

如果您使用过各种高级辅导资料，但成效不大，
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

Wmm

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十八年 ◆ 风靡几代人

专利产品

专利证书号1697051号

与同济大学《高等数学》（第六版）配套
普通高等教育“十五”国家级规划教材配套用书

高等数学

教与学参考

上下册
合订本

阎国辉 张宏志 主编

(第六版)

ARCTIME
时代出版

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

如果您使用过各种高级辅导资料 但成效不大
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

王迈迈图书品牌 ◆ 畅销十八年 ◆ 风靡几代人

(第六版)

高等数学

教与学参考

上下册
合订本

阎国辉 张宏志 主编

与同济大学《高等数学》(第六版)配套
普通高等教育“十五”国家级规划教材配套用书

ARCTIME
时代出版

时代出版传媒股份有限公司
安徽教育出版社

使用说明

Instructions

高等数学第六版

1. 考点提示及大纲要求

关注大纲与考点, 讲究效率与方
法, 是本书最大的特色。

2. 重点知识结构图

核心考点脉络清晰, 大纲要求
一目了然。

第一部分 函数与极限

第一章

函数与极限

一、考点提示及大纲要求

考点提示

1. 函数的概念及表示法;
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
3. 反函数、复合函数、隐函数、基本初等函数的性质及图形、初等函数;
4. 高中范围内函数的性质的建立;
5. 数列极限与函数极限的定义和它们的性质、函数的左、右极限和间断点的类型;
6. 无穷小(大)、无穷小的比较;
7. 极限的四则运算、极限存在的两个准则、单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限;
8. 函数连续的概念、初等函数的连续性和区间上连续函数的性质。

大纲要求

1. 深入理解函数的概念, 了解函数的类型, 熟练掌握函数的性质;
2. 正确理解极限的概念, 了解数列极限与函数极限的区别与联系, 熟练掌握求极限的方法;
3. 理解函数连续与间断的概念, 掌握并灵活运用连续函数的性质。

二、重点知识结构图

三、常考题型与范例精解

一、填空题

例1 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, $g(x) = 1 - \ln x$, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 的定义域为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
解 令 $t = g(x)$, 由题意知 $f(t)$ 的定义域为 $(0, 1]$
即 $0 < 1 - \ln x \leq 1$, 解得 $1 \leq x < e$
所以 $f(g(x))$ 的定义域为 $[1, e)$ 。

四、考研经典题剖析

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$ (2005 年数学三试题)
解 当 $x \rightarrow 0$ 时, x 为无穷小量, $\sin\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ 是有界变量,
无穷小量乘有界变量仍为无穷小量。
因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{2x}{x+1}\right) = 0$ 。

3. 常考题型与范例精解

题型典型灵活, 解题方法富于
技巧, 内容覆盖面宽。

4. 考研经典题剖析

开阔视野, “一步到位”, 使
读者更加明了考研的题型和难度,
做到有的放矢。

Everyone complains of his memory and no one complains of his judgement
许多人抱怨自己的记忆力不好，却无人抱怨自己的判断力不佳

如果您使用过各种高数辅导资料 但成效不大
请您使用王迈迈图书品牌系列丛书

教与学参考八大特色

第一点 > 成数与根解



五、典型错误类型及根源分析

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$, 求 $f(-x)$.

【错解】 $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 + 1, & x \geq 0 \\ (-x)^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

即 $f(-x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

【分析】 计算 $f(-x)$ 时应将原来的函数关系式中出现的变量 x 的地方按规律“ x ”代替，特别对分段表示的函数，要将表示自变量取值范围中的 x 用 $-x$ 代替。

【正确解答】 $f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 + 1, & -x \geq 0 \\ (-x)^2 - 1, & -x < 0 \end{cases}$

即 $f(-x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ x^2 - 1, & x > 0 \end{cases}$

5. 典型错误类型及根源分析

历史是一面镜子。本书作者结合几十年教学经验，对一届届学生在典型知识考点中所犯的共性错误，进行了深入的根源分析，析理透彻，一针见血。



六、学习效果两级测试

基础测试

一、选择题

1. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$ 是初等函数 ()

2. 若 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$



七、课后习题解答与两级测试题答案

习题1-1 解答

1. 解 $A \cup B = \{-1, 3\} \cup \{5, +\infty\}$,
 $A \cap B = \{5, +\infty\}$,
 $A \setminus B = \{-1, 3\}$,
 $A \cap (A \setminus B) = \{-1, 3\}$.

2. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

3. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

4. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

5. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

6. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

7. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

8. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

9. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

10. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

11. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

12. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

13. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

14. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

15. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

16. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

17. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

18. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

19. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

20. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

21. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

22. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

23. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

24. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

25. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

26. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

27. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

28. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

29. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

30. 解 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

Preface 前言

同济大学的《高等数学》第六版是适应时代要求、符合改革精神又继承传统优点的面向二十一世纪的新教材。为了帮助同学们尽快学好该书，我们根据自己多年的教学经验并参照最新考研大纲精神，重新编写了《高等数学教与学参考》一书。

本书针对同学们学习高等数学的特点，力求通过精选的例题揭示解题的一般规律和技巧。能让同学们在没有任何老师辅导的情况下，通过这本详尽的参考就能完全学懂学好《高等数学》，在较短的时间内取得好的成绩。

《高等数学教与学参考》就是在这种思想的指导下写成的。该书为上下册合订本。完全与教材内容同步，完全按教材章节编写。上册七个章节，下册五个章节。每个章节都包括以下七个方面的内容：

一、考点提示及大纲要求。

大纲要求一目了然，考点简明扼要。

二、重点知识结构图。

该图提纲挈领，逻辑性强，体系完整。

三、常考题型与范例精解。

题型典型灵活，解题方法富于技巧，内容覆盖全面。

四、考研经典题剖析。

开阔视野，“一步到位”，使读者更加明了考研的题型和难度，做到有的放矢。

五、典型错误类型及根源分析。

析理透彻，一针见血。

六、学习效果两级测试。

循序渐进，层次分明，适合不同要求，便于复习巩固所学知识。

七、习题解答与两级测试题详解。

便于自我检测。

最后随书赠送一份疑难问题解答和考研模拟测试题与解答，以供读者对自己的学习效果进行评估。

我们真诚希望《高等数学教与学参考》能够成为广大读者的知心朋友。

我们也十分清楚，由于水平所限，加之时间仓促，不妥之处在所难免，恳请各位读者及同行不吝赐教。

编者

C 目录 CONTENTS

第一章 函数与极限

一、考点提示及大纲要求	(1)
二、重点知识结构图	(2)
三、常考题型及范例精解	(3)
四、考研经典题剖析	(9)
五、典型错误类型及根源分析	(15)
六、学习效果两级测试	(17)
基础测试题	(17)
考研训练题	(19)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(19)
习题 1—1 解答	(19)
习题 1—2 解答	(24)
习题 1—3 解答	(27)
习题 1—4 解答	(30)
习题 1—5 解答	(32)
习题 1—6 解答	(34)
习题 1—7 解答	(36)
习题 1—8 解答	(37)
习题 1—9 解答	(40)
习题 1—10 解答	(42)
总习题一解答	(43)
基础测试题答案	(47)

考研训练题答案	(47)
---------------	------

第二章 导数与微分

一、考点提示及大纲要求	(48)
二、重点知识结构图	(49)
三、常考题型及范例精解	(50)
四、考研经典题剖析	(56)
五、典型错误类型及根源分析	(60)
六、学习效果两级测试	(63)
基础测试题	(63)
考研训练题	(64)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(65)
习题 2—1 解答	(65)
习题 2—2 解答	(69)
习题 2—3 解答	(74)
习题 2—4 解答	(77)
习题 2—5 解答	(81)
总习题二解答	(86)
基础测试题答案	(90)
考研训练题答案	(90)

第三章 微分中值定理与导数的应用 (91)

一、考点提示及大纲要求	(91)
二、重点知识结构图	(92)
三、常考题型及范例精解	(93)
四、考研经典题剖析	(101)
五、典型错误类型及根源分析	(110)
六、学习效果两级测试	(114)
基础测试题	(114)
考研训练题	(115)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(116)
习题 3—1 解答	(116)

习题3—2 解答	(120)
习题3—3 解答	(122)
习题3—4 解答	(126)
习题3—5 解答	(133)
习题3—6 解答	(138)
习题3—7 解答	(141)
习题3—8 解答	(145)
总习题三解答	(147)
基础测试题答案	(154)
考研训练题答案	(154)

