应用几何教程

（第二版）

苏步青　华宣积　编著

博学 · 数学系列

復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

本书由复旦大学出版基金资助出版

应用几何教程

（第二版）

苏步青　华宣积　编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

应用几何教程/苏步青,华宣积编著. —2版. —上海:复旦大学出版社,2012.6
(博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-08756-7

Ⅰ.应… Ⅱ.①苏…②华… Ⅲ.几何-高等学校-教材 Ⅳ.O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第032201号

应用几何教程(第二版)
苏步青 华宣积 编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
大丰市科星印刷有限责任公司

开本787×960 1/16 印张16.25 字数286千
2012年6月第2版第1次印刷

ISBN 978-7-309-08756-7/O·486
定价:32.00元

“博学而笃志，切问而近思。”

（《论语》）

博晓古今，可立一家之说；

学贯中西，或成经国之才。

内容提要

本书是根据复旦大学的教材改编而成的.全书共分6章，主要介绍坐标系统、变换、机构运动的数学表示、曲线模型、曲面模型、共轭曲面等内容.

本书可供高等学校有关专业作应用几何课程的教材，也可供从事应用数学工作以及计算机辅助设计和制造的科技工作者参考.

前　　言

本书原先是复旦大学数学系的讲义，可供一学期每周讲授 3 学时之用. 自 1986 年起，已经用过 3 次，来听课的主要是应用数学和计算数学专业的学生，也有一些研究生和其它专业的学生. 计算几何方向的几个研究生曾经自学并做过报告. 在这些教学过程中，我们对讲稿不断地修改，最后写成此书，奉献给广大读者.

我们希望本书对学习和从事应用数学工作的人有些用处，使他们了解一些工程中的问题及现有的常用方法；对工科学生和从事机械工程研究，特别是从事 CAD 和 CAM(计算机辅助设计和制造)研究的人有所裨益，使他们了解一些数学方法和它们在工程问题中所起的作用.

全书共分 6 章. 第一、二章介绍坐标系和变换. 它们是几何学中最基本的概念. 为了使工科学生和工程技术人员能够顺利地阅读以后几章，这点基础知识是必要的. 对于数学基础较好的学生，这两章可以讲得快一些. 在密切联系机构运动学的第三章里，介绍了 Denavit-Hartenberg 方法，并将它用到机器人操作手的运动分析中去. 第四章和第五章介绍了曲线和曲面的各种实用的表示方法，特别是，我们可不必通过曲面的截线来表示曲面. 和曲线一样，我们采用方程表示的方式. 第六章叙述共轭曲面. 我们所要考察的是一对曲面在各自运动作用下始终保持接触的情形. 这样一对曲面的形状之间的关系以及接触处的曲率关系是我们讨论的对象.

书中包含了我们自己的一些研究和应用成果，但更多内容是将文献资料和专著整理加工而成的. 所引用的论文有些只在正文中指明，而大多数则未予列举. 主要的参考书有：

D. F. Rogers and J. A. Adams (1976)

Mathematical Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill Book Company, New York.

C. H. Suh and C. W. Radclifee (1978)

Kinematics and Mechanisms Design, John Wiley & Sons INC.

I. D. Faux and M. J. Pratt (1979)

Computational Geomtry for Design and Manufacture, Ellis Horwood Limited, Chichester, England.

苏步青、刘鼎元(1981)

计算几何,上海科学技术出版社.

吴大任、骆家舜(1985)

齿轮啮合理论,科学出版社、北京.

陈志新(1985)

共轭曲面原理基础,科学出版社,北京.

苏步青、华宣积、忻元龙(1986)

实用微分几何引论,科学出版社,北京.

我们向上面提到的专家和学者表示感谢,我们还感谢曹沅讲师和许虹、许丽卿、蔡志杰、吴洪忠等学生,他们在教学过程中提出了许多宝贵意见,使本书的质量有所提高.翟贵生、朱晨、葛武跃冒着1988年的酷暑抄写了全部讲稿,复旦大学出版社为本书的出版作了很大努力,我们在此一并表示感谢.

