考拉进阶GOGO koala

金星教育 全国一亿读者首选 畅销十七年

配高教版·同济大学数学系 编
《高等数学》第六版(上、下册)

高等数学
习题全解

曹圣山 主编

超详解

过程步骤最详 方法技巧最全

- 关键步骤加注解 讲解更到位
- 配有教材原题目 使用更方便

中国海洋大学出版社

考拉进阶GOGO koala

配高教版·同济大学数学系 编
《高等数学》第六版（上、下册）

高等数学
习题全解

主　编：曹圣山
副主编：生汉芳　丁双双
李　博　胡京爽

中国海洋大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学习题全解 / 曹圣山主编. --青岛：中国海洋大学出版社，2010.5

ISBN 978－7－81125－277－4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①高等数学－高等学校－解题 Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 081998 号

出版发行　中国海洋大学出版社

社　　址　青岛市香港东路 23 号　　邮政编码　266071

网　　址　http://www.ouc－press.com

电子信箱　book@bjjxsy.com

订购电话　0532－88918393

传　　真　0532－88918393

责任编辑　世　青　　电　　话　0532－88913510

印　　制　北京泽宇印刷有限公司

版　　次　2010 年 7 月第 1 版

印　　次　2010 年 7 月第 1 次印刷

成品尺寸　145mm×210mm

印　　张　20

字　　数　539 千字

定　　价　22.80 元

前言

《高等数学》是理工、经济、管理类专业学生必修的一门重要课程，也是全国硕士研究生入学考试的重点科目。与初等数学相比，高等数学更加系统、抽象，逻辑推理更加严密。为帮助读者更好地学习高等数学，我们根据教育部高等院校教学指导委员会审订的“本科数学基础课程教学基本要求”（教学大纲）和教育部最新的“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”编写了这本书。

本书是同济大学数学系编写的《高等数学》（第六版）的配套用书。按照教材章节顺序，分为十二章，每章均设计了三个版块：

一、本节要点

由“本节知识结构”、“要点考点解析”、“本节考研要求”三部分组成。

二、习题全解

给出了过程步骤最详尽、方法技巧最全面的习题全解全析。

三、本章常考题型精讲

以每章重点知识为主线，结合历年考研真题，对常考题型进行分类总结，部分例题给出多种解法，以开拓思路，使读者更深刻地理解数学思想。

本书特色及亮点：

1.过程步骤最详，方法技巧最全。

2.关键步骤加注解，讲解更到位。

3.配有教材原题目，使用更方便。

4.根据难度及重要性，将全书习题分三个等级，以不同数量的星号标注：基础题★，多知识点综合题★★，灵活题和难题★★★。

5.解题过程中设置了【思路点拨】【方法解析】【特别提醒】【方法归纳】等栏目。

参与本书的编者长期主讲《高等数学》，教龄都在26年以上。在编写过程中，我们重点突出解题思路和方法，力求将多年的教学经验与体会渗透到本书内容中。本书第一章由曹圣山教授、李博教授、生汉芳副教授共同执笔，第二、三章由李博教授执笔，第四、七、九章由胡京爽教授执笔，第五、六、十二章由生汉芳副教授执笔，第八章由曹圣山教授执笔，第十、十一章由丁双双副教授执笔。全书由曹圣山教授、生汉芳副教授统稿和定稿。

在本书体例规划及设计过程中，高红伟教授给予了大力支持和帮助，提出了许多宝贵意见和建议，在此表示最诚挚的谢意！

本书可作为：理工、经济、管理类专业学生学习高等数学的辅导用书，参加硕士研究生入学考试的复习用书；教师讲授高等数学课程的教学参考书。

由于时间仓促及编者水平有限，书中不妥或错误之处在所难免，敬请各位同行、读者批评指正。

编者

目录

第一章 函数与极限

初等数学巩固

实数理论简介

一、实数的基本性质

1. 实数集 $\mathbf{R}$ 对加、减、乘、除(除数不为 0) 四则运算是封闭的,即任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0) 仍然是实数.

2. 实数的三歧性,实数集是有序的,任意两实数 a 和 b,必然有且仅有下列关系之一成立:$a=b, a<b, a>b$.

