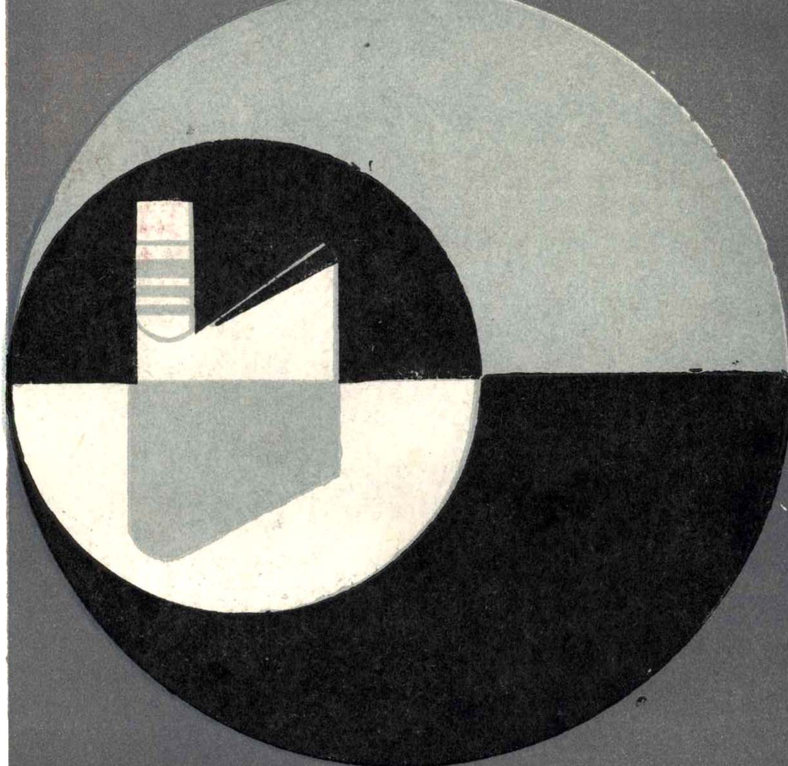
高等师专教材



# 高等代数

主编　魏献祝

华东师范大学出版社

# 高 等 代 数

主　　审：曹锡华
主　　编：魏献祝
编写人员：魏献祝　卢业广
　　　　　孙宗明　叶再盈

华东师范大学出版社

# 高　等　代　数

魏献祝　主编

华东师范大学出版社出版发行
（上海中山北路 3663 号）
新华书店上海发行所经销　　　阜宁印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：10.75　字数：270 千字
1990 年10月第一版　　1990 年10月第一次印刷
印数：001—5,000 本

ISBN7-5617-0575-1/N·038　定价：2.59元

# 序

由于人类生活、生产、技术、科学和数学本身的需要，代数学的发生与发展，经历了悠久的历史，发展成现代科学技术上被广泛应用着的近世代数学（也称为抽象代数学），它与古典的、启蒙的初等代数学在内容和方法上差别甚大，但毕竟抽象代数学是在初等代数学的基础上产生和发展起来的，要学习近世代数就必须首先掌握初等代数，学习了近世代数才能更深入地体会和运用初等代数.

初等代数学是研究实数或复数和以它们为系数的多项式的代数运算的理论和方法，它的中心问题是实或复系数的多项式方程和方程组的解的求法及其分布的研究，因此也可简称为方程论. 抽象代数学是在初等代数学的基础上，通过数系的概念的进一步推广，或者可以实施代数运算的对象的范围的进一步扩大，逐渐发展而形成. 它是从各种代数结构的公理出发研究它们的性质的.

中学里所学习的代数属于初等代数的基础内容，要在这个基础上学习近世代数，还必须有一个过渡的课程，就是现在的“高等代数”的课程. 它一方面加深了中学数学中方程论的那一部分，例如线性方程组及其解的理论、任意数域上一个变量的多项式理论等等；另一方面，从具体到抽象，引入了抽象代数学的一些雏形，例如：线性空间，线性变换，矩阵代数以及最后给出了抽象代数学中最基本的几个代数结构的定义. 当然这些内容不光是为进一步学习近世代数打好基础，这里所涉及的内容（线性空间，线性方程组，矩阵，多项式等等）都是近代科学技术和数学的任何其他分支必不可少的基础知识. 所以这是一门极重要的基础课程.

