普通高等教育“十一五”国家级规划教材

实变函数论与泛函分析

(第3版)　(下册)

曹广福　严从荃　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

实变函数论与泛函分析（第3版）

（下册）

Shibian Hanshulun yu Fanhan Fenxi

曹广福　严从荃　编

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书分上、下册。下册系统介绍了泛函分析的基础知识，共分三章：距离空间、Banach空间上的有界线性算子以及Hilbert空间上的有界线性算子，授完约需72学时。其中关于几类函数空间以及这些空间上特殊类算子的章节为选学内容，读者可以根据需要选择，不影响对泛函分析理论的理解与掌握。

本书文字流畅，论证严密，对概念、定理的背景与意义交代得十分清楚，介绍了新旧知识之间、泛函分析与其他数学分支之间的内在联系。本书特别注重培养学生如何提出问题，以及如何从分析问题的过程中寻求解决方法的能力。

本书可供综合大学与师范院校数学各专业本科生作为教材或教学参考书，也可作为工科部分专业高年级本科生与研究生的教材或教学参考书。同时，本书对于有一定数学基础的读者而言，也是一部很好的自学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论与泛函分析．下册/曹广福，严从荃编．—3版．—北京：高等教育出版社，2011.6
ISBN 978-7-04-031673-5

Ⅰ.①实… Ⅱ.①曹…②严… Ⅲ.①实变函数论-高等学校-教材②泛函分析-高等学校-教材 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第217537号

策划编辑 杨 波　　责任编辑 田 玲　　封面设计 于文燕　　版式设计 马敬茹
责任校对 刘春萍　　责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京印刷一厂
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 11.25
字 数 200千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 1999年7月第1版
2011年6月第3版
印 次 2011年6月第1次印刷
定 价 18.20元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究
物 料 号 31673-00

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 距离空间

正如在实变函数中讨论的那样,有些集合不同于 n 维欧氏空间,但与欧氏空间有着许多类似的性质,例如闭区间 $[a,b]$ 上全体连续函数构成的集合 $C([a,b])$ 及 $[a,b]$ 上所有 p 次方 Lebesgue 可积的函数全体所构成的集合 $L^p([a,b])$. 数学中的许多领域常常要处理作用在这些函数集合上的变换. 例如,微分算子

$$L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+q(x)$$

作用在一类函数 $y(x)$ 上,将其变为另外的函数. 为了解微分方程,需要寻找特殊的 $y(x)$,使得 $Ly(x)=0$,并且这个函数通常还要满足初值条件或边界条件.

解微分方程的一个常用方法是迭代算法. 给定初始值,有限次的迭代所得到的近似值往往具有很好的性质,但经过无限次迭代后,所得到的近似解序列是否收敛? 按何种方式收敛? 其极限具有什么性质? 它是否为原方程的精确解? 这些都是必须考虑的问题. 它促使人们将函数集合作为一个整体看待,在其上引入线性运算、距离等概念,从而得到抽象的距离空间,这正是本章所要研究的主题.

§1 线性距离空间

1.1 线性空间

回忆有限维线性空间的定义,不难启发我们该如何定义一般线性空间.

定义 1 设 X 是非空集合,K 是数域(实数或复数域),若于 X 上定义了一种**加法**运算,使得对任意 $x,y\in X$ 都对应 X 中一个元素 z,用 $z=x+y$ 表示;又定义了**数乘**运算,使得对任意 $\alpha\in K$ 及任意 $x\in X$ 都对应 X 中一个元素 y,用 $y=\alpha x$ 表示. 假如 X 上的加法与数乘运算还满足下列条件:

(i) $x+y=y+x \quad (\forall x,y\in X)$,符号 $\forall$ 表示“任意”;

(ii) $x+(y+z)=(x+y)+z \quad (\forall x,y,z\in X)$;

(iii) 存在唯一元素 $\theta\in X$,使得对任意 $x\in X$,$x+\theta=x$,称 θ 为 X 中的**零元素**,有时也简记为 0;