3. 实数的大小关系具有传递性,即若 $a>b, b>c$,则有 $a>c$.

4. 实数具有阿基米德性,即对任何 $a, b \in \mathbf{R}$,若 $b>a>0$,则存在正整数 n,使得 $na>b$.

5. 实数集 $\mathbf{R}$ 具有稠密性,即任何两个不相等的实数之间必存在无数个实数.

注:这一点和有理数是有区别的:虽然任意两个有理数之间也有无数个有理数存在,但它们不连续,即在这两个有理数之间还有无数个无理数存在. 即有理数在数轴上只具有稠密性,而不具备连续性.

例如:设 $a, b \in \mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$,则 $a \leqslant b$.

证明:用反证法. 倘若结论不成立,则根据实数集的有序性,有 $a>b$. 令 $\varepsilon=a-b$,则 ε 为正数,且 $a=b+\varepsilon$,但这与假设 $a<b+\varepsilon$ 相矛盾. 从而必有 $a \leqslant b$.

二、实数集的连续性

1. 有界集定义

设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若存在数 M,使得对一切 $x \in S$,都有 $x \leqslant M$,则称 S 为有上界的数集,数 M 称为 S 的一个上界.

设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若存在数 m,使得对一切 $x \in S$,都有 $x \geqslant m$,则称 S 为有下界的数集,数 m 称为 S 的一个下界.

若数集 S 既有上界又有下界,则称 S 为有界集;若 S 不是有界集,则称 S 为无界集.

注 1:有界集的等价定义:设 S 为 $\mathbf{R}$ 中的一个数集. 若存在数 K,使得对一切 $x \in S$,都有 $|x| \leqslant K$,则称 S 为有界集.

注 2:有界数集必存在无数个定义中的 K. 同理,有上界(或有下界) 的数集必有无数个上界(或下界).

注 3：任何有限区间都是有界集，无限区间都是无界集；由有限个数组成的数集是有界集.

2. 数集的上确界和下确界的定义

(1) 描述性定义

若 $\mathbf{R}$ 中的数集 S 有上界，则显然它有无数个上界，其中，最小的那个上界称为数集 S 的上确界. 同样，有下界数集的最大下界，称为该数集的下确界.

(2) 精确定义

上确界的精确定义：设 $\mathbf{R}$ 中的数集 S 有上界. 若数 η 满足

① 对一切 $x \in S$，有 $x \leqslant \eta$，即 η 是 S 的一个上界；

② 对任何 $\alpha < \eta$，存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 > \alpha$，即 η 是 S 的最小上界，则称 η 为数集 S 的上确界，记作 $\eta = \sup S$.

下确界的精确定义：设 $\mathbf{R}$ 中的数集 S 有下界. 若数 ξ 满足

① 对一切 $x \in S$，有 $x \geqslant \xi$，即 ξ 是 S 的一个下界；

② 对任何 $\beta > \xi$，存在 $x_0 \in S$，使得 $x_0 < \beta$，即 ξ 是 S 的最大下界，则称 ξ 为数集 S 的下确界，记作 $\xi = \inf S$.

上确界与下确界统称为确界.

注 1：由确界的定义可见，若数集 S 存在上（或下）确界，则一定是唯一的. 又若数集 S 存在上、下确界，则有 $\inf S \leqslant \sup S$.

注 2：数集 S 的确界可能属于 S，也可能不属于 S.

注 3：设数集 S 有上确界，则 $\eta = \sup S \in S \Leftrightarrow \eta = \max S$.

3. 关于上、下确界的几个例子

(1) 闭区间 $[0,1]$ 的上、下确界分别为 1 和 0.

(2) 数集 $S = \{x \mid x$ 为区间 $(0,1)$ 中的有理数$\}$ 的上、下确界分别为 $\sup S = 1, \inf S = 0$.

(3) 数集 $E = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n = 1,2,\cdots \right\}$ 的上、下确界分别为 $\sup E = \dfrac{1}{2}, \inf E = -1$.

