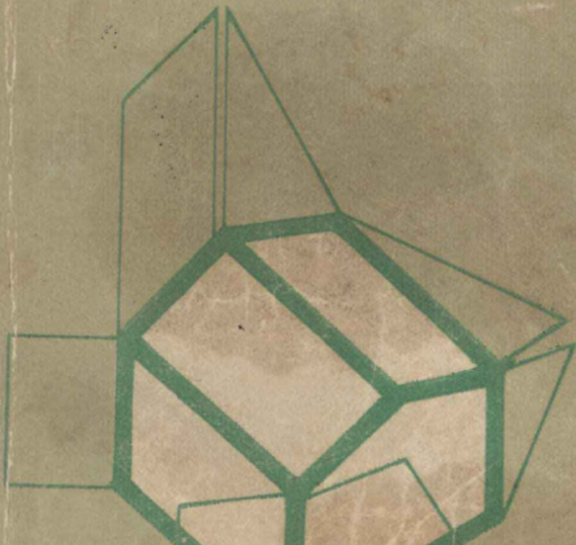
高中立体几何一题多解

徐玉昌　方淑珍　编著



ISBN 7-5316-1264-X
G·916 定价：5.40元

高中立体几何一题多解

徐宝昌　方淑珍　编著

黑龙江教育出版社

1991年·哈尔滨

高中立体几何一题多解

徐宝昌　方淑珍　编著

责任编辑：孙怀川

封面设计：王孔刚

黑龙江教育出版社出版(哈尔滨市道里区九站街1号)

哈尔滨市龙华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32、印张16.25字数332千

1991年6月第1版·1991年6月第1次印刷

印数：1—4,1:6

ISBN 7-5316-1264-X/G·916　定价：5.40元

前　言

为了帮助高中学生和自学青年学好立体几何，掌握立体几何的学习方法和解题规律，提高学习成绩，我们编写了这本《高中立体几何一题多解》，以期达到帮助学生克服困难，培养毅力，训练思维，开发智力，增强数学素质，提高学习质量的目的。

本书编写过程力求做到以下各点：

（一）配合教材，题型归类．书中选用了一些有代表性的典型例题，按教材单元顺序编排归类．对每一道例题都能从不同角度分析解题思路，给出多种不同的解法，可供选优吸取．在每一类例题之后都有解法小结，归纳共性，概括解题方法，总结解题规律，具有启发性和指导性，帮助学生开阔视野，拓宽思路，加深理解，灵活运用基础知识，提高解题能力。

（二）训练思维，举一反三．书中对每一道例题的解法都做了深入的探讨，注意训练学生掌握立体几何的分析思考、作图想象、推理论证、书面表达等解答问题的各个环节的实际能力．使学生做一题通一类，对每一类问题都能至少掌握一种基本的解题思考路线和基本解法，做到有章可循，有法可想，减少盲目性和依赖性，提高解题的自觉性。

（三）综合运用知识．书中对每一道例题所涉及的知识和方法，既能在纵向上进行串联，使立体几何的前后知识有

机联系，融会贯通，又能在横向上进行联结，使平面几何、三角、代数知识进入立体几何，并得到有效应用。既能满足初学者的要求，又能满足总复习的需要。

为了帮助读者对照高考检查立体几何的学习效果，书后附录了“历年高考立体几何试题选编”，并给出了答案与提示，可供参考。

本书是编者多年教学工作的积累。由于水平所限，书中难免有不少缺点和错误，诚恳希望广大读者给予批评指正。

编　者

1990年10月于哈尔滨三中

目　录

第一章　直线和平面

一　平　　面

1. 诸线共面问题

例 1　如果三条平行直线 a、b、c 都与直线 l 相交，那么这四条直线共面。

已知　如图 1，直线 $a//b//c$，且与直线 l 分别交于 A、B、C 点。

求证　a、b、c、l 四条直线在同一平面内。

分析　要证 a、b、c、l 四条直线共面，就要从二平行直线确定平面开始，再证第三条直线在这个平面内，第四条直线也在这个平面内，使四条直线共面可证。

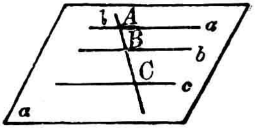


图　1

证法一：$a//b$，a、b 确定平面 α。

$$\left.\begin{array}{l} l\cap a=A,\ A\in\alpha \\ l\cap b=B,\ B\in\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow l\subset\alpha.$$