通过三十多年来各大专院校的教学实践和研究，这门课程的基本内容大致定型．高等师范专科学校的“高等代数”课程的教学大纲也是通过实践并经过反复讨论定下来的．魏献祝先生等四位老师，根据国家教委颁发的“高等师范专科学校高等代数教学大纲”以及他们多年的教学经验，编写了这本高等代数教科书，书中既重视对学生讲授系统的代数基础知识与严格的代数方法，又重视对学生进行逻辑推理、知识运用、抽象思维等能力的培养，全书各章、节均有纲目要领，结构简明，重点突出，论证简捷，表达清晰，便于学生自学．对例题、习题也做到着重于学生能力与素质的培养，习题与内容配合恰当，难易搭配合理、适当．这是一本较好的师专高等代数的教材．

曹锡华

1989年8月

# 前　言

根据国家教委颁发的“高等师范专科学校《高等代数》教学大纲”，我们编写试用教材《高等代数》，并在执行国家教委制订《新教学计划》的某些师专学生中试教，效果良好，本书在试用教材基础上修改要求偏高的内容，使教材更适应教学的需要，它是高等代数专业的入门书．

本书既重视对学生讲授系统代数基础知识与严格代数方法，又重视对学生进行逻辑推理、知识运用、抽象思维等能力的培养全书各章、节均有纲目要领，结构简明，重点突出，论证途径及表达尽量简捷，对例题、习题着重于能力与素质的培养，习题与内容密切配合，难易适当，搭配合理．

针对本课程抽象性较强的特点，我们采用循序渐进的原则，由浅入深，由易到难，由具体到抽象．譬如第二章第三节行列式的性质中，我们把顺序重新调整了一下，把论证难点移后，使读者一步一个阶梯，较好地掌握知识，编写过程中，我们注意了本课程的横向联系，同时也重视与相关学科的相互渗透，譬如线性方程组这一章，我们编入它在解析几何的简单应用的例子．此外，还注意加强与中学数学知识的联系．

全书包括线性代数、多项式理论与群、环、域简介．使用本书教学约需186学时(包括习题课)，教学时可删去打星号的内容．对第一章预备知识，各校可根据具体情况适当取舍．在“映射”这一节，从系统性出发，把它放在第一章，但它放在前面有一定难度，且此概念在第六章线性空间讲授时才用到，因此建议放在第六章中讲授、中学有了行列式与线性方程组的初步知识，考虑到知识的衔接与教学规律，我们把这部分先讲，以利于教学．此外，还

为优秀学生编写选做题，对一般同学不作要求.

本书可作为师专、教育学院、高师函授班或其他成人高校的教材，亦可作为本科师范院校的教材或参考书，以及青年自学用书.

本书由长期在师范院校任教、有丰富教学经验的魏献祝教授及卢业广、孙宗明、叶再盈三位副教授共同编写而成，魏献祝教授又作了最后的统稿.华东师范大学曹锡华教授精心修改了本书，陈昭木教授也曾为本书的编写提供宝贵意见，李辉长、张建成、张荣辉与丁秀丽老师负责了原稿的校阅，在此一道表示谢意.

限于水平，书中难免有不少缺点与错误，敬请读者与同行提出宝贵意见.

编者

1988年11月

# 目　　录

# 第一章　预备知识

本章简单介绍集合、映射、数环、数域与数学归纳法，这些概念是高等院校数学专业学生必备的基础，也是本课程的预备知识.

## §1　集　　合

### 一、集合的基本概念

集合论自从1892年著名的德国数学家康托作奠基性的工作以来，集合论的思想在自然科学中的应用愈来愈广泛，现已渗透到所有的数学学科.

集合是数学中最基本的概念之一，所谓集合，就是指表示一定事物的集体. 例如一个班的全体同学就组成一个集合；一个教室里的全部课桌也组成一个集合；某些自然数(如$\{1, 2, 3\}$)也组成一个集合；某一线段上所有点也组成一个集合.