(iv) 对任意 $x\in X$,存在唯一的元素 $-x\in X$,使得 $x+(-x)=0$;

(v) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\forall x,y\in X,\alpha\in K)$;

(vi) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad (\forall x\in X,\alpha,\beta\in K)$;

(vii) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x \quad (\forall x\in X,\alpha,\beta\in K)$;

(viii) $1\cdot x=x$,

则称 X 按上述加法与数乘成为数域 K 上的**线性空间**,若 K 是实数域,则简称 X 为**实线性空间**,若 K 是复数域,则称 X 为**复线性空间**. 线性空间也称作**向量空间**,空间中的元素称作**向量**或**点**.

一般情况下,我们所说"线性空间"均指复线性空间,实际上复线性空间必然也是实线性空间,所以如无特别声明,我们考虑的都是复线性空间. 但所有的结论关于实线性空间情形也是正确的.

不难验证,在线性空间 X 中,对任意向量 x 和数 α 都有

(ix) $0x=0$;

(x) $(-1)x=-x$;

(xi) $\alpha 0=0$.

为方便计,以后总将 $x+(-y)$ 记作 $x-y$. 显然在线性空间 X 中,消去律也成立,即有

(xii) $x+y=x+z \Rightarrow y=z$;

(xiii) $\alpha x=\alpha y$ 且 $\alpha\neq 0$,则 $x=y$;

(xiv) $\alpha x=\beta x$ 且 $x\neq 0$,则 $\alpha=\beta$.

定义 2 设 X 是线性空间,M 是 X 的子集,若对任意 $x,y\in M$ 及数 α,都有 $x+y\in M,\alpha x\in M$,则称 M 为 X 的**(线性)子空间**.

显然 0 与 X 本身都是 X 的线性子空间,通常称它们是平凡的子空间. 若 X 的子空间 M 既不为空集,也不等于 X,则称 M 为 X 的**真子空间**.

在后面要定义的线性距离空间 X 中,若 X 的子空间 M 是 X 的闭子集,则称 M 为 X 的**闭子空间**.

在有限维欧氏空间中,研究空间结构及几何的一个基本方法是建立坐标系(可以是直角坐标,也可以是斜坐标),用线性代数的语言来叙述,即寻找最大线性无关组. 在抽象的线性空间中,线性无关概念也是十分重要且常用的,其定义与有限维情形类似.

定义 3 设 $x_1,\cdots,x_n\in X,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个数,形如 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ 的元素称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的**线性组合**.

设 $S\subset X$ 是 X 的非空子集,S 本身对于线性运算未必封闭,但我们可以将 S 中所有元素的有限线性组合放在一起构成新的集合 M_S,显然 M_S 是 X 的子空间,通常称为由 S 张成的子空间,简记作 $M_S=V\{S\}$. 易知 M_S 具有下面的性质:

M_S 是 X 中所有含 S 的子空间之交.

这说明 M_S 是 X 中含 S 的最小子空间，即若 N 是含 S 的子空间，则必有 $N\supset M_S$.

定义 4　设 $x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个元素，若存在不全为 0 的数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0,$$

则称 $x_1,\cdots,x_n$ 是**线性相关的**，否则称为**线性无关**. 如果 S 中任意有限个向量均线性无关，则称 X 的一个子集 S 为**线性无关的**，否则称 S 为**线性相关的**.

定义 5　设 X 是线性空间，$x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中的 n 个向量，若它们满足：

(i) $x_1,\cdots,x_n$ 线性无关；

(ii) 对任意 $x\in X$，$x,x_1,\cdots,x_n$ 都是线性相关的，

则称 $x_1,\cdots,x_n$ 为 X 的**基**，X 称为 n **维线性空间**，n 称为 X 的**维数**，记作 $n=\dim X$.

只含 0 元素的空间称为**零空间**. 如果 X 不是有限维的，则称为**无限维线性空间**.

