# 计算方法

东北师范大学

# 计 算 方 法

数学系计算方法教研室编

东 北 师 范 大 学

1 9 8 1 . 1 1 .

# 序　言

计算方法是当今数学中一个很重要的分支，它与生产和科学技术的联系极为密切，已成为人们探求自然规律，处理各学科的计算问题不可缺少的有力工具。作为计算方法它本身已形成一个完整的体系，是与现代数字电子计算机紧密相连的。

本教材是在我系 1959 年以来所使用《计算方法讲义》的基础上，参照高等师范院校《计算方法与算法语言教学大纲（试用）*》修改而成。

考虑到师范院校主要是培养中学教师的，所以在内容选择上注意常用的基础理论和方法，并联系一些中学实际，又由于是数学专业的基础课，为此对现代的一些理论与方法也作了些介绍。

为了使学生掌握和了解所学方法，在每节后面备有一定数量的习题。这些题目有的是巩固已学知识；有的是介绍给学生一种方法；有的是带有启发性的引导学生自己去推导新的计算公式。

为了便于学生自学，力求叙述简明，通俗易懂。某些式子的推导，也适当地多写了一两步。

本教材共分六章，讲授时数，在 85 学时左右，如果讲授时数偏紧，根据实际情况，灵活取舍，浮点数和算法语

---

1980年5月上海教材编审委员会扩大会议上审订的高等师院校《计算方法与算法语言教学大纲》（试用）

言，本教材未涉及，准备单独开课。

由于我们理论水平和实践经验很肤浅，编写时间又紧，讲义中缺点和错误一定不少，我们衷心希望读者提出宝贵意见。

计算方法教研室

1981.11.

# 目　录

计算方法：求一切数学问题的数值解的一门科学.

实际问题——数学模型——数值计算方法

——程序设计——上机计算求结果.

# 第一章 误 差

## §1.1 引 言

在实现社会主义的四化过程中，或日常生活中遇到的数量分为两类，一类是精确地反映实际情况的，称为精确数（或称准确数，真值）；另一类则不是这样，称为近似数（或某准确数的近似值），如测量长度、重量、面积、体积，用 3.14 代替圆周率 $\pi$ 等等，得到的数值，一般都是近似的，是有误差的．误差的大小往往是标志着工作的质量，在工作中对近似数的问题若处理不当，不是浪费时间，就是给工作带来损失．

另外，我们熟知在计算方法里，是求一些数学问题的数值结果，此数值结果一般是近似的，是有误差的，总之近似数是大量存在的，本章里主要讨论一个近似数的误差（或其精确度）；如何表示原始数据的误差对计算结果的影响等等．

## §1.2 误 差 来 源

在生产斗争和科学实验中，总要对客观事物和现象作定量分析．要这样做，就要抓住其中的主要因素，忽略其中的

次要因素，建立起已知量和未知量的数学模型$S=\frac{1}{2}gt^2$、$V=\frac{1}{P}$. 这种数字模型与实际现象，一定有一些差距，这种差距，就称之为**模型误差**.（描述误差）

在数学模型中，往往有若干参数，它们是通过观测得来的，如重力加速度，比重，阻力系数等等. 因此必然有误差，称之为**观测误差**.

当对数学模型，不能简单地求出其精确解时，就要采用某种有效的数值解法，以简单的数学问题代替原数学模型. 这样所产生的误差称为**截断误差**或**方法误差**.

例如，用收敛的无穷级数的前$n$项和，

$$R(x)=e^x-1-x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3-\cdots-\frac{1}{n!}x^n$$

作为该级数和的逼近，其余项就是截断误差.

在实际计算中，不管用何种计算工具，只能对有限位数进行运算，如有的计算机只能对八位数进行运算，超过八位的，它就会把它舍入成八位的数. 这样出现的误差称为**舍入误差**.

舍入的办法有**四舍五入法**，**收尾法**（只入不舍），还有**去尾法**（只舍不入）.

例如对$\pi=3.14159\cdots$截取到四位小数：

用四舍五入法：$\pi\doteq3.1416$;

用 收 尾 法 ：$\pi\doteq3.1416$;

用 去 尾 法 ：$\pi\doteq3.1415$;

最后，对四舍五入还作如下规定：当要舍去的部分的首

位数字刚好是5时，若保留部分的末位是偶数，则将5舍去，奇数时，则舍5进1．

例如，$\pi=3.14159265\cdots$若取到$10^{-3}$位，则有$\pi\doteq3.142$；若取到$10^{-7}$位，则有$\pi\doteq3.1415926$，这样所得的近似数的末位数字为偶数．