∴　a、b、l 三直线共面

$l\cap c=C$，$c\in\alpha$，直线 b 和点 C 都在 α 平面内，由 $b//c$，b、c 确定平面 β，直线 b 和点 C 都在平面 β 内，由此可知 α、β 是同一平面。

∴　直线 a、b、c、l 共面。

证法二：同证法一，a、b、l 都在平面 α 内。

$c // b$，c、b 确定平面 β，

$\left.\begin{array}{l} l\cap b=B,\ B\in\beta \\ l\cap c=C,\ C\in\beta \end{array}\right\}\Rightarrow l\subset\beta$，直线 b、l 都在平面 β 内，前证直线 b、l 都在平面 α 内，$b\cap l=B$，平面 α、β 是同一平面。

∴ a、b、c、l 四条直线共面。

证法三：同证法一，a、b、l 共面。

由 $l\cap c=C$，$C\in\alpha$，直线 c 与平面 α 有公共点 C。

假设直线 $c\not\subset\alpha$，则由 $\left.\begin{array}{r} c // b \\ b\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow c // \alpha$，这与前证直线 c 和平面 α 有公共点 C 矛盾，故假设不成立，∴直线 $c\subset\alpha$。

∴ a、b、c、l 四条直线共面。

例 2 证明：两两相交且不过同一点的 n($n\geqslant 3$，$n\in N$) 条直线在同一平面内。

已知 直线 a_1、a_2、…、a_n，两两相交且不过同一点。

求证 这 n 条直线在同一平面内。

分析 要证 n 条直线在同一平面内，就要先从中任取两条直线，由其相交可确定一个平面，然后引出第 3 条直线，因其与前两条直线都相交，故此直线在前两条直线所确定的平面内。……，如此继续下去，引出第 4 条、第 5 条、直到第 n 条直线都在此平面内，使命题可证。

证法一：如图2，由直线 $a_1\cap a_2=A_1$，a_1、a_2确定平面α。

$\left.\begin{array}{l} \text{由 } a_3\cap a_1=A_2,\ a_1\subset\alpha\quad A_2\in\alpha \\ \quad a_3\cap a_2=A_3,\ a_2\subset\alpha,\ A_3\in\alpha \\ \quad A_2\text{、}A_3\in a_3 \text{ 且是不同的点} \end{array}\right\}\Rightarrow a_3\subset\alpha$。

同理推得 a_4、a_5、…、a_n 都在平面 α 内。

∴ 两两相交且不过同一点的 n 条直线共面。

证法二：由 $a_1 \cap a_2 = A_1$，$a_3 \cap a_1 = A_2$，$a_3 \cap a_2 = A_3$ 且 a_1、a_2、a_3 两两相交，A_1、A_2、A_3 不共线，∴ A_1、A_2、A_3 在同一平面 α 内。

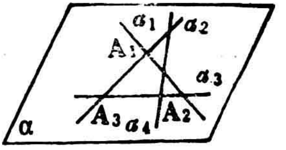


图 2

a_4 和 a_1、a_2、a_3 都相交，其交点都在 α 内，∴ $a_4 \subset \alpha$.

同理可证，a_5、a_6、…、a_n 都在平面 α 内，

∴ 两两相交且不过同一点的 n 条直线共面。

证法三：用数学归纳法证明

(1) 当 $n=3$ 时，a_1、a_2、a_3 两两相交，其交点为 A_1、A_2、A_3 不共线 $\Rightarrow A_1$、A_2、A_3 确定平面 α，a_1、a_2、$a_3 \subset \alpha$。

(2) 假设 $n=k$ 时命题成立，即两两相交且不过同一点的 k 条直线 a_1、a_2、…、a_k 都在平面 α 内。

当 $n=k+1$ 时，增加一条直线 a_{k+1}，和前 k 条直线 a_1、a_2、…、a_k 都相交，有 k 个不同的交点都在 a_1、a_2、…a_k 所在的平面 α 内，∴直线 a_{k+1} 也在平面 α 内。