(4) 正整数集 $\mathbf{N}^+$ 有下确界 $\inf \mathbf{N}^+ = 1$，而没有上确界.

4. 确界原理及其应用

定理（确界原理）：设 S 为非空数集. 若 S 有上界，则 S 必有上确界；若 S 有下界，则 S 必有下确界.

注 1：设 A, B 为非空数集，满足：对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 有 $x \leqslant y$. 则数集 A 有上确界，数集 B 有下确界，且 $\sup A \leqslant \inf B$.

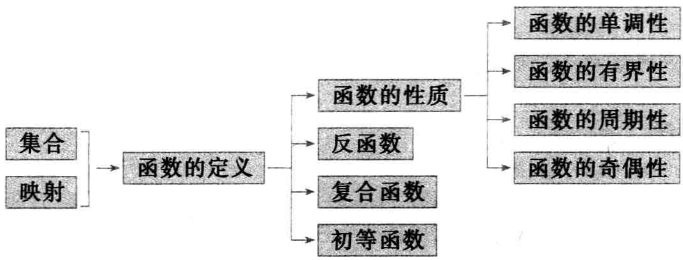
注 2：设 A, B 为非空有界数集，$S = A \cup B$，则

$$\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}, \inf S = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

第一节 映射与函数

一 本节要点

（一）「本节知识结构」



（二）「要点考点解析」

1. 基本概念、性质和方法

(1) 映射与函数

① 集合、映射、函数、反函数、复合函数的定义.(具体表述略)

② 判断两个函数是否相同有两个要素:函数的定义域是否相同,函数的表达式是否相同.

③ 进行函数的复合,特别要注意外层函数定义域、内层函数值域(即中间变量的变化范围)、内层函数的定义域(即中间变量的定义域)三者间的协调对应.

(2) 函数的几种特性及其几何意义

① 有界性

若存在数 K_1,使得 $\forall x \in X$,有 $f(x) \leqslant K_1$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

若存在数 K_2,使得 $\forall x \in X$,有 $f(x) \geqslant K_2$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界,而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X \subset D$,若存在数 $M > 0$,使得 $\forall x \in X$,有 $|f(x)| \leqslant M$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

注 1:有界性定义的等价表述:若存在数 m 和 M,使得 $\forall x \in X$,有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$,即函数既有上界,又有下界,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界.

注 2:无界的表述:若 $\forall M > 0$,总 $\exists x' \in X$,使得 $|f(x')| > M$,则称 $f(x)$ 在 X 上无界.

注 3:判断或证明函数有界的基本方法是利用函数有界性的定义,先对函数取绝对值,再进行适当的不等式缩放,找到定义中所说的常数.还可利用本章后面的结论,即利用闭区间连续函数的性质进行判断.

② 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,若 $\forall x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调增加.若 $\forall x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

注 1:严格单调函数:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,若 $\forall x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$,若 $\forall x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) > f(x_2)$ 成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上严格单调减少.

注 2:判断函数单调性通常有两种方法:利用单调性的定义判断和利用函数的导数判断.

③ 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数.若 $\forall x \in D$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

注 1:若按奇偶性划分函数类型,应该分为三类函数:奇函数、偶函数以及非奇非偶函数.

注 2:两个奇函数的和或差仍是奇函数;两个奇函数的积或商(除数不为 0)为偶函数;一个奇函数与一个偶函数的积或商(除数不为 0)为奇函数;两个偶函数的和、差、积、商(除数不为 0)仍为偶函数.

④ 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在数 $l > 0$,对 $\forall x \in D$,恒有 $x \pm l \in D$,且 $f(x+l) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期.若在 $f(x)$ 所有周期中,存在最小正数 T,则称 T 为 $f(x)$ 的最小正周期.通常我们说周期函数的周期即指最小正周期.

注:虽然周期函数的周期是指其最小正周期,但周期函数不一定存在最小正周期,如常数函数 $f(x) = C$,狄利克雷函数 $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q}, \\ 0, x \in \mathbf{Q}^C \end{cases}$ 均为周期函数,但无最小正周期.

(3) 初等函数

① 幂函数

函数 $y = x^\mu$(μ 是常数)叫做幂函数.

