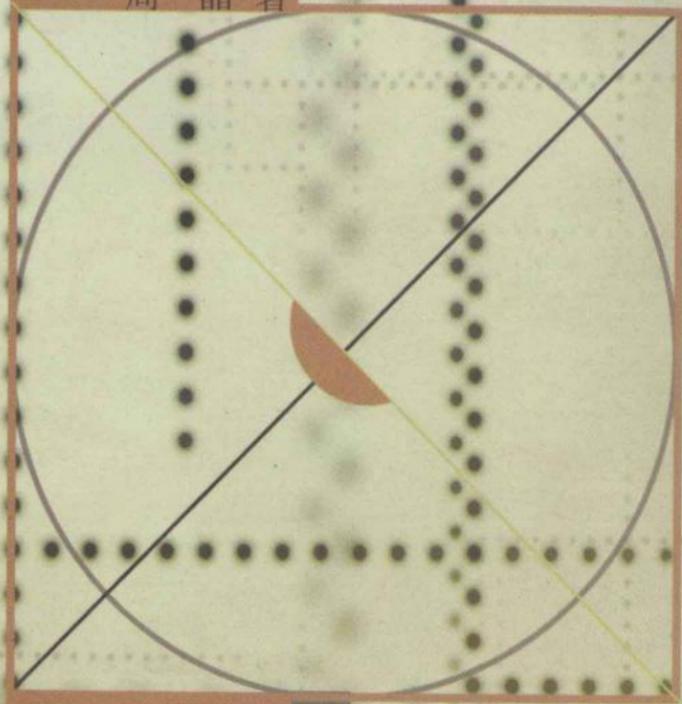


系统科学与系统工程丛书

# 城市交通系统 分析与优化

周晶著



东南大学出版社

系统科学与系统工程丛书

# 城市交通系统分析与优化

周 晶 著

东南大学出版社  
·南京·

## 内 容 提 要

本书运用系统工程的理论和方法,对城市交通系统的各个方面进行了详细的阐述和分析。全书共分8章,包括交通流量配流模型的建立,起讫点出行分布矩阵的估计,交通信号控制系统的分析与设计,城市交通网络的最优设计,城市公共交通系统的均衡配流、最优设计和经营博弈分析,城市出租车运营系统的随机分析,以及智能化城市交通管理系统的构成等方面的内容。

本书可作为高等院校应用数学、系统工程、交通工程等专业高年级本科生、硕士研究生的参考书,也可供城市交通规划、交通管理部门和公共交通部门的专业技术人员参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

城市交通系统分析与优化/周晶著. —南京:东南大学出版社, 2001.4

ISBN 7-81050-753-2

I . 城… II . 周… III . 城市—交通—系统—研究  
IV . U491.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 12844 号

东南大学出版社出版发行  
(南京四版楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷

开本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 8.5 字数: 235 千字

2001 年 5 月第 1 版 2001 年 5 月第 1 次印刷

定价: 15.00 元 (总定价: 160.00 元)

(凡因印装质量问题, 可直接向发行科调换。电话: 025-3792327)

## 前　　言

众所周知,城市交通网络系统是一个城市的命脉。自我国改革开放以来,许多大中城市都进行了大规模的城市道路网络的改造,城市的道路条件得到很大改善,交通面貌焕然一新。近年来,随着我国经济建设的迅速发展,人民生活水平的不断提高,私家车和出租车的数量呈持续上升的趋势,导致城市机动车辆数量急剧上升。现有城市道路的通行能力与不断增长的交通需求之间的矛盾变得日益尖锐,而落后的交通管理手段又加剧了这一道路供需矛盾。同时,城市机动车辆的增加也带来了严重的空气污染问题,而城市交通的拥挤又延迟了车辆的出行时间,更加剧了空气污染。

