而是一次革命。我们今天所经历的多物理场分析，也是重新认识这个世界的一次革命，我们正在经历又一个科研创新的大发展。

回顾物理学发展的最近这一百年，科研创新最为活跃的是1930年以后的这几十年。而量子力学带来的大发展之后，交叉学科的兴起则是目前最为耀眼的创新增长点。交叉

学科，或者说跨学科研究，正是人类改变科研思维方式的体现，我们不再愿意受到学科领域的局限，转而采用多物理场的视角重新认识、重新发现。

化学与物理交叉而成的物理化学或化学物理学（Physical Chemistry），研究化学热力学、催化、胶体与界面化学、光化学、电化学、有机固体、理论化学与化学信息学等等；生物与化学融合而成的生物化学或化学生物学（Biochemistry），利用化学合成中的方法来解答生物化学所发现的问题；物理与生物交叉而成的生物物理学（Biophysics），研究生物的物理特性，诸如光谱、成像、生物能、细胞、神经和信号传导、生物信息和生物统计等；化学、生物、医学、计算机、电子、物理、力学相互交叉融合而成生物医学工程（Biomedical Engineering），研究生物信息学、医学图像、图像处理、生物信号处理、生物力学、生物材料、系统分析、假体、医疗设备、诊断设备、成像设备、医用药品等等。今天在美国的 Science 杂志和英国的 Nature 杂志上面，几乎所有的论文都来自这些交叉学科，在美国，这样的专业在加州大学伯克利分校、伊利诺伊州香槟分校、加州理工学院、麻省理工学院、斯坦福、威斯康辛州麦迪逊分校、加州大学洛杉矶分校、加州大学圣地亚哥分校、宾夕法尼亚州立大学、约翰·霍普金斯大学等等著名院校都异常火爆。如果你再翻看近年来美国科学院、美国工程院的院士增选，翻看近年来诺贝尔物理学奖、化学奖、医学奖的得奖名单，更会惊叹交叉学科的魅力。

我们正在经历新一轮的物理学大发展，我们正在重新认识这个世界——用多物理场的方式。更激动人心的是，全球范围内交叉学科的兴起只是最近 30 年的事；如果局限在国内，那是最近 15 年的事。我们今天的科研环境充满了机会！

机会也意味着挑战！

多物理场研究的复杂使得数值分析从来没有像今天这样重要。当科技发展把我们带到多物理场研究的轨道上来，传统的基于观察与实验的研究方法构建于简化与单物理场分析的思维基础上，已经无法应对复杂的多物理场相互作用。越来越多的人发现获得实验结果有时并不困难，给出令人信服的理论解释才是真正的挑战。不论是科学研究还是产品开发，实验研究与仿真技术的结合已经是大势所趋，而且数值仿真正在发挥越来越重要的作用。

本书是一本优秀的多物理场仿真技术入门读物，带领我们回顾了数理方程的基本理论的发展历程，并且对有限元求解方法的理论和实践做了深入浅出的讲解。以这些理论知识为主线，本书以 COMSOL Multiphysics 仿真软件为平台，把单物理场仿真、多物理场弱耦合仿真和间接耦合分析方法、多物理场强耦合仿真和全耦合分析方法串连起来，揭示了这些仿真技术的本质和关键要点。这是一本入门级的教科书的读物，对希望了解、理解、掌握多物理场仿真技术的读者来说，它可以把零散的概念和片段式理解串联起来，形成系统化的多物理场仿真知识体系，值得一读。

中科院院士　姚建铨

中仿科技（CnTech）公司　安琳

2012.8　于北京

编者鸣谢：

中山大学理工学院黄智恒博士为本书撰写了第 2 章，中国科学院声学研究所张海澜研究员和中国科学院长春光学精密机械与物理研究所刘震宇研究员为本书第 6 章提供了大量丰富的内容并对全书给出了很多建设性的意见，编者在此表示衷心的感谢。本书的编写得到中仿科技（CnTech）公司的大力支持，在此表示由衷的感谢。

目　　录

第1章

数理方程简述

光、电、热、力等各种各样的物理现象围绕着我们，与我们的日常生活息息相关。从古时候起，人类就开始尝试理解世界，并提出多种理论来解释这个世界，最终促进了物理这门科学的产生和发展。在经历了物理学萌芽时期、经典物理学时期以及现代物理学时期的三个阶段发展后，大量物理学科成果应用于实践，有力地推动着科学技术革命的发展。物理学科的每次跨越式发展，均促进了生产力的跨越式发展。

数学，同样是一门历史久远的学科，它主要研究数量、结构、变化以及空间模型等概念相关的问题。发展至今，数学已被广泛应用于各种领域，包括科学、工程、医学和经济学等，同样也是新的科学技术革命的基石。