与代数学不同的是，分析学中所研究的空间不仅具有代数结构，更重要的一点是：点和点之间具有“远近”的概念！也就是所谓的距离，有了距离，才能定义“极限”与“连续性”，这正是我们下面要讨论的问题.

1.2　距离空间

如果将 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的距离“抽象”出来，仅采用其性质，则不难得到一般空间中的距离概念.

定义 6　设 X 是一集合，ρ 是 $X\times X$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的映射，满足：

(i)（非负性）　对任意 $x,y\in X$，有 $\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(ii)（对称性）　对任意 $x,y\in X$，$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(iii)（三角不等式）　对任意 $x,y,z\in X$，有 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$，

则称 X 为**距离空间**（或**度量空间**），记作 (X,ρ)，$\rho(x,y)$ 称为 x 与 y 的**距离**.

在线性空间中定义距离，自然应该考虑到它与线性运算的相容性，具体说来即下面的

定义 7　设 (X,ρ) 是距离空间，且 X 还是线性空间，若 ρ 满足：

(i) 如果 $\rho(x_n,x)\to 0$，$\rho(y_n,y)\to 0$，则 $\rho(x_n+y_n,x+y)\to 0$；

(ii) 若 $\rho(x_n,x)\to 0$，则 $\rho(\alpha x_n,\alpha x)\to 0$（$\forall\,\alpha\in K$）；

(iii) 若 $\alpha_n\to\alpha$，$x\in X$，则 $\rho(\alpha_n x,\alpha x)\to 0$，

则称 (X,ρ) 为**线性距离空间**.

有了距离，便可以定义“收敛”概念了，这就是下面的

定义 8　设(X,ρ)是距离空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是 X 中的点列，若
$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0,$$
则称$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$按距离 ρ 收敛到 x，记作 $x_n\xrightarrow{\rho}x$. 在不致引起混淆的情况下，也记 $x_n\to x$.

应该看到，从 n 维欧氏空间到抽象距离空间绝不是一种简单的推广，它使得我们可以将相当广泛的一类集合用统一的方法来处理. 事实证明，泛函分析的思想和方法已成为现代科学技术研究中一种普适的框架，从而渗透到科学的各个领域. 我们不妨熟悉一下几类重要的距离空间，由此初步领略一番泛函分析的"抽象"风光！

例 1　记 $l^{\infty}=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in K,n=1,2,\cdots,\sup_n|x_n|<\infty\}$，在 l^{∞} 中定义线性运算如下：

(i) 对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty},x+y\triangleq\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty}$；

(ii) 对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\alpha\in K,\alpha x\triangleq\{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

不难验证 l^{∞} 是线性空间.

对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^{\infty}$，定义
$$\rho(x,y)=\sup_n|x_n-y_n|,$$
容易验证 ρ 是 l^{∞} 上的距离，从而(l^{∞},ρ)是线性距离空间.

让我们来看一看，l^{∞} 中点列的收敛意味着什么. 设 $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$是 l^{∞} 中的点列，$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^{\infty}$，且 $\rho(x^{(k)},x)=\sup_n|x_n^{(k)}-x_n|\to0(k\to\infty)$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 k_0，使得当 $k\geqslant k_0$时，有
$$\rho(x^{(k)},x)<\varepsilon,$$
从而对一切 n，有
$$|x_n^{(k)}-x_n|<\varepsilon\quad(\forall k\geqslant k_0),$$
这说明，$x^{(k)}$按坐标一致收敛到 x.

反之，设 $x^{(k)}$按坐标一致收敛到 x，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 k_0，使得当 $k\geqslant k_0$时，对一切 n，有
$$|x_n^{(k)}-x_n|<\varepsilon,$$
从而 $\sup_n|x_n^{(k)}-x_n|\leqslant\varepsilon$，即 $\rho(x^{(k)},x)\leqslant\varepsilon$. 这说明 $x^{(k)}\xrightarrow{\rho}x$ 等价于 $x^{(k)}$按坐标一致收敛到 x.