编 者

1989 年 11 月

目　　录

第一章 坐标系统

在解析几何里，我们已经学过平面直角坐标系、仿射坐标系、极坐标系，空间直角坐标系、仿射坐标系，球面坐标系和柱面坐标系. 利用坐标系，在点与数组之间建立起一个对应，从而在几何图形与方程之间建立起一个对应，使得我们能够用代数方法解决几何问题.

把几何知识应用到各个领域中去的时候，首先碰到的问题就是要选取适当的坐标系. 然后，才能用方程来表示几何图形. 坐标系在这里起着桥梁作用. 另一方面，我们所需要的几何图形的性质一般与坐标系无关. 曲线的长度、闭曲线所围成的面积等等就是例子. 明确这两方面是十分重要的.

最重要而且最常用的是直角坐标系. 我们假定本书的读者已经熟悉且能够运用这种坐标系，本书中用以讨论问题的主要也是直角坐标系. 在这一章里将引进齐次坐标的概念作为补充. 这种坐标在计算机图形学和机构运动学中有着广泛的应用. 本章还介绍本书中需要用到的其他坐标系统.

§1 齐次坐标、无穷远点

1.1 平面上的齐次坐标、无穷远点

设(x, y)是平面上一点 P 的直角坐标，令

$$\frac{x_1}{x_3} = x,\ \frac{x_2}{x_3} = y, \tag{1.1}$$

则点 P 对应着一个拼三小组(x_1, x_2, x_3). 当 $x_1'\colon x_2'\colon x_3' = x_1 : x_2 : x_3$ 时，(x_1', x_2', x_3')也与点 P 对应. 我们把拼三小组(x_1', x_2', x_3')看成是与(x_1, x_2, x_3)等同的，记为$(x_1', x_2', x_3')\sim(x_1, x_2, x_3)$. 反过来，从任一拼三小组$(x_1, x_2, x_3)$，$x_3 \neq 0$ 可以得到

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},$$

于是确定一个点 $P(x, y)$. 这样，平面上的点 $P(x, y)$与拼三小组$(x_1, x_2,$

x_3) ($x_3 \neq 0$) 建立了一一对应,称(x_1, x_2, x_3)为点 P 的齐次坐标.

采用齐次坐标,平面上的直线方程

$$Ax + By + C = 0$$

就可以写成

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0.$$

两边同时乘以 x_3 就变成线性齐次方程

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \tag{1.2}$$

求两点的联线和两直线的交点都是简单的问题.下面举两个例子来说明.

例 1 求过两点(1, 0, 1)和(0, 1, 1)的直线方程.

解 设所求的直线方程为

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

将(1, 0, 1)和(0, 1, 1)代进去,得到

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + C = 0. \end{cases}$$

最后得

$$A = -C,\ B = -C,$$

所求的直线方程为

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

例 2 求直线 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 和 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 的交点.

解 解联立方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

得

$$x_1 = -x_3,\ x_2 = 0,$$

所求的交点是(1, 0, −1).

考察两条平行线,例如 $x - y + 1 = 0$ 和 $x - y + 2 = 0$. 方程组

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

是无解的.这说明两条平行线是不相交的.如果把它们写成齐次坐标的形式,我们便得到线性齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

它有解(1, 1, 0).在普通平面上找不到(1, 1, 0)的对应点.为了解决代数方程组有解而普通平面上无交点的这种不和谐的现象,我们采用如下的办法:把(1, 1, 0)看成是直线 $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ 和 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ 上的公共的"理想点"或无穷远点的齐次坐标.我们假定任一条直线 l

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$$

上有且只有一个无穷远点$(B, -A, 0)$,$(B, -A)$是这直线的方向向量,并且与 l 平行的所有直线都与 l 相交于这个无穷远点,它们形成了一个直线束.不平行的两条直线 l_1 和 l_2 相交于一个有限点(非无穷远点),l_1 与 l_2 具有不同的无穷远点.因此,平面上有无穷多个无穷远点.这些无穷远点满足 $x_3 = 0$.我们说 $x_3 = 0$ 代表一条由无穷远点组成的直线,称为无穷远直线.