数学和物理学的发展一直是密不可分的，许多数学理论基于物理问题发展起来，而很多数学方法和工具，通常也只有在物理学中才能够得到实际应用。由此产生的综合性学科，就是我们通常所说的数学物理方法。数学物理是数学和物理学的交叉领域，通过应用特定的数学方法来研究物理学的问题，这种以研究物理问题为目标的数学理论和数学方法就被称为数学物理方法。

数学物理方法的本质是通过数学方法描述物理现象，研究其数学解法，然后根据数学解答来诠释物理现象。例如，日常生活中的温度变化，我们可以用一个变量 T 来描述

温度，用一个传热方程来描述能量的传递过程，通过求解得到 T 的数值就可以了解温度随时间和空间的变化，掌握温度变化规律；在歌剧院中，我们用变量声压 p 来描述声音的大小，利用声压方程描述声音传播过程，通过计算得到 p 的分布，研究每个位置上声音的大小，分析出最佳的观赏位置；在家用电器中的电路板上，可以通过联立麦克斯韦方程（描述电磁场）、热传导方程（描述温度）和弹性力学方程（描述力学）来进行电-热-结构耦合计算分析，判断合适的工作电压、散热条件以及失效条件和寿命，并根据结果设计出更优的电路和电器。

用来描述物理场的数学方程被叫做数学物理方程，简称数理方程，即在物理学、力学、工程技术等问题中，经过合理简化后建立的数学方程，可以用来反映客观世界物理量分布或变化的偏微分方程，有时也包括积分方程和某些常微分方程。因此我们常常把偏微分方程看做是数理方程的代名词，见参考文献[1]，[2]，[3]。

既然绝大多数物理问题都可以归结为对应的数学问题，那么科学的很大部分研究就在于求解这些数学物理方程。近年来，随着电子计算机技术的发展，“数值计算”或者说“计算物理”在很大程度上替代了传统的解析算法，成为科学研究的重要工具，甚至这种解决问题的方法逐渐被化学、经济学等非物理领域的专家及学者所接受，成为产生新思想、新对象、新问题以及新方法的一个重要源泉。

自 20 世纪 50 年代起，有限元方法首先在连续介质力学中得到应用，随后很快就广泛地应用于求解热、电磁、流体力学等各种数理方程中。有限元方法的基本思路是将微分方程离散化，通过采用适当的方法，将微分方程近似转化为代数方程组，从而可以使用标准的数值计算方法来求解。

基于有限元方法求解工程设计问题的计算软件 COMSOL Multiphysics 之所以在其商业化 20 年左右时间里能得到广泛应用的根本原因就在于它是植根于数学物理方法，直面数学物理方程，从最底层的理论出发，揭示物理现象的本质，始终灵活地面对不断发展的前沿科学，适应千变万化的实际应用背景，让数值计算方法面对不断深入的各类研究处变不惊。

本章是全书的基础，但限于篇幅和主题，我们只能介绍最基本的数理方程概念，以及一些基本的求解方法。在这里我们建议所有读者，尤其是偏重理工科研究的读者，通过各种渠道了解与本专业相关的数学物理方法。请记住，即便是不从事数值计算工作，数理方程也是所有理工科研究的基础，它将让你深入了解物理现象背后的本质。

1.1　数理方程

1.1.1　什么是数理方程

在很多经典物理问题中，一个自变量的函数就足够说明问题。例如，当我们计算一个物体在水中受到的浮力时，往往只需要知道它的体积，以及它和水的密度就可以通过浮力方程计算出来了。类似这种属于物质的本质属性的物理量，用数值就可以描述清楚，我们将这种数值称为标量。然而随着科学技术日新月异的发展过程，许多问题用一个自变量的函数来描述已经满足不了我们的要求，越来越多的问题涉及各种层面的影响，需要用多个变量的函数来描述。例如，当我们给一个飘浮在水中的物体加热时，由于温度会随着与热源的距离而产生差异，其结果就是密度也会出现差异，这时候来计算浮力，就需要在浮力方程中引入与空间相关的自变量。此外，从物理学的角度来分析，浮力是具有方向性的。类似于这种同时具有数值和空间（方向）的描述，我们通常称为矢量。

当使用压强来描述作用在某个单位截面上的力时，实际上隐含了前提条件：力的方向在该截面的法向上，因此这种说法只适用于无粘性的流体和气体，即具有各向同性。当应用于粘性流体和固体时，这个力的方向就不一定正好在截面的法向上。在这种情况下，完整意义的压强概念就需要同时用 9 个标量才能表达，即二阶的“压强张量”。依此类推，我们引入各种张量来表征不同的物理场，而且并不仅仅局限于二阶，还有更高的四阶、六阶等张量变量的描述。