第四章 不定积分

一、考点提示及大纲要求	(155)
二、重点知识结构图	(156)
三、常考题型及范例精解	(157)
四、考研经典题剖析	(164)
五、典型错误类型及根源分析	(165)
六、学习效果两级测试	(168)
基础测试题	(168)
考研训练题	(169)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(169)
习题4—1 解答	(169)
习题4—2 解答	(172)
习题4—3 解答	(177)
习题4—4 解答	(181)
习题4—5 解答	(187)
总习题四解答	(189)
基础测试题答案	(196)
考研训练题答案	(196)

第五章 定积分

一、考点提示及大纲要求	(198)
-------------------	-------

二、重点知识结构图	(199)
三、常考题型及范例精解	(200)
四、考研经典题剖析	(208)
五、典型错误类型及根源分析	(216)
六、学习效果两级测试	(219)
基础测试题	(219)
考研训练题	(220)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(221)
习题 5—1 解答	(221)
习题 5—2 解答	(226)
习题 5—3 解答	(230)
习题 5—4 解答	(236)
* 习题 5—5 解答	(238)
总习题五解答	(240)
基础测试题答案	(249)
考研训练题答案	(249)

第六章 定积分的应用

一、考点提示及大纲要求	(250)
二、重点知识结构图	(251)
三、常考题型及范例精解	(252)
四、考研经典题剖析	(260)
五、典型错误类型及根源分析	(264)
六、学习效果两级测试	(265)
基础测试题	(265)
考研训练题	(266)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(267)
习题 6—2 解答	(267)
习题 6—3 解答	(277)
总习题六解答	(281)
基础测试题答案	(285)
考研训练题答案	(285)

第七章 微分方程

一、考点提示及大纲要求	(286)
二、重点知识结构图	(288)
三、常考题型及范例精解	(289)
四、考研经典题剖析	(296)
五、典型错误类型及根源分析	(301)
六、学习效果两级测试	(303)
基础测试题	(303)
考研训练题	(305)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(305)
习题 7—1 解答	(305)
习题 7—2 解答	(307)
习题 7—3 解答	(311)
习题 7—4 解答	(315)
习题 7—5 解答	(321)
习题 7—6 解答	(326)
习题 7—7 解答	(331)
习题 7—8 解答	(334)
* 习题 7—9 解答	(341)
* 习题 7—10 解答	(344)
总习题七解答	(348)
基础测试题答案	(358)
考研训练题答案	(359)
附录 I 习题解答	(360)

第八章 空间解析几何与向量代数

一、考点提示及大纲要求	(362)
二、重点知识结构图	(364)
三、常考题型与范例精解	(365)
四、考研经典题剖析	(372)
五、典型错误类型及根源分析	(373)
六、学习效果两级测试	(377)

基础测试题	(377)
考研训练题	(378)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(379)
习题 8—1 解答	(379)
习题 8—2 解答	(381)
习题 8—3 解答	(384)
习题 8—4 解答	(386)
习题 8—5 解答	(388)
习题 8—6 解答	(389)
总习题八解答	(393)
基础测试题答案	(400)
考研训练题答案	(400)

第九章 多元函数微分法及其应用

一、考点提示及大纲要求	(401)
二、重点知识结构图	(403)
三、常考题型与范例精解	(404)
四、考研经典题剖析	(411)
五、典型错误类型及根源分析	(414)
六、学习效果两级测试	(417)
基础测试题	(417)
考研训练题	(418)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(419)
习题 9—1 解答	(419)
习题 9—2 解答	(422)
习题 9—3 解答	(424)
习题 9—4 解答	(427)
习题 9—5 解答	(430)
习题 9—6 解答	(433)
习题 9—7 解答	(438)
习题 9—8 解答	(442)
* 习题 9—9 解答	(447)
* 习题 9—10 解答	(449)

总习题九解答	(450)
基础测试题答案	(458)
考研训练题答案	(458)

第十章 重积分

一、考点提示及大纲要求	(459)
二、重点知识结构图	(460)
三、常考题型与范例精解	(461)
四、考研经典题剖析	(469)
五、典型错误类型及根源分析	(473)
六、学习效果两级测试	(476)
基础测试题	(476)
考研训练题	(477)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(478)
习题 10—1 解答	(478)
习题 10—2 解答	(480)
习题 10—3 解答	(493)
习题 10—4 解答	(499)
* 习题 10—5 解答	(507)
总习题十解答	(509)
基础测试题答案	(519)
考研训练题答案	(520)