组成集合的每一个事物称为这个集合的元素，我们常用大写拉丁字母$A$，$B$，$C$，…表示集合；用小写拉丁字母$a$，$b$，$c$，…表示元素.

一个含有有限个元素的集合称为有限集. 由无限个元素组成的集合称为无限集. 例如所有小于3的自然数是有限集合而全体自然数是无限集.

具有某些性质的元素全体所组成的集合$M$可写成

$$M=\{a|a \text{ 具有的性质}\}.$$

例如$M=\{(x, y)|y=2x+1\}$表示直线$y=2x+1$上点的全体.

几个常用数集用特定记号表示：

$N$——自然数集，$Z$——整数集，$Q$——有理数集，$R$——实数集，$C$——复数集.

为了叙述方便，我们还引用一些符号. 用"$\exists$"表示存在；用"$\forall$"表示任意的意思. 若条件 $M$ 成立，可推出结论 $K$ 成立，用"$M \Longrightarrow K$"表示；若命题 $M$ 成立，当且仅当命题 $K$ 成立，用"$M \Longleftrightarrow K$"表示.

**二、集合的包含与相等**

如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说"$a$ 属于 $A$"或"$A$ 包含 $a$"，记作 $a \in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说"$a$ 不属于 $A$"或"$A$ 不包含 $a$"，记作 $a \overline{\in} A$.

集合 $A$ 的每一个元素都是集合 $B$ 的元素，则称 $A$ 是 $B$ 的子集或 $B$ 包含 $A$，记为 $A \subseteq B$. 即

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow \forall x \in A \Longrightarrow x \in B.$$

显然，集合的包含关系满足：

(1) $A \subseteq A$；

(2) $A \subseteq B$，$B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

若集合 $A$ 是集合 $B$ 的子集，且 $\exists y \in B$ 与 $y \overline{\in} A$，则称 $A$ 是 $B$ 的真子集或 $B$ 是 $A$ 的真扩集，记作 $A \subset B$，例如：$\exists i \in C$，但 $i \overline{\in} R$，所以 $R \subset C$.

常用数集有如下关系：

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

不包含任何元素的集合称为空集，用"$\phi$"表示，例如 $x^2+1=0$的实根集合是空集. 我们规定，空集 $\phi$ 是任何集合的子集.

若集合 $A$ 与 $B$ 有完全相同的元素，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$.

我们有

$$A=B \Longleftrightarrow A \subseteq B, \ B \subseteq A.$$

譬如：$A=\{1,2\}$，$B=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$，容易证明 $A=B$.

**三、集合的交与并**

既属于集合$A$又属于集合$B$的元素的全体称为$A$与$B$的交，记为$A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x|x\in A且x\in B\}.$$

属于集合$A$或属于集合$B$的元素的全体称为$A$与$B$的并，记为$A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x|x\in A或x\in B\}.$$

例如$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{2, 3, 4, 5\}$，则

$$A\cap B=\{2, 3\},\ A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

集合的交与并满足下列算律：

（1） $A\cap(A\cup B)=A$；

（2） $A\cup(A\cap B)=A$；

（3） $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（4） $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

这些算律的证明方法类似，我们仅证明（4）.

证明：要证明两个集合相等，一般是证明它们互相包含.

设$x\in A\cup(B\cap C)$，则$x\in A$或$x\in B\cap C$，若$x\in A$，有$x\in A\cup B$与$x\in A\cup C$；若$x\in B\cap C$，有$x\in B$且$x\in C$，同样可得：$x\in A\cup B$与$x\in A\cup C$，不论哪种情况，都有$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，于是

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

反之，$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，有$x\in A\cup B$且$x\in A\cup C$，若$x\in A$，则$x\in A\cup(B\cap C)$；若$x\bar{\in} A$，则$x\in B$与$x\in C$即$x\in B\cap C$，同样有$x\in A\cup(B\cap C)$，因此

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C),$$

从而有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

两个集合的交与并的概念可以推广到任意个集合. 设$A_1$，$A_2$，…，$A_n$是给定的集合，由$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的一切公共元素所组成的集合称为$A_1$，$A_2$，…，$A_n$的交，记作$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$. 即