例 2　设 $1\leqslant p<\infty$，记 $l^p=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\mid x_n\in K,n=1,2,\cdots$且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$，对任意 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty},y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$及 $\alpha\in K$，定义 $x+y\triangleq\{x_n+y_n\}_{n=1}^{\infty},\alpha x\triangleq\{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$，可以证明 l^p是一个线性空间. 事实上，αx 显然在 l^p中，为证 $x+y\in l^p$，只需注意到对任意复数 a,b，下列不等式成立：

$$|a+b|^p \leqslant (|a|+|b|)^p \leqslant [2\max\{|a|,|b|\}]^p \leqslant 2^p(|a|^p+|b|^p),$$

由此立知 l^p 确是线性空间. 在 l^p 上定义

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

完全类似 L^p 空间情形(参见本书上册第四章 §5)可证

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

故 ρ 满足距离的定义,从而 (l^p,ρ) 是线性距离空间.

现设 $x^{(k)}=\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ 是 l^p 中的点列,按距离 ρ 收敛到 l^p 中的点 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0 \quad (k\to\infty),$$

于是对任意 $\varepsilon>0$,存在 k_0,使得当 $k \geqslant k_0$ 时,有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2},$$

从而对任意 N,有

$$\sum_{n\geqslant N}|x_n^{(k)}-x_n|^p < \frac{\varepsilon}{2^p}.$$

由于 $\{x_n\}\in l^p$,故存在 N_0,使得 $\sum\limits_{n\geqslant N_0}|x_n|^p<\dfrac{\varepsilon}{2^p}$,于是

$$\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}+\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}=\varepsilon^{\frac{1}{p}},$$

即

$$\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon.$$

此外,对任意 n,显然有 $x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$.

另一方面,若对任意 n,$x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$,且对任意 $\varepsilon>0$,存在 k_0,N_0,使得对任意 $k>k_0$ 有

$$\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon,$$

则由 ε 的任意性及

$$\begin{aligned}
\rho(x^{(k)},x)&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant\left(\sum_{n<N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant\left(\sum_{n<N_0}|x_n^{(k)}-x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n^{(k)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n\geqslant N_0}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

不难得到$\rho(x^{(k)},x)\to 0(k\to\infty)$,由此可见$l^p$中的点列$\{x^{(k)}\}=\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\}$收敛到$x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$当且仅当

(i) 对每个n,$x_n^{(k)}\to x_n(k\to\infty)$;

(ii) 对任意$\varepsilon>0$,存在k_0,N_0,使得对任意$k>k_0$及$N\geqslant N_0$,$\sum\limits_{n\geqslant N}|x_n^{(k)}|^p<\varepsilon$.

1.3 线性赋范空间

我们把线性空间中的点称作向量并不奇怪,因为它和平面、三维空间中的向量有着类似的特征.有限维欧氏空间中的向量按自然方式有长度,但一般线性空间中的向量却未必有“长度”,除非我们事先赋予某种定义.

定义 9 设X是数域K上的线性空间,ρ是X到实数域$\mathbf{R}$的映射(这样的映射称为X上的实值泛函),满足:

(i) (非负性) 对任意$x\in X$,$\rho(x)\geqslant 0$,且$\rho(x)=0$当且仅当$x=0$;

(ii) (正齐性) 对任意$x\in X,\alpha\in K$,$\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$;

(iii) (三角不等式) 对任意$x,y\in X$,$\rho(x+y)\leqslant\rho(x)+\rho(y)$,

则称X为K上的**线性赋范空间**,记作(X,ρ),$\rho(x)$称为x的**范数**.

按习惯记法,通常用“$\|\cdot\|_X$”记范数,即$\|x\|_X\triangleq\rho(x)$.

实变函数中熟知的连续函数空间$C([a,b])$按$\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$构成线性赋范空间,$L^p(E)$空间按$\|f\|_p=\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$也构成线性赋范空间.前面例1、例2中的空间$l^\infty$,$l^p$分别按$\|x\|_\infty=\sup\limits_{1\leqslant n<\infty}|x_n|$及$\|x\|_p=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$构成线性赋范空间.下面再来看两个例子.