城市交通是一个十分复杂的系统工程,无论是进行城市交通规划,还是制定和实施一项管理控制措施,都必须从整体的角度来考虑其可行性和最优性。而城市规划和交通管理人员遇到的主要问题之一,就是预测各种交通网络改进方案(如增加、扩展道路等)和管理规则对流量分布的影响,这就涉及到对交通问题基本模型的研究。

另一方面,建立一个完善的城市公共交通网络系统也是解决城市车辆过多问题的重要途径。发达的公共交通系统不仅会极大地方便市民的出行,而且会大大改善城市的交通状况。因此对城市公共交通网络系统的理论问题进行研究是十分必要的。目前,随着人民生活水平的不断提高,城市出租车已经成为市民出行的重要的交通工具之一。它具有方便、快捷、舒适等特点,受到越来越多出行者的青睐。因此,合理规划出租车的运营数量,规范出租车的服务方式,确定合理收费标准,已成为管理和控制城市交通的一个重要方面。

由此可见,研究城市交通问题已不再是单纯的交通工程领域的课题,而是涉及到交通工程、自动控制、系统工程、经济学、运筹学等多学科的复杂大系统问题,必须要综合运用各学科的理论和方法,对城市交通问题进行深入研究。

本书比较全面系统地介绍了作者多年来综合运用交通流理论、运

筹学、博弈论以及系统工程的基本理论和方法解决城市交通问题研究成果,同时也介绍了当今交通系统工程领域部分相关的最新研究成果.

全书共分 8 章.第 1 章简要介绍了本书所涉及的各部分的基本内容及其所用的数学方法,读者在阅读本章后,可了解本书的全貌,同时也可以掌握相应的数学模型和方法,有助于后面章节的阅读.第 2 章阐述了交通网络均衡概念及其相应的变分不等式的数学描述,在不同的假设条件下分别建立了交通均衡配流模型,并给出了等价的数学规划问题.第 3 章介绍了起讫点出行分布矩阵(origin destination trip matrix,简称 OD 矩阵)的估计方法.第 4 章详细分析了城市交通信号设计的基本原理和方法,运用随机排队服务系统的理论和方法对交叉口交通流特性进行理论分析.并基于用户最优均衡配流模型建立了确定各路口信号绿信比的两级数学规划模型.同时对城市信号控制系统的基本构成进行了分析,并着重介绍了几个典型的且获得广泛应用的城市交通控制系统.第 5 章将以两级数学规划模型为基础,对城市交通网络结构的合理规划以及道路收费等问题进行定量的分析研究.本书第 6 章以一般交通网络系统的均衡原理为基础,研究分析了公交网络系统均衡配流问题.结合公交网络系统的特殊性,建立了相应的公共交通网络系统的随机均衡配流模型,并在此基础上研究了公交网络系统的最优惠票价设计及其经营博弈等理论问题.第 7 章针对城市出租车运营系统问题进行了研究分析.本书最后一章,介绍了智能化城市交通管理系统的构成,特别对城市交通堵塞的成因及其疏导策略进行了研究分析.

本书的写作得到了盛昭瀚教授和何建敏教授的悉心指导和帮助.在此表达我最诚挚的感谢和深深的敬意!

东南大学系统工程研究所的前辈学术带头人徐南荣教授是引导我走进系统工程研究领域的引路人,在此向他及其夫人胡晚霞教授表达我最真诚的谢意和崇高的敬意!

感谢东南大学经济管理学院院领导以及达庆利教授、仲伟俊教授、吴广谋副教授多年来给予作者多方面的支持和帮助.

作者在香港科技大学和香港理工大学的访问期间,与林兴强教授

和杨海博士进行了合作研究,本书中部分研究成果是与他们共同完成的。北京航空航天大学管理学院的黄海军教授也给了作者许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢!