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1, \ x \in A_2, \ \cdots, \ x \in A_n\}.$$

由集合 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$ 的所有元素作成的集合称为 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$ 的并，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. 即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in \text{某一个 } A_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n)\}.$$

**四、集合的差与补**

对于两个集合 $A$ 与 $B$，一切属于 $A$ 但不属于 $B$ 的元素组成的集合称为 $A$ 与 $B$ 的差，记为 $A-B$. 即

$$A-B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}.$$

例如 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{2, 3, 4\}$, $C=\{5, 6\}$, 则

$$A-B=\{1\}, \quad A-C=\{1, 2, 3\}.$$

当 $B \subseteq A$ 时，称 $A-B$ 为 $B$ 关于 $A$ 的补集.

例如 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3\}$, $C=\{2, 4\}$, 因 $B \subseteq A$, 则 $C=A-B$ 为 $B$ 关于 $A$ 的补集. 同样地，$B=A-C$ 也是 $C$ 关于 $A$ 的补集，因而 $B$ 与 $C$ 关于 $A$ 互为补集.

**五、集合的笛卡儿积**

设 $A$ 与 $B$ 是两个集合，称

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, \ b \in B\}$$

为 $A$ 与 $B$ 的笛卡儿积，简称为 $A$ 与 $B$ 的积. 换句话说，$A \times B$ 表示一切有序对 $(a, b)$ 的集合，其中 $a \in A$, $b \in B$.

例如：$A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则

$$A \times B = \{(1,2), \ (1,3), \ (1,4), \ (2,2), \ (2,3), \ (2,4)\};$$

$$B \times A = \{(2,1), \ (2,2), \ (3,1), \ (3,2), \ (4,1), \ (4,2)\},$$

可见 $A \times B$ 与 $B \times A$ 一般是不同的.

在解析几何中，当平面上取定坐标系 $\{xOy\}$ 后，点的坐标是有序数对 $(x, y)$，这样，此平面可用笛卡儿积

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x, \ y \in \mathbf{R}\}$$

来表示.

两个集合的积可以推广到多个集合的积. 集合 $A_1$, $A_2$, $\cdots$, $A_n$ 的积为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)\,|\,a_1\in A_1,\\ a_2\in A_2,\ \cdots,\ a_n\in A_n\}.$$

$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$与$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$相等，指的是$a_i=b_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

### 习 题 1.1

1．写出$\{1,\ 2,\ 3\}$的一切子集，其中哪些是真子集？

2．判断对或错，错者改正，并给予证明：

(1) $x\in A\cup B$且$x\notin A\Longrightarrow x\in B$;

(2) $x\in A-B\Longrightarrow x\notin A\cap B$;

(3) $x\notin A\cap B\Longrightarrow x\notin A,\ x\notin B$;

(4) $x\notin A\cup B\Longrightarrow$、$x\notin A, x\notin B$.

3．证明：

(1) $A\cap(A\cup B)=A$;

(2) $A\cup(A\cap B)=A$.

4．设$A$、$B$都是有限集，试问在什么条件下，$A\cup B$的元素个数等于$A$的元素个数与$B$的元素个数之和？

5．证明：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

6．设 $A=\{a|a\in\mathbf{R},\ 0\leqslant a\leqslant 1\}$,

$B=\{b|b\in\mathbf{R},\ 0\leqslant b\leqslant 1\}$,

$C=\{c|c\in\mathbf{R},\ 0\leqslant c\leqslant 1\}$.

指出$A\times B\times C$在普通的三维空间内是什么图形？

7．设$A$是$n$个元素的集合，求$A$中含有$k(k\leqslant n)$个元素的子集个数及$A$的所有子集的总共个数.