第十一章 曲线积分与曲面积分

一、考点提示及大纲要求	(521)
二、重点知识结构图	(522)
三、常考题型与范例精解	(523)
四、考研经典题剖析	(531)
五、典型错误类型及根源分析	(534)
六、学习效果两级测试	(537)
基础测试题	(537)
考研训练题	(539)

七、课后习题解答与两级测试题详解	(540)
习题 11—1 解答	(540)
习题 11—2 解答	(543)
习题 11—3 解答	(547)
习题 11—4 解答	(552)
习题 11—5 解答	(556)
习题 11—6 解答	(559)
习题 11—7 解答	(561)
总习题十一解答	(564)
基础测试题答案	(571)
考研训练题答案	(571)

第十二章 无穷级数

一、考点提示及大纲要求	(572)
二、重点知识结构图	(574)
三、常考题型与范例精解	(575)
四、考研经典题剖析	(585)
五、典型错误类型及根源分析	(588)
六、学习效果两级测试	(591)
基础测试题	(591)
考研训练题	(592)
七、课后习题解答与两级测试题详解	(593)
习题 12—1 解答	(593)
习题 12—2 解答	(596)
习题 12—3 解答	(599)
习题 12—4 解答	(602)
习题 12—5 解答	(605)
* 习题 12—6 解答	(611)
习题 12—7 解答	(614)
习题 12—8 解答	(620)
总习题十二解答	(623)
基础测试题答案	(631)
考研训练题答案	(632)



第一章

函数与极限



一、考点提示及大纲要求



考点提示

1. 函数的概念及表示法;
2. 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;
3. 反函数、复合函数、隐函数、基本初等函数的性质及图形,初等函数;
4. 简单应用问题的函数关系的建立;
5. 数列极限与函数极限的定义和它们的性质,函数的左、右极限和间断点的类型;
6. 无穷小(大);无穷小的比较;
7. 极限的四则运算;极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

8. 函数连续的概念、初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

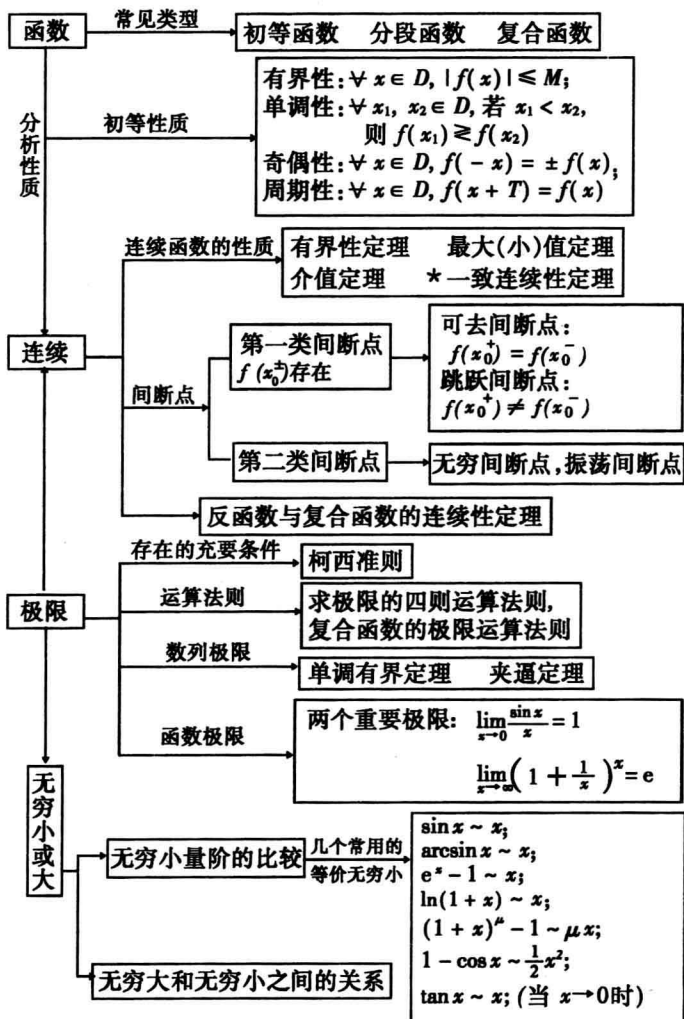


大纲要求

1. 深入理解函数的概念,了解函数的类型,熟练掌握函数的性质;
2. 正确理解极限的概念,了解数列极限与函数极限的区别与联系,熟练掌握求极限的方法;
3. 理解函数连续与间断的概念,掌握并灵活运用连续函数的性质.