本书的出版得到“九五”国家科技攻关项目“城市交通管理计算机辅助决策系统”(96-A15-02-03)的资助。公安部无锡交通研究所的王长君副所长、赵子士高级工程师、周新生工程师为作者提供了许多公安交通指挥决策系统方面的资料,并提出许多富有建设性的建议。宋世辉小姐打印了部分书稿,在此一并表示感谢。

由于笔者水平有限,谬误和不妥之处在所难免,尚祈专家、读者不吝指正。

著 者

2001年2月

# 目 录

1 城市交通与数学方法 .....	(1)
1.1 城市交通网络与均衡原理 .....	(1)
1.2 城市交通信号控制系统 .....	(3)
1.3 城市交通网络结构的最优设计与道路收费问题 .....	(4)
1.4 城市公共交通网络系统 .....	(5)
1.5 城市出租车运营系统 .....	(6)
1.6 智能化城市交通管理系统 .....	(6)
1.7 最优化理论基础 .....	(7)
1.7.1 凸集和凸函数 .....	(7)
1.7.2 非线性规划问题 Kuhn-Tucker 条件 .....	(9)
1.7.3 非线性规划问题的灵敏度分析 .....	(9)
1.7.4 遗传算法 .....	(11)
1.7.5 两级数学规划问题 .....	(16)
2 交通网络系统的均衡原理及其配流模型 .....	(19)
2.1 交通网络系统的描述 .....	(19)
2.2 变分不等式的一般描述 .....	(21)
2.3 Wardrop 均衡原理及其均衡配流模型 .....	(24)
2.3.1 Wardrop 均衡原理 .....	(24)
2.3.2 Wardrop 用户最优均衡原理的数学描述 .....	(25)
2.3.3 Wardrop 系统最优均衡原理的数学描述 .....	(27)
2.4 随机效用理论与随机用户均衡原理 .....	(29)
2.4.1 效用函数和离散选择模型 .....	(29)
2.4.2 Logit 型的随机路径选择模型 .....	(32)
2.5 随机均衡配流模型及其等价的变分不等式问题 .....	(34)
2.5.1 固定需求情形下的变分不等式问题 .....	(35)
2.5.2 弹性需求情形下的变分不等式问题 .....	(38)

2.6	具有容量限制的均衡配流模型 .....	(44)
2.7	小结 .....	(50)
3	起讫点出行分布矩阵的估计 .....	(51)
3.1	引言 .....	(51)
3.2	路段检测流量与 OD 起讫分布矩阵 .....	(52)
3.3	OD 矩阵的估计方法 .....	(54)
3.3.1	极大熵模型 .....	(54)
3.3.2	重力模型 .....	(67)
3.3.3	广义最小二乘模型 .....	(68)
3.3.4	基于均衡配流模型的 OD 矩阵估计方法 .....	(69)
3.4	估计 OD 矩阵的可靠性分析 .....	(71)
3.4.1	最大可能相对误差(maximum possible relative error, MPRE) .....	(71)
3.4.2	最大可能相对误差的性质 .....	(74)
3.4.3	OD 矩阵估计的可靠性 .....	(75)
3.5	检测点的最优分布数学模型 .....	(79)
3.5.1	检测点的分布规则 .....	(79)
3.5.2	已知有效出行路径的检测分布数学模型 .....	(82)
3.5.3	已知流量转移概率的检测点分布模型 .....	(86)
4	城市交通信号控制系统 .....	(98)
4.1	引言 .....	(98)
4.2	单一交叉路口的信号设计与分析 .....	(99)
4.2.1	交通信号设计的基本参数 .....	(99)
4.2.2	感应式信号控制 .....	(105)
4.2.3	模型信号控制 .....	(115)
4.3	基于交通均衡配流模型的最优信号设计 .....	(120)
4.4	城市交通信号递阶协调控制建模 .....	(125)
4.4.1	基本级的数学模型 .....	(126)
4.4.2	协调级的数学模型 .....	(127)
4.4.3	分解协调算法及其步骤 .....	(129)