### 选 做 题

1．证明：

$$(A\cap B)\cup C=A\cap(B\cup C)\Longleftrightarrow C\subseteq A.$$

## §2 数环与数域

研究数学问题常常需要明确规定所考虑数的范围、譬如讨论

方程 $x^2+3=0$ 是否有解的问题，就与未知量所允许的取值范围有关，在实数范围内无解，但在复数范围内就有解．又如任意两个整数的商不一定是整数，这就是说限制在整数的范围内，一般不能施行除法运算，但在有理数的范围内，只要除数不为 0，除法总是可以施行的，所以许多数学问题不仅与涉及的数的范围有关，也与所允许使用的运算有关．

## 一、数环

**定义 1** 若复数集的子集 $S$（不是空集）中任意两个数的和、差与积仍然属于 $S$（即说 $S$ 对于加法、减法与乘法是封闭的），就称 $S$ 是一个数环．

根据定义，整数全体 $\boldsymbol{Z}$、有理数全体 $\boldsymbol{Q}$、实数全体 $\boldsymbol{R}$ 与复数全体 $\boldsymbol{C}$ 都是数环．下面再举几个例子．

**例 1** 设 $n$ 是某一整数，则 $n$ 的所有整数倍的集合

$$n\boldsymbol{Z}=\{kn \mid k\in \boldsymbol{Z}\}$$

是一个数环．事实上，设 $k_1,\ k_2\in \boldsymbol{Z}$，那么

$$(k_1n)\pm(k_2n)=(k_1\pm k_2)n\ \in n\boldsymbol{Z},$$

$$(k_1n)(k_2n)=(k_1k_2)n\ \in n\boldsymbol{Z}.$$

特别当 $n=2$ 时，称 $2\boldsymbol{Z}$ 为偶数环．

**例 2** $S=\{a+b\sqrt{3} \mid a,\ b\in \boldsymbol{Z}\}$ 是一个数环．

证明　取 $a=1$，$b=0$，知 $1\in S$，从而 $S\neq\phi$，又

$$(a+b\sqrt{3})\pm(c+d\sqrt{3})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\in S,$$

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(ad+bc)\sqrt{3}\in S,$$

所以 $S$ 是一个数环．

**例 3** $S=\{0\}$ 是一个数环．容易验证，$S$ 对于加法、减法与乘法是封闭的，因而 $S$ 是一个数环．由本节习题得知，只有这个数环含有限个元素，而含有非零元素的数环必然是无限集环．

设 $S$ 为任一数环，$\forall a\in S$ 有 $a-a=0\in S$，于是任何数环都包含有 0．

## 二、数域

**定义 2** 设$P$是含有非零元素的数环，且

$$\forall a,\ b\in P,\ b\neq 0,\ \Longrightarrow \frac{a}{b}\in P$$

（即说 $P$ 对于加法、减法、乘法与除法是封闭的），则称 $P$ 是一个数域.

根据定义 2，整数集 $Z$ 对除法不封闭，因而它不是一个数域. 上面例中$\{nZ\}$与$\{0\}$也不是数域，再看例 2，由1，$1+\sqrt{3}\in S$ 有

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\notin S,$$

即 $S$ 对除法不封闭，于是 $S$ 不是数域.

容易验证，有理数集$Q$、实数集$R$ 与复数集$C$ 都是数域. 再看一个例子.

**例 4** $F=\{a+b\sqrt{3}\,|a,\ b\in Q\}$是一个数域.

证明　用与例 2 同样的方法可证明$F$ 是数环，且 $F$ 含有非零元素，譬如 $1=1+0\sqrt{3}\in F$, 下面证 $F$ 对于除法封闭.

当 $c+d\sqrt{3}\neq 0$ 时，由 $c$ 与 $d$ 不同时为 0，可知$c-d\sqrt{3}\neq 0$，于是

$$\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}=\frac{(a+b\sqrt{3})}{(c+d\sqrt{3})}\cdot\frac{(c-d\sqrt{3})}{(c-d\sqrt{3})}$$

$$=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3}$$

又

$$\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}\in Q,\quad \frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\in Q,\quad 则\ \frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}\in F,$$

因此 $F$ 是数域.

设 $P$ 是任意一个数域，则 $\exists a\in P$ 且 $a\neq 0$，根据数域的定义，有 $a-a=0\in P$ 与$\frac{a}{a}=1\in P$，于是任何一个数域都包含有 1 与 0.