幂函数的定义域要看 μ 是什么数而定.例如,当 $\mu = 3$ 时,$y = x^3$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$;当 $\mu = \dfrac{1}{2}$ 时,$y = x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$;当 $\mu = -\dfrac{1}{2}$ 时,$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 的定义域是 $(0, +\infty)$.但不论 μ 取什么值,幂函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义.

② 指数函数

函数 $y = a^x$(a 是常数且 $a > 0, a \neq 1$)叫做指数函数,它的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

因为对于任何实数值 x,总有 $a^x > 0$,又 $a^0 = 1$,所以指数函数的图形,总在 x 轴的上方,且通过点 $(0,1)$.

若 $a > 1$,指数函数 a^x 是单调增加的.若 $0 < a < 1$,指数函数 a^x 是单调减少的.

由于 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}=a^{-x}$，所以 $y=a^x$ 的图形与 $y=a^{-x}$ 的图形是关于 y 轴对称的.

③ 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数，记作 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0, a\neq 1$），叫做对数函数. 它的定义域是 $(0,+\infty)$. 对数函数 $y=\log_a x$ 的图形与指数函数 $y=a^x$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴右侧，且通过点 $(1,0)$.

若 $a>1$，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的，在开区间 $(0,1)$ 内函数值为负，而在区间 $(1,+\infty)$ 内函数值为正. 若 $0<a<1$，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的，在开区间 $(0,1)$ 内函数值为正，而在区间 $(1,+\infty)$ 内函数值为负.

④ 三角函数

正弦函数和余弦函数都是以 2π 为周期的周期函数，它们的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，值域都是闭区间 $[-1,1]$. 正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数. 正切函数和余切函数都是以 π 为周期的周期函数，它们都是奇函数.

⑤ 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数，其图形都可由相应的三角函数的图形按反函数作图法的一般规则作出. 分别与正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数对应的反三角函数是多值函数，我们可以选取这些函数的单值分支，如反正弦函数的主值，取值限制在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，记作 $y=\arcsin x$. 这样，函数 $y=\arcsin x$ 就是定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的单值函数，且有 $-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin x\leqslant \frac{\pi}{2}$.

2. 基本问题

(1) 考查函数的图像、定义域、值域.

(2) 函数运算，如四则运算、求反函数、函数的复合、复合函数分解为基本初等函数的复合，特别地，求分段定义函数的复合函数.

(3) 对实际应用问题，会建立相应的函数关系，包括确定其定义域.

(4) 研究函数的有界性、单调性、周期性、奇偶性.

(三)「本节考研要求」

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立函数关系式.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解并掌握复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

二 习题全解

习题 1－1（上册 P21 ～ P23）

1. 设 $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$，$B=[-10,3)$，写出 $A\cup B$，$A\cap B$，$A\backslash B$ 及 $A\backslash(A\backslash B)$ 的表达式. ★

解：$A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$，　$A\cap B=[-10,-5)$，

$A \backslash B = (-\infty, -10) \cup (5, +\infty)$， $A \backslash (A \backslash B) = [-10, -5]$.

2. 设 A、B 是任意两个集合，证明对偶律：$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$. ★

证明：设 $x \in (A \cap B)^C$，则 $x \overline{\in} A \cap B$，于是 $x \overline{\in} A$ 或 $x \overline{\in} B$. 所以 $x \in A^C \cup B^C$. 即 $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$.

又，若 $x \in A^C \cup B^C$，则 $x \in A^C$，或 $x \in B^C$，即 $x \overline{\in} A$，或 $x \overline{\in} B$，所以 $x \overline{\in} A \cap B$，即 $x \in (A \cap B)^C$，即 $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$.