4.5 城市交通信号控制系统 .....	(130)
4.5.1 城市交通信号控制系统的构成和分类 .....	(131)
4.5.2 线控制系统 .....	(134)
4.5.3 面控制交通信号系统 .....	(136)
4.5.4 典型城市交通信号控制系统的分析 .....	(137)
5 城市交通网络结构的优化与道路收费问题 .....	(142)
5.1 城市交通网络容量最优设置问题 .....	(143)
5.1.1 Braess 诡异现象 .....	(143)
5.1.2 交通网络容量设置问题的数学模型 .....	(144)
5.2 城市交通网络结构的最优设置问题 .....	(150)
5.2.1 交通网络结构的数学描述 .....	(150)
5.2.2 交通网络结构最优设置的数学模型 .....	(151)
5.3 交通道路的收费问题 .....	(152)
5.3.1 固定交通出行需求下的道路收费问题 .....	(153)
5.3.2 弹性交通出行需求下的道路收费问题 .....	(154)
5.4 交通道路 BOT 投资决策问题 .....	(156)
6 城市公共交通网络系统 .....	(160)
6.1 引言 .....	(160)
6.1.1 公共交通网络系统的研究回顾 .....	(160)
6.1.2 本章的主要研究内容 .....	(162)
6.2 公交网络系统的一般描述 .....	(164)
6.3 公交网络系统的随机均衡配流模型 .....	(167)
6.4 多用户公交网络系统的随机均衡配流模型 .....	(176)
6.5 弹性需求下公交网络系统的随机均衡配流问题 .....	(181)
6.6 公交网络系统最优票价设计的 Stackelberg 模型 .....	(186)
6.6.1 具有固定需求的公交网络系统最优票价设计模型 .....	(187)
6.6.2 具有弹性需求的公交网络系统最优票价设计模型 .....	(196)
6.7 公交网络系统的经营博弈模型 .....	(204)
6.7.1 广义 Nash 均衡博弈 .....	(205)

6.7.2	多个公交服务经营者之间的非合作博弈模型 .....	(209)
6.7.3	具有弹性需求的公交网络系统的非合作经营博弈模型 .....	(218)
6.8	小结 .....	(225)
7	城市出租车运营系统的随机分析 .....	(227)
7.1	生灭过程的渐进性 .....	(227)
7.2	出租车运行系统的随机分析 .....	(229)
7.3	出租车站的排队分析 .....	(232)
7.4	小结 .....	(233)
8	智能化城市交通管理系统 .....	(235)
8.1	城市交通管理系统的发展历史 .....	(236)
8.2	智能化交通管理系统的框架结构 .....	(238)
8.3	智能化城市交通管理系统的组成 .....	(238)
8.4	城市交通堵塞疏导决策分析 .....	(243)
8.4.1	城市交通网络总体交通状况的分类 .....	(243)
8.4.2	城市交通拥堵的复杂性 .....	(244)
8.4.3	交通拥堵的属性分析 .....	(245)
8.4.4	城市交通拥堵的空间分布形式 .....	(247)
8.4.5	交通拥堵的疏导策略 .....	(247)
8.4.6	城市交通拥堵的疏导策略的生成规则 .....	(250)
	参考文献 .....	(252)

# 1 城市交通与数学方法

随着城市人口的增长和社会经济的持续发展,城市交通问题日益突出。特别是上下班高峰期,城市交通拥挤现象显得尤为突出。如何解决交通拥挤问题,自然成为每个城市面临的棘手问题。立足长远目标,搞好城市交通规划,加强交通基础设施的建设是十分重要的。但是要有效地解决城市交通的拥堵问题,不能单纯靠增加道路面积和长度,还要完善路网系统、调整网络结构和加强交通管理的现代化。城市交通是一个十分复杂的大型系统,无论是进行城市交通规划,还是制定和实施一项管理控制措施,都必须从整体来考虑其可行性和最优性。而城市规划和交通管理人员遇到的主要问题之一,就是预测各种交通网络改进方案(如增加、扩展道路等)和管理规则对流量分布的影响,分析各种方案实施后效果的优劣。这就需要借助相应的数学模型和方法进行理论研究分析,从而为各种交通设施的建造以及交通管理和控制方案的实施提供可靠的科学依据。

