朱文莉 ● 主编

经济类院校基础课程本科系列教材

实变函数论

SHIBIAN HANSHULUN

西南财经大学出版社

朱文莉 ● 主编

经济类院校基础课程本科系列教材

实变函数论

SHIBIAN
HANSHULUN

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

实变函数论/朱文莉主编．—成都:西南财经大学出版社,2012.4
ISBN 978-7-5504-0607-0

Ⅰ.①实…　Ⅱ.①朱…　Ⅲ.实变函数论　Ⅳ.①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 067108 号

实变函数论

主编:朱文莉

责任编辑:李玉斗
助理编辑:王林一
封面设计:大　涛
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	13.5
字　　数	225 千字
版　　次	2012 年 4 月第 1 版
印　　次	2012 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	1—2000 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-0607-0
定　　价	28.00 元

内容简介

本书是作者根据自己多年对实变函数论课程的学习与教学的基础上编写的一部实变函数论教材。实变函数论是数学专业的一门重要的基础课程，通过学习使学生掌握近代抽象分析的基本思想，加深对数学分析知识的理解，深化对中学数学有关内容的认识，同时为今后学习泛函分析、函数论、概率论、微分方程、拓扑学等课程提供必要的测度论和积分论的基础，并为进一步学习现代数学打下必要的基础。

本书主要包括六部分，分别是集合及其基数、n 维空间中的点集、测度理论、可测函数、积分理论和函数空间 L^p。每章各节后均附习题，以便于读者学习和掌握实变函数论的基础知识。

本书适用于高等院校数学系本科生、研究生学习，也可供其他有关学科学生、教师和科研工作人员参考和学习。

序言

以实数作为自变量的函数叫做实变函数，以实变函数作为研究对象的数学分支就叫做实变函数论，集合论方法与极限方法是其主要的研究方法，因而该课程又称“实分析”。

中学学的函数都是以实数为变量的函数，大学中的数学分析、常微分方程也是研究以实数为变量的函数。而实变函数仍然以实数作为自变量，那么实变函数还有哪些可学的呢？简单地说：实变函数论只做一件事，那就是恰当的改造《数学分析》中 Riemann 积分的定义，使得更多的函数可积。

由 Newton、Leibniz 等人开创，后经 Cauchy、Riemann 等人改进的经典微积分，在 19 世纪后期已经成熟，并成为普遍应用的数学工具。那么何以说明现有《数学分析》中 Riemann 积分范围小了呢？这是因为在 Riemann 积分中形如 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

这样形式极为简单的函数都不可积，所以我们认为积分范围狭窄。那么如何改造积分定义来达到拓广积分范围的目的呢？

让我们先剖析一下造成这一缺陷的根本原因在何处。只有先找准病根，然后才能对症下药。由数学分析知：对任意分划

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

由于函数 $D(x)$ 在任意一个正长度区间内既有有理数又有无理数，所以恒有

$$S(\Delta,D) - s(\Delta,D) \equiv 1 - 0 = 1$$

如果分划不是这样呆板，这样苛刻地要求一定要分成区间的话，还是有可能满足大小和之差任意小的。比如，只要允许将有理数分在一起，将无理数分在一起，那么大小和之差就等于零了。

这就是问题的着眼点：首先让分划概念更加广泛，更加灵活，从而可将函数值接近的分在一起，以保证大小和之差任意小。即

$$\Delta: E = \bigcup_{i=1}^{n} E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$$

序 言

其中 $m \leqslant f < M, m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$。

此时，要使 $S(\Delta, D) - s(\Delta, D) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1}) \cdot mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - y_{i-1}) \cdot mE < \varepsilon$$

只需 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i - y_{i-1}) < \dfrac{\varepsilon}{mE}$。上式中的 $mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 相当于集合 $E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 的长度。Lebesgue 正是基于这个思路创立了 Lebesgue 积分理论。