综上，$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

3. 设映射 $f: X \to Y$，$A \subset X$，$B \subset X$，证明：★

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$；

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证明：(1) 设 $y \in f(A \cup B)$，存在 $x \in A$ 或 B，使得 $y = f(x)$，于是有 $y \in f(A)$ 或 $y \in f(B)$. 即 $y \in f(A) \cup f(B)$，所以

$$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

再设 $y \in f(A) \cup f(B)$，则 $y \in f(A)$ 或 $f(B)$. 于是存在 $x \in A$ 或 B，使得 $y = f(x)$，即 $y \in f(A \cup B)$，所以

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

综上 $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(2) 设 $y \in f(A \cap B)$，存在 $x \in A \cap B$，使得 $y = f(x)$，有 $y \in f(A)$，且 $y \in f(B)$，即 $y \in f(A) \cap f(B)$，所以

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

4. 求下列函数的自然定义域：★

(1) $y = \sqrt{3x+2}$； (2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$； (3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$；

(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$； (5) $y = \sin\sqrt{x}$； (6) $y = \tan(x+1)$；

(7) $y = \arcsin(x-3)$； (8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$；

(9) $y = \ln(x+1)$； (10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

解：(1) $3x + 2 \geqslant 0$，即 $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$，定义域 $D = [-\dfrac{3}{2}, +\infty)$.

(2) $1 - x^2 \neq 0$，即 $x \neq \pm 1$，定义域 $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -1 \leqslant x < 0, \\ 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ 定义域 $D = [-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $4 - x^2 > 0$，定义域 $D = (-2, 2)$.

(5) $x \geqslant 0$，定义域 $D = [0, +\infty)$.

(6) $x + 1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ (k 为整数)，定义域 $D = \left\{ x \,\middle|\, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1 \ (k \text{ 为整数}) \right\}$.

(7) $|x - 3| \leqslant 1$，即 $2 \leqslant x \leqslant 4$，定义域 $D = [2, 4]$.

(8) $\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\leqslant 3,\\ x\neq 0,\end{cases}$ 定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,3]$.

(9) $x+1>0$，即 $x>-1$，定义域 $D=(-1,+\infty)$.

(10) $x\neq 0$，定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?★

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$;

(4) $f(x)=1, g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解:(1) 不同. 两者定义域不同.

(2) 不同. 两者对应法则不同. $x<0$ 时，$f(x)=x, g(x)=-x$.

(3) 相同. 两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. $g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x=\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}$ 分母不能为 0，要求 $x\neq k\pi+\dfrac{1}{2}\pi$ (k 为整数)，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 定义域不同.

6. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$，并作函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.★

解:因为 $|x|=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$.

同理 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \varphi(-2)=0$.

综上，$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{3},\\ -\sin x, & -\dfrac{\pi}{3}<x<0,\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$

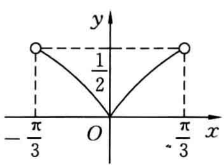


图 1－1

$y=\varphi(x)$ 的图形如图 1－1 所示.

7. 试证明下列函数在指定区间内的单调性:★

(1) $y=\dfrac{x}{1-x},(-\infty,1)$;　　(2) $y=x+\ln x,(0,+\infty)$.

证明:(1) 设 $x_1<x_2$，且 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以函数 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增.

(2) 设 $x_1<x_2$ 且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)$,
由于 $y=\ln x$ 为单调递增函数,所以$(\ln x_1-\ln x_2)<0$.
又 $x_1-x_2<0$,所以$(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$.
故 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.
故函数 $y=x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增.

8. 设 $f(x)$ 为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若 $f(x)$ 在$(0,l)$内单调增加,证明 $f(x)$ 在$(-l,0)$内也单调增加.★

证明:设 $x_1,x_2\in(-l,0)$,且 $x_1<x_2$,则有 $-x_1,-x_2\in(0,l)$,且 $-x_2<-x_1$,由 $f(x)$ 在$(0,l)$上单调递增可得 $f(-x_2)<f(-x_1)$.

因为 $f(x)$ 在$(-l,l)$内是奇函数,所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$,$f(-x_1)=-f(x_1)$,所以 $-f(x_2)<-f(x_1)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$.
所以对$(-l,0)$内任意 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$.
因此 $f(x)$ 在$(-l,0)$内也单调增加.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的,证明:★

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明:设 $f_1(x),g_1(x)$ 为奇函数,$f_2(x),g_2(x)$ 为偶函数,

(1) $f_2(-x)+g_2(-x)=f_2(x)+g_2(x)$,即两个偶函数的和仍为偶函数.