## 1.1 城市交通网络与均衡原理

城市交通系统是由道路系统、流量系统和管理系统组成的一个综合体。道路系统包括各种等级的街道、交叉路口和交通指挥设施。流量系统包含行驶在路面上的各种车辆和行人。而管理系统则是指管理交通网络和流量的各种规章制度。构成城市交通系统的3个子系统之间是相互影响、相互作用的。良好的道路系统会使流量系统运行得舒畅和快捷,促进社会经济发展,必然刺激更多的流量需求,导致有限的道路供给与不断增长的流量需求之间的矛盾。而交通管理系统正是缓解这

种供需矛盾的有效手段,它是运用一切可行的方法,极大限度地发挥现有道路系统的通行能力,以满足流量系统的需求.

由于出行者选择路径的行为是复杂的,使得我们并不能真正知道流量如何分布在道路网络上.而这一问题恰恰是十分重要的,是制定交通管理和控制措施的关键依据,由此导致了许多交通理论问题.Wardrop关于交通网络均衡原理的提出,为交通流量在道路网络系统上的分布问题,即交通配流(或交通分配)问题提供了理论基础.

这里的均衡概念是用来分析路径出行成本与流量之间相互作用关系的.假设从一个起点(origin)到一个讫点(destination)的出行单位数量已知,且连接这对起讫点的路径有多条,那么这些出行单位将如何在多条路径之间分布?如果假设所有出行者都对交通状况十分了解,则他们一开始都会选择同一条出行成本最小的路径(最短路径).当出行单位数量并不多时,这种选择最短路径的方式是可行的.但是当出行单位数量足够大时,势必会在这条最短路径上引起拥挤导致出行成本的上升,直至它不再是最佳的路径.此时,部分出行单位将选择另一条次好的路径,不过同样的情形又会发生在这些路径上,出行成本随流量的上升而增加.出行单位就这样不断权衡,不断修改出行方案.当出行者不能单方面改变路径并降低其出行成本时,一个稳定状态就达到了,这就是Wardrop用户均衡原理(user equilibrium, UE).

上述均衡原理是基于假设出行者对交通状况十分了解,并且假设出行者对路径的熟悉程度和偏好是相同的.现实中,出行者对路径出行成本只能是估计,且不同的出行者对同一条路径的出行成本的估计值也是不同的.由此导致相应的随机均衡原理(stochastic user equilibrium, SUE),即:系统中不再存在出行者认为他能通过单方面改变路径来降低其出行成本的机会.

假定交通网络上流量的分布服从以上的均衡原理,则可以根据均衡条件得到流量在道路网络上的分布格局.因此均衡配流问题实际上就是要获得满足均衡条件的路径流量.本书将要运用变分不等式来研

究均衡配流问题.

由于交通配流问题的前提是必须已知网络每一起讫点之间的交通出行量,即起讫点出行分布矩阵(origin destination trip matrix),简称OD矩阵.它也是城市交通管理控制的重要基础数据.然而要获得OD矩阵确不是件容易的事,大规模的数据调查,费时、费力,不能反映真实的交通出行情况.本书将在第3章介绍利用路段检测流量估计OD矩阵的方法,同时讨论估计的可靠性以及路段检测点的最优分布问题.

## 1.2 城市交通信号控制系统

城市交通大多发生在平面空间,必然会在交叉口处引起冲突.要保证交通安全畅通,一是将通行权相互冲突的交通流进行空间分离,使之各行其道,这就需要建立立体通道;二是进行时间分离,使之各行其时,交通信号控制的任务就是在时间域进行交通流通行权的分配,保证各行其时.