上述思路非常简单，但实现起来并非易事。这是因为 $E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 可能很不规则，如何求 $mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$ 呢？这就是第三章要学习的一般集合的测度问题，而测度理论所度量的对象是集合，尤其是多元函数定义域所在空间 R^n 的子集。因此，我们必须先在第一章、第二章分别介绍集合与点集知识。测度理论本来是为了推广长度、面积、体积概念到一般的集合，然而在实施过程中却使我们非常遗憾，我们无法对直线上所有集合规定恰当测度，使其满足以下两点最基本要求：

一、落实到具体区间的测度就是长度（即测度的确为长度概念的推广）；

二、总体测度等于部分测度之和（即可列可加性成立）。

实际上，我们只能对部分集合规定“满足这两点基本要求”的测度，这一部分集合便是第三章要学习的可测集合。那么哪些函数才能保证形如

$$E[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$$

的集合可测呢？这就是第四章要学习的可测函数理论问题。由于

$$E[y_{i-1} \leqslant f < y_i] = E[f \geqslant y_{i-1}] - E[f \geqslant y_i]$$

所以我们采用“对任意的实数 a，有 $E[f \geqslant a]$ 可测”作为函数可测的定义。

有了上述准备之后，才根据前述思路对“可测集上所定义的可测函数”先定义大（小）和，即

$$S(\Delta, f) = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$$

和

$$s(\Delta,D) = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \cdot mE[y_{i-1} \leqslant f < y_i]$$

当$\sup\limits_{\Delta} S(\Delta,f) = \inf\limits_{\Delta} s(\Delta,f)$时，我们称此值为积分值，定义并讨论新积分的性质（即第五章内容）。

以上所述，既是Lebesgue创立新积分的原始思路，也是传统实变函数论教材介绍Lebesgue积分定义的普遍方法。

人们在研究可测函数时发现：可测函数的本质特征是正、负部函数的下方图形均为可测集。那么结合Riemann积分的几何意义，我们自然想到：与其说测度推广了定义域的长度（面积、体积）概念后使得我们作大、小和更加灵活多样，以达到推广积分的目的，不如说由于定义域与值域的乘积空间的面积（体积）概念的推广，使得大量的象Dinichni函数那样图形极其不规则的下方图形都可以求面积（体积）了，从而拓宽了可积范围。因而我们在本书中采取直接规定其测度之差为积分值（如果存在的话）的办法，简单、明了、直观。

L^p空间在积分方程与微分方程中都有着十分重要的应用；L^p空间与R^n空间都是线性赋范空间，而L^p空间是完备的，所以L^p空间是Banach空间，这些空间都是泛函分析中研究的重要对象，故本书最后在第六章简单介绍L^p空间及其性质。

今天，实变函数论已成为现代分析不可缺少的理论基础。泛函分析的诞生，在一定程度上正是受到实变函数论的推动。实变函数论的概念、结论与方法，已广泛应用于微分方程与积分方程论、Fourier分析、逼近论等学科。现代概率论已经完全建立在测度论与Lebesgue积分论的基础上，在这个意义上甚至可以说，概率论是“概率测度空间中的实函数论”。实变函数论对于现代数学的重要性，由此可见一斑，所有数学类专业及某些理工科、财经类专业将“实变函数”作为一门重要基础课，是理所当然的。

然而不少学过实变函数的学生除了留下“抽象、晦涩”的印象之外，收获不多。象这种为分析数学带来如此巨大简化的理论，竟被当作一种复杂得令人难以接受的东西！这是特别值得数学学者们深思的一个问题。应当承认，实变函数论的许多概念有一定的抽象性，许多重要结论异常深刻，而为达到这些结论所

序言

需的理论推演亦不简单。

下面举两例来说明实变函数论的抽象性。

例1 将若干个红球与白球排成一排，且红白球交叉排列，任意两个红球之间有白球，任意两个白球之间有红球，在其中任意截取一断，红白球的个数有三种可能：或红白球一样多或红球多一个或白球多一个，即在任意截取的一断中红白球个数至多相差一个。