即当 $n=k+1$ 时命题也成立。

由 (1)、(2) 所证，对 $n \geqslant 3$ ($n \in N$) 命题都成立。

解法小结 证明诸线共面问题的基本方法是：

(1) 由两条平行直线或相交二直线确定平面，再依据平面的基本性质证明第 3 条、第 4 条、…、以至第 n 条直线都在此平面内。

(2) 可以由已知条件分别确定两个平面，再论证这两个

平面是同一的。

(3) 推导和自然数 n 有关的命题，要由特殊到一般、由具体到抽象发现规律进行推理论证。用数学归纳法证明时要注意步步有据，推理严谨。

2. 诸点共面问题

例 3 (1) 正方体 8 个顶点共确定多少个平面？

(2) 正方体 6 个面的中心共确定多少个平面？

已知　正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，

求　(1) 8 个顶点 A、B、C、D、A_1、B_1、C_1、D_1 所确定的平面的个数；

(2) 6 个面的中心 M、N、P、Q、R、S 所确定的平面的个数。

分析(1) 要判定正方体 8 个顶点所确定的平面的个数，须由表及里依据平面的基本性质进行思考，要看到表面，要想到正方体里的对角面，还要想到正方体中的不共线三点所确定的平面，如平面 ACB_1 等，只要数清这些平面的个数即可；

(2) 要判定正方体 6 个面的中心所确定的平面的个数，只须判断连结 6 个面的中心所构成的几何体的形状，数清侧面及对角面的个数即可。

解法一：如图 3，(1) 正方体的 8 个顶点所确定的平面中，有①表面 6 个；②对角面 6 个；③由不共线三点所确定的类似 ACB_1 这样的平面每个顶点对应 1 个，共有 $6+6+8=20$ 个。

(2) 连结正方体 6 个面的中心组成一个八面体，表面有

8 个，对角面有 $PQRS$、$MQNS$ 和 $MPNR$ 等 3 个，共确定平面 $8+3=11$ 个。

∴ 正方体的 8 个顶点确定平面20个，其 6 个面的中心确定平面11个。

解法二： 由公理 3，应用组合知识间接计算。

(1) 过正方体 8 个顶点的平面共有 C_8^3 个。

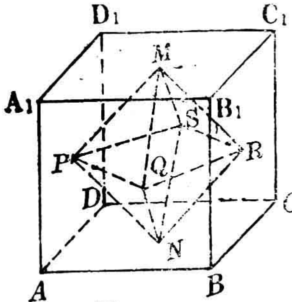


图 3

其中有 6 个表面，6 个对角面都是 4 点共面的，应减去 $12C_4{}^3$ 个，但不能把已有的表面和对角面都减掉，还应再加上现有的 6 个对角面和 6 个表面得 $C_8^3-12C_4{}^3+12=56-48+12=20$ 个。

(2) 过正方体 6 个面中心的平面共有 $C_6{}^3$ 个。

其中有对角面 3 个都是 4 点共面的，应从中减掉 $3C_4{}^3$ 个，但不能把已有的对角面全减掉，还应再加上现有 3 个对角面得

$C_6{}^3-3C_4{}^3+3=20-12+3=11$个。

∴ 正方体的 8 个顶点共确定平面 20个，6 个面的中心共确定平面 11 个。

例 4 证明：正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中的棱 AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1、A_1A 的中点 E、F、G、H、P、Q，在同一平面内。

已知 如图 4，E、F、G、H、P、Q 是正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱AB、BC、CC_1、C_1D_1、D_1A_1、A_1A的中点。

求证　E、F、G、H、P、Q 共面。

分析　要证 6 个点共面，须先由 $QG//EF$，QG、EF 确定平面 α，以下只须证 P、H 两点在平面 α 内。由 $HG//QE$，$G\in\alpha$，可证 $H\in\alpha$；由 $PQ//FG$，$Q\in\alpha$，可证 $P\in\alpha$。

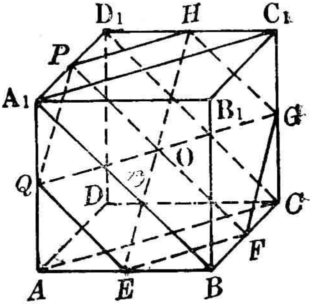


图　4

证法一：由 Q、G 是棱的中点，则 $AQ \perp\!\!\!= CG \Rightarrow ACGQ$ 是

$$\left.\begin{array}{l}\text{矩形}\Rightarrow QG//AC\\ E\text{、}F\text{ 是棱的中点，}EF//AC\end{array}\right\}\Rightarrow EF//QG\Rightarrow$$

E、F、G、Q 四点共面 α。

$$\left.\begin{array}{l}\text{由 }H\text{、}G\text{ 是棱的中点}\Rightarrow HG//D_1C\\ Q\text{、}E\text{ 是棱的中点}\Rightarrow QE//A_1B\\ A_1D_1CB\text{ 是矩形}\Rightarrow D_1C//A_1B\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow HG//QE\\ \quad QE\subset\alpha\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow HG//\text{平面 }\alpha\\ G\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow HG\subset\alpha\Rightarrow\text{点 }H\in\alpha.$$