二、重点知识结构图





三、常考题型与范例精解

一、填空题

例1 设 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 1]$, $\varphi(x) = 1 - \ln x$, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域为_____.

解 令 $t = \varphi(x)$, 由题意知 $f(t)$ 的定义域为 $(0, 1]$

即 $0 < 1 - \ln x \leq 1$, 解得 $1 \leq x < e$

所以 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $[1, e)$.

例2 函数 $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$ 的反函数为_____.

解 从 $y = \sqrt{\pi + 4\arcsin x}$ 中解出

$$x = \sin \frac{1}{4}(y^2 - \pi)$$

所以反函数为 $y = \sin \frac{1}{4}(x^2 - \pi)$

而 y 的值域为 $[0, \sqrt{3\pi}]$, 故反函数的定义域为 $[0, \sqrt{3\pi}]$

例3 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\ln \frac{x}{x+1}\right) \cos[\ln(x(x+1))]$ = _____.

解 因为 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x}{x+1} \rightarrow 1$

$\ln \frac{x}{x+1} \rightarrow 0$, 所以 $\sin\left(\ln \frac{x}{x+1}\right) \rightarrow 0$

而 $|\cos[\ln(x(x+1))]| \leq 1$

故 原式 = 0

例4 若 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a =$ _____.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} + \frac{e^{2ax} - 1}{x} \right) = 2 + 2a$

故 $2 + 2a = a$, 即 $a = -2$

二、选择题

例5 设 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+a)x^4 + bx^3 + 2}{x^3 + x^2 - 1} = -2$, 则 a, b 的值分别为()

A. $a = -3, b = 0$;

B. $a = 0, b = -2$;

C. $a = -1, b = 0$;

D. $a = -1, b = -2$.

解 由公式

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } m = n, \\ 0, & \text{当 } n < m, \\ \infty, & \text{当 } n > m. \end{cases}$$

可知,仅当分子分母关于 x 的最高次数相同时,极限才是不为零的数值,因此必须 $a = -1, b = -2$,故选择 D.

例 6 下列四个极限之中,有三个极限值完全相同,试选出与众不同的极限值的代号()

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \cos \frac{1}{n})$;

B. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$;

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$;

D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin[\ln(x+1) - \ln x]}{\ln(x+1) - \ln x}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = 1$,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$, 从而 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,

令 $y = \ln(x+1) - \ln x = \ln(1 + \frac{1}{x})$, 易见为 $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$,

易见 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin[\ln(1+x) - \ln x]}{\ln(1+x) - \ln x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$.

从而与众不同的极限值只能是 A, 故选择 A.

例 7 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义, $f(x) \neq 0$ 是连续函数, $\varphi(x)$ 有间断点, 则()

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点;

B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点;

C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点;

D. $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解 由函数的连续性, 可以看出 A, B 不成立, 为此举出一个简单的反例: 设

$f(x) = 2, \varphi(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$, 易见 $f[\varphi(x)] = 2, \varphi^2(x) = 4, \varphi[f(x)] = 2$ 都

无间断点; 令 $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = F(x)$, 若 $F(x)$ 是连续的, 则 $\varphi(x) = F(x)f(x)$ 必定连续, 故选择 D.

例 8 函数 $y = |\sin x| + |\cos x|$ 是周期函数, 它的最小正周期是()

A. 2π ;

B. π ;

C. $\pi/2$;

D. $\frac{\pi}{4}$.

解 因为 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$,

所以 $|\sin(x + \pi/2)| = |\cos x|, |\cos(x + \pi/2)| = |\sin x|$,

从而 $y(x + \frac{\pi}{2}) = y(x)$, 故选择 C.

三、综合题

例 9 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$, 求下列函数的定义域:

(1) $f(2x)$;

(2) $f(x+3)$.

解 由函数定义知

(1) $f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq 2x \leq 1 \\ -1, & 1 < 2x \leq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ -1, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$, 从而定义域为 $[0, 1]$,