直线上的有理数、无理数表面看来很类似，任意两个有理数中间有无理数，任意两个无理数中间有有理数，在其中任取一节线段，无理数、有理数的个数似乎也有三种可能：或有理数、无理数一样多或有理数多一个或无理数多一个，即在任一片段中有理数、无理数个数至多相差一个。但通过第一章严密的逻辑推理告诉我们：这样“似是而非”的说法是错误的。

事实上，有理数比无理数少得多。少到什么程度？有理数相对于无理数而言是那样的微不足道，正是“有它不多，无它不少”。

例2 有理数在直线上密密麻麻，而自然数在直线上稀稀拉拉；无理数仅是实数的真子集；我们既无法承认自然数与有理数的个数一样多，也无法相信无理数居然与实数一样多。这样“似非而是”的结论通过实变函数论第一章的严密论证得到了肯定。

而理论性强则是由实变函数论的内容结构所确定的，因为它只做一件事，就是恰当的改造积分定义，扩大积分范围。这就使得实变函数论的绝大部分篇幅都在作理论上的准备，应用和例题都极少的原因。

鉴于实变函数论的高度抽象性，理论性强，本书尽了最大努力来突出那些体现实变函数论基本特征的思想，简化或回避一些复杂的构造，尽可能降低难度，提高可读性；在撰写过程中注重强调培养读者的逻辑思维、抽象思维、对错观和分析问题、论证问题的能力。因而，凡是问题的引入我们都力争说清问题的历史背景和来龙去脉，凡是主要概念我们都反复说明它的意义和作用，凡是重要的论证我们都全力阐述它的价值，尽可能详细地给出必要的推导；本书在每一节都准备了较多难度不大的习题，其中填空、选择、判断、计算、构造、证明题

都是一些基本的题目,希望读者结合本书后面的提示,完成这些题目,有助于较好的理解本书的核心内容。

针对实变函数论的特点,读者学习的时候应该注意:对于每一个尚未证明的结论都应持谨慎态度,不能简单类比后就盲目承认和否定,必须进行严格论证或举出反例,否则就可能出现例1、例2类似的错误;而对于每一个已经证明了的结论不仅仅要记住,更重要的是理解其证明,想象其合理的直观意义。只有理解了其证明,才能借鉴其方法;只有想象其合理的直观意义,才能有开阔的思路;即严密与直观二者不可偏废。

本书主要内容包括六部分,分别是集合及其基数、n 维空间中的点集、测度理论、可测函数、积分理论和函数空间 L^p。

本书先介绍近代数学的基础——集与映射等有关概念,同时介绍实直线上的点集的性质;接着讲 L - 测度以及 L - 可测集的概念与性质;再介绍可测函数的概念与性质;然后介绍 L - 积分的概念与性质,还有积分的极限定理,R - 积分与 L - 积分的比较,Fubini 定理,有界变差函数,绝对连续函数及其 $N-L$ 公式;最后简单介绍 L^p 空间及其性质。

本书适用于高等院校数学系本科生、研究生学习,也可供其他相关学科学生、教师和科研工作人员参考和学习。

借本书出版之机,向关心、支持、参与本书编写工作的张紫莎、涂晓青、崔红卫、白淑敏、秦冶、赵建勇、李平芝、苗壮表示衷心的感谢,他们对我的工作给予了热情鼓励和帮助。电子科技大学应用数学学院钟守铭教授仔细地审阅了全稿,提出了不少中肯的意见,使本书增色不少,在此向他表示万分的谢意!