同理，$\left.\begin{array}{r}PQ//FG\\ FG\subset\alpha\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow PQ//\alpha\\ Q\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow PQ\subset\alpha\Rightarrow P\in\alpha.$

$\therefore$　E、F、G、H、P、Q 六点共面。

证法二：设不共线三点 E、F、G 确定平面 α，同证法一，$\left.\begin{array}{r}QG//EF\\ EF\subset\alpha\end{array}\right\}\left.\begin{array}{r}\Rightarrow QG//\alpha\\ G\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow QG\subset\alpha\Rightarrow Q\in\alpha.$

同理，$P\in\alpha$，$H\in\alpha$。

$\therefore$　E、F、G、H、P、Q 六点共面。

证法三：

$$\left.\begin{array}{r}P、H\text{是中点}\Rightarrow PH//A_1C_1\text{且}PH=\frac{1}{2}A_1C_1\\ E、F\text{是中点}\Rightarrow EF//AC\text{且}EF=\frac{1}{2}AC\\ AC\perp\!\!\!\!\!\!= A_1C_1\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow PH\perp\!\!\!\!\!\!= EF\Rightarrow EFHP$是平行四边形，$E$、$F$、$H$、$P$共面$\alpha$，$HE\cap FP=O$且在$O$点互相平分。

同理，$HG\perp\!\!\!\!\!\!= QE\Rightarrow HGEQ$是平行四边形，$QG\cap HE=O'$且在$O'$互相平分。

$$\text{由}\left.\begin{array}{r}HO=OE\\ HO'=O'E\end{array}\right\}\Rightarrow O\text{与}O'\text{重合}\Rightarrow O\text{是}QG\text{中点}\Rightarrow O\in\text{平面}\alpha。$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}QG//AC\\ EF//AC\end{array}\right\}\Rightarrow QG//EF\\ EF\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow QG//\text{平面}\alpha\\ O\in\alpha,\ O\in QG\end{array}\right\}\Rightarrow QG\subset\text{平面}\alpha\Rightarrow Q、G\in\alpha。$$

$\therefore$ E、F、G、H、P、Q六点共面。

证法四：由正方体的对称性，设O是对称中心，

$$\left.\begin{array}{l}H、E\text{关于}O\text{点对称}\\ P、F\text{关于}O\text{点对称}\end{array}\right\}\Rightarrow HE\cap PF=O\Rightarrow E、F、H、P\text{四点共面}\alpha。$$

$$\left.\begin{array}{r}Q、G\text{关于}O\text{点对称}\Rightarrow O\in QG\\ O\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow QG\text{与}\alpha\text{有公共点}O。$$

$$\text{由}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}QG//AC\\ EF//AC\end{array}\right\}\Rightarrow GQ//EF\\ EF\subset\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow QG//\alpha\\ O\in\alpha,\ O\in QG\end{array}\right\}\Rightarrow QG\subset\alpha\Rightarrow Q、G\in\alpha。$$

∴ E、F、G、H、P、Q 六点共面.

证法五：$\left.\begin{array}{r} P\text{、}H\text{ 是中点，}PH//A_1C_1 \\ A_1C_1//QG \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow PH//QG \\ QG//AC \\ AC//EF \end{array}\right\} \Rightarrow PH//QG//EF.$$

$$\left.\begin{array}{l} H\text{、}E\text{ 关于 }O\text{ 点对称} \\ Q\text{、}G\text{ 关于 }O\text{ 点对称} \end{array}\right\} \Rightarrow HE \cap QG = O.$$

问题转化为"三条直线 $PH//EF//QG$，HE 和这三条平行线分别交于 E、O、H，求证 PH、EF、QG 和 HE 四条直线共面"，由例1的方法可证四条线段 PH、EF、QG、HE 共面. ∴ E、F、G、H、P、Q 六点共面.

解法小结　证明诸点共面问题时基本方法是：

(1) 根据平面的基本性质、公理3及其推论，先找出已知点中的部分共面点确定平面，然后证明其余的点一个个都在所确定的平面内.

(2) 也可以由已知条件分别确定两个平面，再证明这两个平面是同一的.

3. 诸线共点问题

例 5　正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，E、F、G、H 分别是棱 AB、BC、CC_1、C_1D_1 的中点，证明 EF、HG、DC 三线共点.

已知　E、F、G、H 分别是正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的棱 AB、BC、CC_1、C_1D_1 的中点.

求证　EF、HG、DC 三线共点.