例 3 设$V[a,b]$是区间$[a,b]$上的实有界变差函数全体,依照通常的线性运算,它是线性空间,对$f\in V[a,b]$,定义

$$\|f\|=|f(a)|+V_a^b(f),$$

则$V[a,b]$按$\|f\|$成为线性赋范空间.

记$V_0[a,b]=\{f\mid f\in V[a,b],f$在$(a,b)$中每一点是右连续的,且$f(a)=0\}$,则$V_0[a,b]$是$V[a,b]$的线性子空间,在$V_0[a,b]$上,范数$\|f\|$等于全变差$V_a^b(f)$.

例 4 设D是复平面$\mathbf{C}$内的单位圆盘,即$D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$,记

$$L_a^2(D)=\left\{f\,\middle|\,f\text{ 在 }D\text{ 中解析,且}\int_D|f(z)|^2\mathrm{d}A<\infty\right\},$$

其中$\mathrm{d}A$是D上的面积元素,显然$L_a^2(D)$按通常的线性运算成为线性空间.对任意$f\in L_a^2(D)$,定义

$$\|f\|_2=\left(\int_D |f(z)|^2\mathrm{d}A\right)^{\frac{1}{2}},$$

不难验证 $\|f\|_2$ 是 $L_a^2(D)$ 中的范数，于是 $(L_a^2,\|\cdot\|_2)$ 是线性赋范空间，它称为 **Bergman 空间**.

在线性赋范空间 $(X,\|\cdot\|_X)$ 中，由范数可以诱导一个距离，即

$$\rho(x,y)=\|x-y\|_X \quad (\forall x,y\in X),$$

不难证明 ρ 的确是 X 上的距离，且线性运算按此距离连续，故而 (X,ρ) 是线性距离空间. X 中的序列 $\{x_n\}$ 若按此距离收敛到某个元 x，即

$$\|x_n-x\|_X\to 0 \quad (n\to\infty),$$

则称它按范数收敛到 x，记作 $x_n\xrightarrow{\|\cdot\|_X}x$ 或 $x_n\to x$.

应该注意的是，对给定的线性空间 X，在 X 上通常可以定义多个范数，这就存在不同范数之间的比较问题，为此引入下面的

定义 10 设 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 都是线性空间 X 上的范数，如果存在常数 $M>0$，使得对任意 $x\in X$，有

$$\|x\|_1\leqslant M\|x\|_2,$$

则称 $\|\cdot\|_2$ **强于** $\|\cdot\|_1$. 如果既有 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$，又有 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$，则称 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ **等价**.

§2 距离空间的完备性

2.1 完备性的定义及例子

在欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中，序列的收敛性有一个基本的判别准则，这就是 Cauchy 准则，我们在本书的上册中已看到 L^p 空间中 Cauchy 准则也成立，在一般的距离空间中，类似结论是否总是正确的呢？我们先来看一个例子.

例 1 设 $X=\{r\mid r$ 是 $\mathbf{R}$ 中的有理数$\}$，$\mathbf{Q}$ 是有理数域，则按通常的运算，X 是 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间，按通常的距离 $\rho(x,y)=|x-y|$，(X,ρ) 成为线性赋范空间.

众所周知，$\mathbf{R}$ 中有理数全体在 $\mathbf{R}$ 中稠密，设 $\{r_n\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中收敛到某个无理数的有理数列，则 $\{r_n\}$ 显然是 Cauchy 列，然而 $\{r_n\}$ 在 X 中不收敛. 可见并非在所有的距离空间中 Cauchy 准则都成立. 因此有必要引入下面的

定义 1 设 (X,ρ) 是距离空间（或赋范空间），如果 X 中的点列 $\{x_n\}$ 满足

$$\rho(x_n,x_m)\to 0 \quad (n,m\to\infty),$$

则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的**基本列（或 Cauchy 列）**. 若 X 中任意基本列都在 X 中收敛，则称 (X,ρ) 是**完备的距离空间（或赋范空间）**.