那么怎样才能通过描述这些物理量来分析真实的物理世界呢？感谢数学家们的努力，有了微（积）分这样一个得心应手的工具。微分是指对函数的局部变化率的一种线

性描述，通俗点说，就是描述函数值随着自变量遇到微小变化时产生的相应变化，例如，通过微分求曲线的斜率就是其中一种比较典型的应用。积分与微分互为逆运算，当我们知道了一个函数的导函数时，反求其原函数的过程，就称为积分。积分被大量应用于求和。

利用微分这个工具来对描述真实世界的变量进行数学描述，就得到微分方程。通过求解微分方程，就可以准确地描述我们所面对的大部分物理现象。如果在一个微分方程中只含有一个自变量及其微分项，通常叫做常微分方程，有时候也简称为微分方程（Ordinary Differential Equation，ODE）；如果在一个微分方程中出现了多元函数的偏导数，那么这种微分方程就被称为偏微分方程（Partial Differential Equation，PDE）；将多个偏微分方程通过相互调用变量的关系耦合在一起，就被称为偏微分方程组，对偏微分方程组的联立求解，就实现了多物理场的求解。

以常见的温度分布问题为例，通常这也被称为传热问题，我们研究对象系统中的能量（热量）分布及变化，其中一种最常见的现象是热量从温度高的地方向温度低的地方传递，即我们常常提到的一种热量传递方式：热传导。从数学的角度来研究这种物理现象，可以从研究对象中取一个体积微元（如图 1.1 所示）。

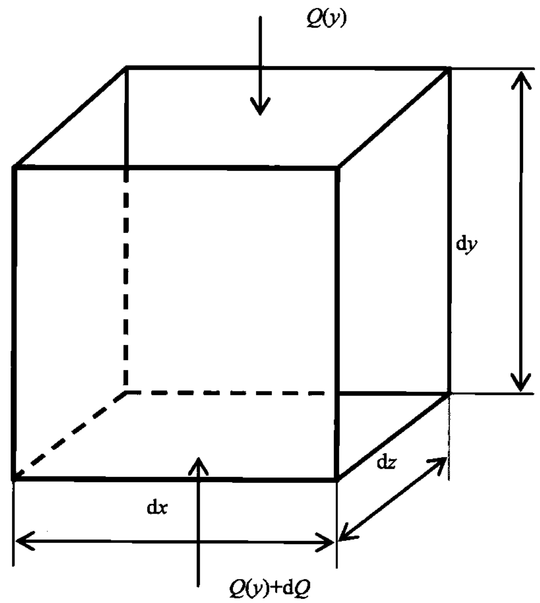


图 1.1　体积微元中的热量传递示意图

按照能量守恒定律，在微元内无热源的情况下，流入体积元和流出体积元的能量必须相等。首先，让我们来看一下在 y 方向上，通过微分的方法可以描述从上表面流入的热量为 $Q(y)$和从下表面流入的热量 $Q(y)+\mathrm{d}Q$。注意，热量流量的正负号表示实际的热量流动方向。从物理意义上来描述，其中的 $\mathrm{d}Q$，可以看做是上下表面温度差值 ∇T 与热传导系数 k 的函数，即 $\mathrm{d}Q=k\nabla T$ 。

值得注意的是，在 x、y、z 这三个方向上，都可以用这种关系来描述。因此，接下来可以利用散度公式描述在这个体积微元中的能量守恒关系，得到了描述无源状态下基本稳态传热方程的方程式（1.1）

$$\nabla\cdot(-k\nabla T)=0 \tag{1.1}$$

这个方程实际上就是著名的 Laplace 方程，其中 T 表示温度，k 表示热传导系数，∇ 是 Hamilton 算子，用于计算梯度，其中的点乘运算则用来计算散度。在方程的右端为 0，表示无源项。

事实上，这种数学物理方程建立、推导分析方法被广泛应用于各种物理领域中，也就是所谓的“微元法”。例如很多人关心的流动问题，同样可以从连续流体介质中取出这样一个体积微元，这个体积微元必须遵循物质守恒定律、动量守恒定律和能量守恒定律。经过方程推导，最终会得到描述流动的 Navier-Stokes 方程，见参考文献[4]。具体推导过程本书不做详细讨论，请有兴趣的读者自行查阅相关书籍。

让我们再看另一个比较典型的问题——弦振动。弦是一种又细又长的弹性物质，如小提琴、二胡等所用的弦。当我们进行演奏时，首先需要将弦绷紧，使它具有较大的张力。然后用弓在弦上拉动，与弦产生接触和运动，使接触的这一段弦开始振动。由于弦处于张紧的状态，因此这一段振动会传播到整根弦上，使整根弦发生振动，从而产生我们听到的优美的音乐。

那么，怎样来描述这个过程？首先，让我们将这根张紧的弦看做是一根直线，把它当做 x 轴来对待。然后，定义一个横向位移自变量为 u，它是一个与位置（坐标）和时间相关的量，用 $u(x,t)$来表示弦上横坐标 x 的点在时刻 t 的横向位移量。按照牛顿第二定