由于作者水平有限,经验不足,加上编著时间仓促,书中不当之处在所难免,敬请读者批评指正,并提出建设性的建议,将在再版时予以更正。E - mail: zhuwl@swufe.edu.cn

朱文莉于2011年6月7日

目 录

目 录

第3章　测度论 ………………………………… (57)

目 录

目录

第 1 章　集合及其基数

研究集合的一般性质的数学分支称之为集合论。

集合论是 19 世纪末 20 世纪初才开始蓬勃发展起来的，德国数学家 G. Cantor 是这个理论的奠基人。

Cantor 关于集合论的概念研究产生于三角级数的收敛性问题。

实变函数论是在集合论的观点与方法渗入到数学分析的过程中产生的。

在实变函数论里，我们习惯于把对函数性质的研究转化为对一簇集合关系的讨论。因而我们常常需要从一簇集合出发，按某种要求作分解与组合，产生若干新的集合，这就是集合的运算，是实变函数论中一种基本的论证方法。

集与集的运算是测度与积分理论的基础。本章先介绍集论的一些基本知识，包括集与集的运算、可数集和基数、具有一定运算封闭性的集类如环与 σ - 代数 等，然后介绍 R^n 中的一些常见的点集。

§1.1　集合及其运算

1.1.1　集合的基本概念

集是数学的基本概念之一。它不能用其他更基本的数学概念严格定义之，只能给予一种描述性的说明。

我们称具有某种性质的事物的全体为一个集合，简称集。组成集的事物称为该集的元素。

所谓给出一个集合，就是按某条准则规定了这个集合是由哪些元素组成的。当一个集合给定时，任何对象，或者是这个集合的元素，或者不是这个集合的元素，二者有且仅有一个成立。

一般用大写字母如 A,B,C 等表示集，用小写字母如 a,b,c 等表示集的元素。

若 a 是集 A 的元素，则用记号 $a\in A$ 表示（读作 a 属于 A）。若 a 不是集 A 的元素，则用记号 $a\notin A$ 表示（读作 a 不属于 A）。

不含任何元素的集称为空集，用符号 ϕ 表示。约定分别用 $\mathbb{R}$ 、$\mathbb{Q}$ 、$\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{Z}$ 表示实数集、有理数集、自然数集和整数集。

1. **集的表示方法**

第一种方法:列举法。即列出给定集的全部元素。例如 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$。

第二种方法:描述法。当集 A 是由具有某种性质 P 的元素的全体所构成时,用下面的方式表示集 A:

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}\text{ 或 }A=\{x:x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如:设 f 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的实值函数,则 f 的零点所成的集 A 可表示成:

$$A=\{x\mid f(x)=0,x\in\mathbb{R}\}$$

2. **集的相等与包含**

设 A 和 B 是两个集,如果 A 和 B 具有完全相同的元素,即它们实际是同一个集合,则称 A 与 B **相等**。记为 $A=B$。

如果 A 的元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**。记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B) 或 $B\supset A$(读作 B 包含 A)。

若 $A\subset B$ 并且 $A\neq B$,则称 A 为 B 的**真子集**。

依此定义,空集 ϕ 是任何集的子集,任何集 A 也是 A 自身的子集。

1.1.2 集合的运算

根据子集的定义,不难证明如下两个定理成立。

定理 1 设 A、B 为二集,$A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$。

定理 2 设 A、B、C 为三集,$A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$。

1. **并运算与交运算**

设 A 和 B 是两个集。由 A 和 B 的所有元素构成的集称为 A 与 B 的**并集**,如图 1.1.1。即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或者 }x\in B\}$$

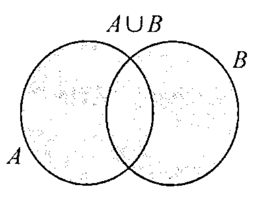

图 1.1.1

由同时属于 A 和 B 的元素构成的集称为 A 与 B 的**交集**,简称为**交**,如图 1.1.2,记为 $A\cap B$。即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 并且 }x\in B\}$$

若 $A\cap B=\phi$,则称 A 与 B **不相交**。