本书上册已讨论过 $L^p(1\leqslant p<\infty)$ 空间的完备性,除此而外,完备空间的例子是很多的. 例如,$C([a,b])$ 按距离 $\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$ 是完备的. $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 也是完备的,不过其完备性证明并不是一件很轻松的事,有兴趣的读者不妨一试.

注 可以证明 $L^p(1\leqslant p<\infty)$, $l^p(1\leqslant p<\infty)$ 及 l^∞ 分别按范数 $\|f\|_p\triangleq\left(\int_E|f|^p\mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$, $\|x\|_p\triangleq\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ 及 $\|x\|_\infty\triangleq\sup_n|x_n|$ 构成完备的线性赋范空间.

例 2 记 $L^\infty(E)$ 为可测集 E 上几乎处处有界的可测函数全体,对任意 f, $g\in L^\infty(E)$,定义

$$\begin{aligned}\rho(f,g)&=\operatorname*{esssup}_{x\in E}|f(x)-g(x)|\\&\triangleq\inf_{mE_0=0,E_0\subset E}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)-g(x)|\right),\end{aligned}\tag{1}$$

则 ρ 是 $L^\infty(E)$ 上的距离,

$$\|f\|_\infty=\rho(f,0)\triangleq\inf_{mE_0=0,E_0\subset E}\left(\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|\right)\tag{2}$$

是 $L^\infty(E)$ 上的范数. $(L^\infty(E),\|\cdot\|_\infty)$ 是完备的线性赋范空间.

可以证明,(2)式中的下确界 $\inf\limits_{mE_0=0,E_0\subset E}$ 是可达的,即对任意 $f\in L^\infty(E)$,存在 E 的零测子集 E_0,使得

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in E-E_0}|f(x)|$$

(请读者自行验证).

现设 f_n 是 $L^\infty(E)$ 中的 Cauchy 列,对每个 f_n,存在零测集 $E_n\subset E$,使得

$$\|f_n\|_\infty=\sup_{x\in E-E_n}|f_n(x)|,$$

对任意 n,m,也存在零测集 $E_{nm}\subset E$,使得

$$\rho(f_n,f_m)=\|f_n-f_m\|_\infty=\sup_{x\in E-E_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)|,$$

记 $E_0=\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)\cup\left(\bigcup\limits_{n,m=1}^{\infty}E_{nm}\right)$,则 $mE_0=0$,且对任意 $n,m=1,2,\cdots$,

$$\begin{aligned}\rho(f_n,f_m)&=\sup_{x\in E-E_{nm}}|f_n(x)-f_m(x)|\\&\geqslant\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f_m(x)|\geqslant\rho(f_n,f_m).\end{aligned}$$

由 $\{f_n\}$ 是 Cauchy 列立得 $\sup\limits_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f_m(x)|\to0\ (n,m\to\infty)$,即 $\{f_n\}$ 是 $E-E_0$ 上一致收敛意义下的 Cauchy 列,故存在 $E-E_0$ 上的可测函数 f,使得

$$\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f(x)|\to0\quad(n\to\infty).$$

在 E_0 上令 $f=0$,于是 f 可看作 E 上的可测函数. 注意到

$$\sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)|\leqslant \sup_{x\in E-E_n}|f_n(x)|=\|f_n\|_\infty,$$

且由$\{f_n\}$是 Cauchy 列易知$\{\|f_n\|_\infty\}$有界,所以$\{f_n\}$在 $E-E_0$上一致有界,从而f在 E 上有界,故$f\in L^\infty(E)$,并且

$$\rho(f_n,f)\leqslant \sup_{x\in E-E_0}|f_n(x)-f(x)|\to 0\quad (n\to\infty).$$

2.2 完备空间的重要性

欧氏空间中许多结论均依赖于空间的完备性,如直线上的闭区间套定理,平面内的闭矩形套定理等. 在完备的距离空间中,许多与欧氏空间情形类似的结论仍然成立.