$f_1(-x)+g_1(-x)=-[f_1(x)+g_1(x)]$,即两个奇函数的仍为奇函数.

(2) $f_2(-x)g_2(-x)=f_2(x)g_2(x)$,即两个偶函数的积仍为偶函数.

$f_1(-x)g_1(-x)=f_1(x)g_1(x)$,即两个奇函数的乘积是偶函数,并且

$f_2(-x)f_1(-x)=f_2(x)[-f_1(x)]=-f_2(x)f_1(x)$,

即偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

10. 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非偶函数又非奇函数?★

(1)$y=x^2(1-x^2)$;　(2)$y=3x^2-x^3$;　(3)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

(4)$y=x(x-1)(x+1)$;　(5)$y=\sin x-\cos x+1$;　(6)$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

解:(1) $f(-x)=(-x)^2[1-(-x)^2]=x^2(1-x^2)=f(x)$,$f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,$f(x)$ 既非偶函数也非奇函数.

(3) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$,$f(x)$ 为偶函数.

(4) $f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$,$f(x)$ 为奇函数.

(5) $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,$f(x)$ 既非偶函数也非奇函数.

(6) $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$,$f(x)$ 为偶函数.

11. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出其周期:★

(1) $y = \cos(x-2)$; (2) $y = \cos 4x$; (3) $y = 1 + \sin \pi x$;

(4) $y = x\cos x$; (5) $y = \sin^2 x$.

解:(1) $y = \cos(x-2)$ 是周期函数,周期为 2π

(2) $y = \cos 4x$ 是周期函数,周期为 $\frac{\pi}{2}$.

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数,周期为 2.

(4) $y = x\cos x$ 不是周期函数.

(5) $y = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数,周期为 π.

12. 求下列函数的反函数:★

(1) $y = \sqrt[3]{x+1}$; (2) $y = \frac{1-x}{1+x}$; (3) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $(ad - bc \neq 0)$;

(4) $y = 2\sin 3x$ $\left(-\frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y = 1 + \ln(x+2)$; (6) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$.

解:(1) 将 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 改写为 $x = \sqrt[3]{y+1}$,得 $y = x^3 - 1$ $(x \in \mathbf{R})$.

(2) 将 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 改写为 $x = \frac{1-y}{1+y}$,得 $y = \frac{1-x}{1+x}$ $(x \neq -1)$.

(3) 将 $y = \frac{ax+b}{cx+\mathrm{d}}$ 改写为 $x = \frac{ay+b}{cy+\mathrm{d}}$,得 $y = \frac{-\mathrm{d}x+b}{cx-a}$ $\left(x \neq \frac{a}{c}\right)$.

(4) 将 $y = 2\sin 3x$ 改写为 $x = 2\sin 3y$,得 $y = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$.

(5) 将 $y = 1 + \ln(x+2)$ 改写为 $x = 1 + \ln(y+2)$,得 $y = \mathrm{e}^{x-1} - 2$ $(x \in \mathbf{R})$.

(6) 将 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 改写为 $x = \frac{2^y}{2^y+1}$,得 $y = \log_2\frac{x}{1-x}$ $(0 < x < 1)$.

13. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.★

证明:(1) 必要性:设 $f(x)$ 在 X 上有界,即存在数 $M > 0$,
使得 $|f(x)| \leqslant M, x \in X$. 因而 $-M \leqslant f(x) \leqslant M, x \in X$.
即 $f(x)$ 在 X 上既有上界 M,又有下界 $-M$.

(2) 充分性:设 $f(x)$ 在 X 上有下界 M_1,上界 M_2,
即 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2, x \in X$.

令 $M = \max(|M_1|, |M_2|)$,则 $-M \leqslant M_1, M_2 \leqslant M$,
因而 $-M \leqslant f(x) \leqslant M, x \in X$. 即 $|f(x)| \leqslant M, x \in X$.
所以 $f(x)$ 在 X 上有界.

14. 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:★

(1) $y = u^2, u = \sin x, x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{\pi}{3}$;