交通信号是通过控制信号灯灯色的周期性变化来控制不同方向的车流行止,交通信号灯色每循环变化一次称为一个信号周期.在一个信号周期内,通行权完全相同的交通流获得灯色的连续时序称为一个信号相位.在一个信号周期内,信号相位的排列顺序称为信号相序,表示交通流的放行次序.交通信号灯色显示时间的设置方案称为信号配时方案.主要配时参数有:

- 1) 周期 一个信号相位红、绿、黄三色灯信号变换一周所需的时间,为红、绿、黄三色灯显示时间之和.
- 2) 绿信比 一个信号周期内,绿灯显示时间长度对周期时长的比值.
- 3) 相位差 相邻交叉口绿灯起始时间差.

相位、相序与信号配时方案的有序组合称为交通信号控制方案.交通信号控制系统按控制交叉口的关联程度可分为:

- 1) 点控制 对孤立交叉口进行控制,不考虑相邻交叉口的联系.
- 2) 线控制 对一条主干道相邻的几个交叉口进行自动协调控制,也称为绿波带控制,一般只考虑主干道方向相邻交叉口的关联,不考虑次干道方向相邻交叉口的关联.
- 3) 面控制 对城市某个区域中的所有的交叉口进行集中自动协调控制.

交通控制系统是利用计算机来实现城市某个区域所有交叉口信号的集中自动协调控制,它包括了点控、线控、面控的所有功能,并根据交通流的变化情况,自动实现3种控制方式的相互转换.

信号周期、绿信比、相位差构成了交叉路口信号设计的主要参数,它们是建立城市交通信号控制系统的关键所在.本书将运用随机排队服务系统的有关理论和方法对交叉口交通流特性进行理论分析,分析路口的繁忙程度,建立确定交叉口的最佳信号配时的数学模型.本书还特别介绍了几个典型的城市交通信号控制系统.

### 1.3 城市交通网络结构的最优设计与道路收费问题

城市道路网络由街道和交叉口构成,是属于有形的物理结构.从图论的角度看,道路网络本身只是一个无向图,街道只是起着连接交叉路口的作用,没有规定街道的方向.当在道路网络上规定了车流的行驶方向或各种行驶限制等交通规制,才形成交通网络.因此,交通网络不同于道路网络,它是有方向的,有流向规则的.同一个道路网络,由于车道划分的不同,或交通规则的不同,导致不同的交通网络结构,由此也可能导致不同的交通出行效果.

由此可见,如何将一个城市道路网络,通过科学合理的规划,使其变成一个高效的城市交通网络,不是一件简单的事情,这需要借助于科学的理论和方法来研究分析.另一方面,目前已经被许多发达国家采用的道路收费措施,也是解决城市交通拥挤问题的有效途径之一,由此也

带来许多理论问题值得研究。

#### 1.4 城市公共交通网络系统

城市公共交通系统包括多种不同形式的交通工具,主要有公共汽车、火车、轻轨火车和地铁等。近 20 年来,随着我国国民经济的迅速发展,城市公共交通系统也得到相应的改善。无论是公共交通工具,还是公共交通系统经营管理体制,都发生了巨大的变革。北京的地铁建设已有十多年的历史,地铁的建成缓解了北京市的交通拥挤状况,也为市民提供了方便快捷的出行工具,现仍在不断扩建和完善之中。另外,北京正规划建立市内铁路客运系统以适应城市规模不断扩大的需要。近年来,上海和广州的地铁系统已初具规模,南京等城市也开始建设地铁系统。目前,由于经济条件所限,我国多数城市仍以公共汽车作为主要的公共交通工具,并已形成覆盖整个城市的公共交通网络系统。

但是,由于城市人口的不断增长,现有的公交网络系统仍不能满足人们的出行需求,特别是在上下班高峰时间,公交车非常拥挤,导致乘客的等待时间过长,引起乘客的不满情绪。另一方面,目前我国城市公交系统运营已引入竞争机制,从原有国营公交公司的独家经营转变为多个公交公司的竞争经营。因此,如何合理规划、设计和运营公共交通系统,已成为急待解决的城市管理问题。这需要有科学的理论与方法作为依据,从系统的角度出发,对公共交通网络系统进行分析研究。