定义 2 设(X,ρ)是距离空间,$x_0\in X$,

$$S(x_0,r)\triangleq\{x\in X\mid \rho(x,x_0)<r\}\quad (r>0)$$

称为以 x_0为中心,r 为半径的**开球**;

$$\overline{S(x_0,r)}\triangleq\{x\in X\mid \rho(x,x_0)\leqslant r\}\quad (r>0)$$

称为以 x_0为中心,r 为半径的**闭球**.

命题 1(闭球套定理) 设(X,ρ)是完备的距离空间,$\overline{S_n}=\{x\in X\mid \rho(x,x_n)\leqslant \varepsilon_n\}$是一列闭球

$$\overline{S_1}\supset\overline{S_2}\supset\cdots\supset\overline{S_n}\supset\cdots,$$

如果球的半径 $\varepsilon_n\to 0$,则存在唯一的点 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

证明 由命题的条件,不难看到球心组成的序列$\{x_n\}$是一个 Cauchy 列. 事实上,对任意 n,m,若 $n\geqslant m$,则由 $x_n\in\overline{S_n}\subset\overline{S_m}$得

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\varepsilon_m.$$

由此立得$\{x_n\}$是一个 Cauchy 列. 由 X 是完备的知存在 $x\in X$,使得 $\rho(x_n,x)\to 0$,在不等式

$$\rho(x_m,x)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_m,x_n)\leqslant\rho(x_n,x)+\varepsilon_m$$

中,固定 m 并令 $n\to\infty$ 得 $\rho(x_m,x)\leqslant\varepsilon_m$. 这说明 $x\in\overline{S_m}$,$m=1,2,\cdots$,故 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$.

若另有 $y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$,且 $y\neq x$,则对任意 n,有

$$\rho(y,x_n)\leqslant\varepsilon_n,$$

由不等式

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)\leqslant 2\varepsilon_n$$

及 $\varepsilon_n\to 0$ 立得 $\rho(x,y)=0$,从而 $x=y$,这就得到矛盾,所以 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{S_n}$必是单点集. 证毕.

在直线上的闭区间套定理中,即使区间的长度不趋于0,所有区间的交仍然是非空的. 然而,在一般距离空间中,即使空间是完备的,假如闭球套的半径不趋于0,则其交可能是空集.

从直线上 Cauchy 准则与闭区间套定理的等价性,人们自然会提出这样的问题:

在距离空间中,闭球套定理与空间的完备性是否等价?

答案是肯定的. 事实上,假设在距离空间(X,ρ)中闭球套定理成立,为证空间的完备性,假设$\{x_n\}$是 X 中的 Cauchy 列,于是存在正整数列 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,使得当 $n,m\geqslant n_k$时,

$$\rho(x_n,x_m)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

作闭球$\overline{S_k}=\overline{S\left(x_{n_k},\frac{1}{2^k}\right)}$,$k=1,2,\cdots$,则对任意 $y\in\overline{S_{k+1}}$,由

$$\rho(x_{n_k},y)\leqslant\rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},y)<\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k},$$

知 $y\in\overline{S_k}$,故$\{\overline{S_k}\}$是一个闭球套,于是存在唯一的 $x\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{S_k}$. 由 $\rho(x,x_{n_k})<\frac{1}{2^k}\to0$ 知 $x_{n_k}\to x$,又由

$$\rho(x,x_n)\leqslant\rho(x_n,x_{n_k})+\rho(x,x_{n_k})$$

立得 $x_n\to x$,即$\{x_n\}$在 X 中收敛,从而(X,ρ)完备.

以后还会看到完备空间的更多重要性质.

既然空间的完备性如此重要,对于给定的空间,有没有什么方法使其完备呢? 下面就来讨论这个问题.

2.3 空间的完备化

定义 3 设(X,ρ)是距离空间,M,N 是 X 的两个子集,且 $M\subset N$,若对任意 $\varepsilon>0$,及任意 $x\in N$,$M\cap S(x,\varepsilon)\neq\varnothing$,则称 M 在 N 中**稠密**.