添加了无穷远点和无穷远直线的平面称为扩大的欧氏平面,或称为仿射平面.在这平面上,任何两条不同的直线都有一个交点,也只有一个交点.不全为零的 3 个数(x_1, x_2, x_3)表示这平面上的一个点.当 $x_3 \neq 0$ 时,表示通常点;当 $x_3 = 0$ 时,表示无穷远点.

1.2 空间的齐次坐标

和平面上点的齐次坐标相类似,我们可以引进空间的点的齐次坐标.由不全为零的 4 个数(x_1, x_2, x_3, x_4)组成的拼四小组表示空间中的一个点.当 $x_4 \neq 0$ 时,这个点的直角坐标(非齐次坐标)是

$$x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4}.$$

当 $x_4 = 0$ 时,$(x_1, x_2, x_3, 0)$表示一个无穷远点.它代表了以(x_1, x_2, x_3)为方向的所有平行直线的公共点.不平行的两直线各有不同的无穷远点.空间中有无穷多个无穷远点,它们在一个无穷远平面上.无穷远平面的方程是

$$x_4 = 0.$$

添加了无穷远点和无穷远平面的空间称为扩大了的欧氏空间,或称为仿射空间.(x_1, x_2, x_3, x_4)(它们不全为零)称为空间中点的齐次坐标.

采用齐次坐标,平面在齐次坐标下的方程是齐次方程

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0. \tag{1.3}$$

这里的 A, B, C 和 D 不全为零.任何两个平面都相交于一条直线:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 = 0, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

当这两个平面平行时,它们的交线便落在无穷远平面上.

3 个平面必有交点.过 3 个不共线的点可唯一地决定一个平面.

例 3 求过点$(0, 1, -1, 0)$、$(-1, 0, 0, 1)$和$(0, 1, 2, -3)$的平面方程.

解 设所求平面为

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0.$$

把已知的 3 点的齐次坐标代进去,得到

$$\begin{cases} B - C = 0, \\ A - D = 0, \\ B + 2C - 3D = 0. \end{cases}$$

这方程组的解是

$$A = D,\ B = D,\ C = D.$$

所求的平面方程为

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

用非齐次坐标来表达,此题变为:求过$(-1, 0, 0)$和$\left(0, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$两点,而且平行于方向$(0, 1, -1)$的平面,它的解是

$$x + y + z + 1 = 0.$$

例 4 求 3 平面

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 0$, $8x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 = 0$ 的交点.

解 解联立方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ 3x_1+x_2+x_3+4x_4=0, \\ 8x_1+x_2+x_3+9x_4=0, \end{cases}$$

得

$$x_1=x_4=0,\ x_2=-x_3.$$

所求的交点是(0, 1, −1, 0). 它是一个无穷远点.

用非齐次坐标来表达时,可看出这 3 个平面

$$x+y+z+1=0,\ 3x+y+z+4=0,\ 8x+y+z+9=0$$

都平行于方向(0, 1, −1),它们是两两相交的. 交线的方向都是(0, 1, −1).

习 题 1.1

1. 在平面上求下列各点的齐次坐标:

$$(0,\ 0),\ (3,\ 4),\ (1/3,\ 1/4).$$

2. 在平面上求斜率为 4/3 的直线上的无穷远点.

3. 求下列各点的非齐次坐标:

$$(3,\ 5,\ -1),\ (0,\ 0,\ 9).$$

4. 求两直线

$$4x_1+6x_2+x_3=0 \text{ 和 } 2x_1+3x_2-2x_3=0$$

的交点.

5. 判别 3 条直线

$$x_1-x_2-x_3=0,\ 2x_1+x_2+3x_3=0,\ 7x_1-x_2+3x_3=0$$

是否共点.