一般交通网络系统的均衡原理是研究公交网络系统均衡配流问题的基础。本书结合公交网络系统的特殊性,建立了相应的公共交通网络系统的随机均衡配流模型,研究了公交网络系统的最优设计及其经营博弈等理论和实际应用问题。

## 1.5 城市出租车运营系统

目前,城市出租车已成为最重要的交通出行工具之一,它具有方便、快捷、舒适等特点,受到越来越多出行者的青睐。在许多大中城市,由于缺乏相应的规划和管理,难免会出现出租车数量过剩、搭载率低,或出租车不足、居民等待时间过长等现象。此外,出租车服务方式的不规范,随地搭载乘客,也严重影响城市交通。因此,合理规划出租车的运营数量,规范出租车的服务方式,确定合理收费标准,已成为管理和控制城市交通的一个重要方面。

由于出租车运行的随机性,没有固定的起讫点和运行路线,给定量分析带来一定的困难。本书首先从宏观的角度,把城市的出租车运营看作为一个随机系统,将出租车空驶时当作一个“生”的过程,而搭载乘客当作一个“灭”的过程,运用随机系统理论中的生灭过程对其进行分析,从而可得出在一定的乘客需求下,系统中空驶出租车和载客出租车的比例。

## 1.6 智能化城市交通管理系统

随着经济的高速发展和全球化进程的加速,交通运输的压力越来越大,对其有效控制和管理已成为政府和公众所关注的大问题。

交通管理是全局性的,对实时性要求很高,安全问题尤为突出。对公路交通来说,公路管理人员和司机通常很难立即得到沿途的路面情况和事故信息,公路管理人员常常在交通事故发生几小时后,甚至已解决完毕,才能将信息通过人工方式提供给司机。目前世界上一些国家的交通管理部门都在应用先进的实时智能交通系统(intelligent transportation system, ITS)来有效地减轻管理人员的负担。实时智能系统可将大量的实时控制过程和管理层数据转变为智能系统的信息,并且按照专

家的方式去处理这些信息. ITS 就是通过分析和控制复杂的交通信息, 帮助管理人员为司机提供秒级的最新交通状况. 在欧美一些地区, ITS 已在公路、铁路、港口、航空等许多领域得到应用.

对城市交通的管理和控制而言, 以往单一的信号控制系统, 或交通监视系统已不能满足日益严重的城市交通问题. 构成交通监控系统的各分系统在控制中心只是物理位置的组合, 相互独立, 网络化水平低, 不能构成有机协调运行的整体, 系统整体效益难以充分发挥.

交通管理与控制的根本目的就是保证道路交通畅通、安全、舒适、低公害. 为此, 系统必须实时监测并自动组织调度控制区域内的各种交通流, 保证区域内道路网交通负荷处于最佳平衡状态; 及时发现、快速处理突发性交通和治安事件, 迅速疏导由此而引起的交通堵塞, 恢复正常交通秩序; 为警卫、抢险、救护、消防等特殊紧急任务提供快速通路. 要真正做到这些, 就必须建立智能化的城市交通管理系统.

本书将就智能化的城市交通管理系统的功能、以及系统构成进行分析, 并特别对城市交通指挥调度决策系统的功能进行详细的分析.

## 1.7 最优化理论基础<sup>[1]</sup>

### 1.7.1 凸集和凸函数

#### 1) 凸集

**定义 1.1** 设  $D$  为  $n$  维欧氏空间  $\mathbf{E}^n$  中的一个集合, 若连接  $D$  中任意两点的线段仍在  $D$  中, 则称  $D$  为凸集. 用数学语言表述即为:

$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ , 以及任意的  $\lambda \in [0, 1]$ , 有

$$\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in D$$

#### 2) 凸函数

**定义 1.2** 设  $D$  为  $n$  维欧氏空间  $\mathbf{E}^n$  中的非空凸集,  $f$  是定义在  $D$  上的实函数, 如果对任意的  $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D$ , 以及  $\lambda \in [0, 1]$ , 都有

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2)$$