定义 4 设(X,ρ)是距离空间. 若有完备的距离空间$(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$及映射 $T:X\to\widetilde{X}$,使得

$$\rho(x,y)=\widetilde{\rho}(Tx,Ty),\quad \forall\, x,y\in X,$$

且 TX 在 $\widetilde{X}$ 中稠密,则称 $\widetilde{X}$ 为 X 的**完备化空间**. T 通常称为(X,ρ)到$(\widetilde{X},\widetilde{\rho})$的**等距映射**.

在等距意义下 X 可视为 $\widetilde{X}$ 的子集,即将 X 与 TX 等同,此时也称 X 与 TX **等距同构**.

定理 1 任何距离空间都有完备化空间.

证明 设(X,ρ)是任一距离空间,我们希望构造一个空间,使得 X 中的 Cauchy 列在其中都有一个极限. 为此,不妨将(X,ρ)中的 Cauchy 列全体所构成的集合记作 $\widetilde{X}$. 显然,有三个问题需要考虑:

(i) 如何在 $\widetilde{X}$ 中定义距离?

(ii) X 能否等距地映到 $\widetilde{X}$ 中,且在 $\widetilde{X}$ 中稠密?

(iii) $\widetilde{X}$ 是否完备?

首先来定义距离. 对任意 $\xi=\{x_n\},\eta=\{y_n\}\in\widetilde{X}$,由 ξ,η 均是 Cauchy 列可知 $\rho(x_n,y_n)$是收敛数列,所以我们可以定义

$$\widetilde{\rho}(\xi,\eta)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

$\widetilde{\rho}$ 是不是 $\widetilde{X}$ 上的距离呢? 由 ρ 是距离不难证明 $\widetilde{\rho}$ 满足非负性、对称性及三角不等式,但 $\widetilde{\rho}(\xi,\eta)=0$ 并不意味着 ξ 与 η 是两个相同的 Cauchy 列. 解决此问题的方法是在 $\widetilde{\rho}$ 中作一等价类,凡使得 $\widetilde{\rho}(\xi,\eta)=0$ 的 ξ 与 η 视为相同,易知这是一个等价关系,记此等价关系为 ~. 在 $\widetilde{X}/\sim$ 中定义

$$d(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})=\widetilde{\rho}(\xi,\eta)\qquad(\xi,\eta\in\widetilde{X}),$$

其中$\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}$分别是 ξ,η 在 $\widetilde{X}/\sim$ 中的等价类. 可以证明 d 不依赖于$\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}$中代表元的选取. 事实上,若 $\xi=\{x_n\}\sim\xi_1=\{x'_n\},\eta=\{y_n\}\sim\eta_1=\{y'_n\}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x'_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n,y'_n)=0$,从而由

$$\rho(x'_n,y'_n)\leqslant\rho(x'_n,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y'_n)$$

得 $\widetilde{\rho}(\xi_1,\eta_1)\leqslant\widetilde{\rho}(\xi,\eta)$. 类似可得相反不等式. 由此可见 d 确是 $\widetilde{X}/\sim$ 上的距离. 为简便计,仍用 $\widetilde{X}$ 记 $\widetilde{X}/\sim$.

如何将 X 映到 $\widetilde{X}$ 中呢? 显而易见 X 的 Cauchy 列中包含形如$\{x_n\equiv x\}$($x\in X$)的点列,我们称这样的点列为**常驻列**. 对任意 $x\in X$,可以将 x 对应到通项为 x 的常驻列,并记为 $\widetilde{x}$,即作映射 T 如下:

$$Tx=\widetilde{x}=\{x,x,\cdots\}\qquad(x\in X).$$

显然,对任意 $x,y\in X$,有

$$d(\widetilde{x},\widetilde{y})=d(Tx,Ty)=\lim_{n\to\infty}\rho(x,y)=\rho(x,y),$$

故 T 是 X 到 $\widetilde{X}$ 中的等距映射.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com