6. 在平面上求两点(1, −1, 2)和(0, 1, 4)的连线.

7. 在空间中,求下列各点的齐次坐标:

$$(0,\ 0,\ 0),\ (0,\ 1,\ 2),\ (3,\ 4,\ 5).$$

8. 求 3 平面

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ 2x_1+2x_2+2x_3+5x_4=0,\ x_3-x_4=0$$

的交点.

9. 求过 3 点(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0)和(1, −1, 2, 0)的平面.

§2 直线的 Plücker 坐标

2.1 平面上的直线坐标

用齐次坐标表达的直线 l 的方程是

$$Ax_1+Bx_2+Cx_3=0.$$

为了对称起见,我们用$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$来代替$(A,\ B,\ C)$,把直线 l 的方程写成

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3=0.$$

$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$是不全为零的 3 个数组成的拼三小组,当它们被确定时,以它们为系数的直线 l 的方程也完全地确定了. 如 $\lambda\neq 0$, 拼三小组$(\lambda\xi_1,\ \lambda\xi_2,\ \lambda\xi_3)$也确定同一条直线 l 的方程. 所以这两个拼三小组是等同的,记为

$$(\lambda\xi_1,\ \lambda\xi_2,\ \lambda\xi_3)\sim(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3).$$

称$(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$是直线 l 的坐标. 直线坐标是 Plücker 最早提出来的.

2.2 空间直线的 Plücker 坐标

空间的情形和平面有些不同,不能简单地从直线方程引出直线坐标的概念来. 设一条直线 g 的方程是

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

一点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$和方向$(l,\ m,\ n)$完全决定了它. 但 g 上任何一点都可以代替$(x_0,\ y_0,\ z_0)$,所以不能用 $x_0,\ y_0,\ z_0,\ l,\ m,\ n$ 这 6 个数来作为 g 的坐标.

直线 g 也可以由它上面的两个点 $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$和 $\overline{P}_0(\overline{x}_0,\ \overline{y}_0,\ \overline{z}_0)$来决定. 它在直角坐标系$\{O;\ \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$中的方向向量是 $\boldsymbol{v}(l,\ m,\ n)$,其中

$$l=\overline{x}_0-x_0,\ m=\overline{y}_0-y_0,\ n=\overline{z}_0-z_0.$$

这个向量(起点在 P_0)关于原点 O 的矩是$\overrightarrow{OP}_0\times\boldsymbol{v}$. 因为

$$\overrightarrow{OP}_0=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k},$$

所以 $$\overrightarrow{OP}_0\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ \overline{x}_0-x_0 & \overline{y}_0-y_0 & \overline{z}_0-z_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_0 & y_0 & z_0\\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0\end{vmatrix}$$

$$= p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k},$$

这里已令

$$p = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ \overline{y}_0 & \overline{z}_0 \end{vmatrix}, \ q = \begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ \overline{z}_0 & \overline{x}_0 \end{vmatrix}, \ r = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 \end{vmatrix}. \tag{1.5}$$

如果 P_0 与 $\overline{P}_0$ 用齐次坐标表示：

$$P_0(x_0, y_0, z_0, 1), \ \overline{P}_0(\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0, 1),$$

则

$$l = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & \overline{x}_0 \end{vmatrix}, \ m = \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 1 & \overline{y}_0 \end{vmatrix}, \ n = \begin{vmatrix} 1 & z_0 \\ 1 & \overline{z}_0 \end{vmatrix}. \tag{1.6}$$

显然，$p, q, r; l, m, n$，这 6 个数，恰恰是矩阵

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 & \overline{z}_0 & 1 \end{pmatrix}$$

的所有二阶子行列式. 下面我们要证明，这 6 个行列式的比值是同 P_0 和 $\overline{P}_0$ 的选取无关的. 设 Q_0 和 $\overline{Q}_0$ 是 g 上的另外两点，假定它们的坐标分别是

$$((1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x}_0, (1-\lambda)y_0 + \lambda\overline{y}_0, (1-\lambda)z_0 + \lambda\overline{z}_0),$$

和

$$((1-\mu)x_0 + \mu\overline{x}_0, (1-\mu)y_0 + \mu\overline{y}_0, (1-\mu)z_0 + \mu\overline{z}_0),$$

$\lambda \neq \mu$. 由矩阵

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x}_0 & (1-\lambda)y_0 + \lambda\overline{y}_0 & (1-\lambda)z_0 + \lambda\overline{z}_0 & 1 \\ (1-\mu)x_0 + \mu\overline{x}_0 & (1-\mu)y_0 + \mu\overline{y}_0 & (1-\mu)z_0 + \mu\overline{z}_0 & 1 \end{pmatrix}$$

的相应的二阶子行列式构成的 6 个数 $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}; \overline{l}, \overline{m}, \overline{n}$ 是很容易计算的. 例如

$$\begin{aligned} \overline{r} &= \begin{vmatrix} (1-\lambda)x_0 + \lambda\overline{x}_0 & (1-\lambda)y_0 + \lambda\overline{y}_0 \\ (1-\mu)x_0 + \mu\overline{x}_0 & (1-\mu)y_0 + \mu\overline{y}_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (1-\lambda)x_0 & (1-\lambda)y_0 \\ \mu\overline{x}_0 & \mu\overline{y}_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\overline{x}_0 & \lambda\overline{y}_0 \\ (1-\mu)x_0 & (1-\mu)y_0 \end{vmatrix} \\ &= [\mu(1-\lambda) - \lambda(1-\mu)] \begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ \overline{x}_0 & \overline{y}_0 \end{vmatrix} \\ &= (\mu - \lambda)r. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\bar{l} &= \begin{vmatrix} 1 & (1-\lambda)x_0+\lambda\bar{x}_0 \\ 1 & (1-\mu)x_0+\mu\bar{x}_0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-\mu)x_0+(\mu-\lambda)\bar{x}_0 \\
&= (\mu-\lambda)l.
\end{aligned}
$$

同理,还有

$$
\bar{p}=(\mu-\lambda)p,\ \bar{q}=(\mu-\lambda)q,
$$

$$
\bar{m}=(\mu-\lambda)m,\ \bar{n}=(\mu-\lambda)n.
$$

于是

$$
p:q:r:l:m:n=\bar{p}:\bar{q}:\bar{r}:\bar{l}:\bar{m}:\bar{n}.
$$

这就是说,直线 g 的方向向量(l, m, n)和它关于原点的矩向量(p, q, r)(作用点在 g 上),除了一个比例因子外是完全确定的.因为方向向量与矩向量是垂直的,所以它们必须满足关系式

$$
lp+mq+nr=0, \tag{1.7}
$$

此式称为 Plücker 恒等式.

反过来,假设已知满足 Plücker 恒等式(1.7)的 6 个数 $l, m, n; p, q, r$,且前 3 个数不全为零,那么便可唯一确定一条直线 g.事实上,当 $p=q=r=0$ 时,g 就是过原点的以 $\boldsymbol{v}(l, m, n)$为方向向量的直线;当 p, q 和 r 不全为零时,我们可找一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$,使

$$
\overrightarrow{OP_0}\times\boldsymbol{v}=p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{i}+r\boldsymbol{k}
$$

用坐标形式来表示,便有

$$
\begin{cases}
\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ m & n \end{vmatrix}=p, \\
\begin{vmatrix} z_0 & x_0 \\ n & l \end{vmatrix}=q, \\
\begin{vmatrix} x_0 & y_0 \\ l & m \end{vmatrix}=r,
\end{cases}
$$

就是

$$
\begin{cases}
y_0n-z_0m=p, \\
z_0l-x_0n=q, \\
x_0m-y_0l=r.
\end{cases}
$$