实践表明，进行大量运算时，按四舍五入法进行舍入，整个计算过程的误差积累较小．

## §1.3 表示近似数精确度的方法

在不同的场合下，表示近似数的精确度的方法各有不同．在本节我们将介绍几种常用的方法及其间的联系．

### （一）绝对误差

**定义 1** 设$x^*$是某量的精确值，$x$是其近似值．我们称差

$$e_x=x^*-x$$

为$x$对$x^*$的绝对误差，或$x$的绝对误差，或$x$的误差．

由定义1可知，$e_x$可正可负．当$e_x>0$时，称$x$为$x^*$的**不足近似值**；当$e_x<0$时，称$x$为$x^*$的**过剩近似值**．

$|e_x|$的大小，标志着$x$的精确度．一般地，**在同一量的不同近似值中，$|e_x|$越小，x的精确度越高**．

但$e_x$并不是永远能求出来的．

例如，若用以寸为最小刻度的尺去量桌子的长大约为3.45尺．求3.45尺的绝对误差．

此例中桌子长的精确值$x^*$是未知的．因此绝对误差就

不可能知道．在实际中这类问题很多．于是定义1就失去了实际意义．为解决这一问题，我们通常用一个不小于$|e_x|$的、尽可能小的正数$\Delta$表示近似数$x$的绝对误差的上限，称数$\Delta$为近似数$x$的**绝对误差界**，记为$\Delta x$．由$\Delta x$的定义可知

$$|e_x|=|x^*-x|\leqslant\Delta x, \tag{3.1}$$

或

$$x-\Delta x\leqslant x^*\leqslant x+\Delta x. \tag{3.1$'$}$$

有时记$x$与$\Delta x$为　$x(\pm\Delta x)$或$x\pm\Delta x$．

例如，在真空中光速为$c=299796\pm4$公里/秒，即

$$299792\text{ 公里/秒}\leqslant c\leqslant 299800\text{ 公里/秒}.$$

我们还要指出，取$\Delta x$，一般地从$|e_x|$的左侧第一个非0数字起以收尾法取到含1个或2个数字为宜．

有了绝对误差界的概念，上述桌子长度的问题就容易解决了．桌子长的精确值$x^*$，无论怎样，它必定在3.40尺与3.50尺之间．所以$|e_x|$不会超过半寸，即

$$|e_x|=|x^*-3.45|\leqslant0.05\text{（尺）}.$$

所以$\Delta3.45=0.05$．

显然用去尾法或收尾法截取的近似数，其绝对误差界不超过近似数末位的一个单位．例如，对圆周率$\pi$分别用去尾法和收尾法截取三位数，就得3.14和3.15．它们的绝对误差界都是0.01，即$\Delta3.14=\Delta3.15=0.01$．

若用四舍五入法对$\pi$截取五位数字，则得3.1416，其绝对误差界：$\Delta3.1416=0.00005$．从而可知**用四舍五入法截取的近似数x的绝对误差界不超过x的末位的半个单位**．

特别当$x^*=x$时，$e_x=0$，$\Delta x=0$．

但绝对误差，不能用来比较不同条件下的近似数的精确

度．

（二）相对误差

先看一个例子．某人买一吨煤有 10 斤误差，另一人买 100 斤煤也有 10 斤误差．哪一个情况更好些呢？显然是前一情况好一些，而后一种情况是不能允许的．原因是误差太大．为什么太大呢？这是人们在头脑里把10斤的误差和购买量做了比较的结果．可见一个量的近似值的精确度，不但与绝对误差有关，而且还和该量本身的大小有关．为在一般情况下反映这一现象，我们引入表示近似值精确度的另一尺度．

**定义 2** 在定义 1 的假设下，我们称比值

$$\varepsilon_x=\frac{e_x}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*}$$

为 $x$ 对 $x^*$ 的**相对误差**，或近似数 $x$ 的相对误差．

由此定义可知，相对误差表示着在单位量中含有的绝对误差，或者说绝对误差在整个量（精确值）中占有的比重，所以它是不名数．因而有更广泛的适用性，它能更好地反映出误差的特性．

一般地，**在同一量或不同量的几个近似值中，$|\varepsilon_x|$ 小者精确度高．**

但在实际计算中，由于 $x^*$ 未知，所以就取

$$\bar{\varepsilon}_x=\frac{e_x}{x}$$

作为相对误差的另一定义．

这样做的合理性，是因为 $e_x$ 对 $x^*$ 通常是个很小的量，

而差

$$\varepsilon_x-\bar{\varepsilon}_x=e_x\left(\frac{1}{x^*}-\frac{1}{x}\right)=-\frac{e_x^2}{x^*x}$$

是个更小的量．所以可用$\bar{\varepsilon}_x$代替$\varepsilon_x$．以后谈到相对误差时，都是指$\bar{\varepsilon}_x$而言的．

由于$|\bar{\varepsilon}_x|$一般比较小，都是以小数形式出现的，故经常把它表示为百分数的形式．从而有**百分误差**之称．

不过当$x^*$未知时，$e_x$是不能精确地求的，从而$\bar{\varepsilon}_x$也不能精确地算出．所以与处理绝对误差时同样，我们引入近似数$x$的**相对误差界**$\delta x$来表示$\bar{\varepsilon}_x$的变化范围：

$$|\bar{\varepsilon}_x|=\frac{|e_x|}{|x|}\leqslant\delta x,\qquad |x|\neq 0 \tag{3.2}$$

$$-\delta x\leqslant\bar{\varepsilon}_x\leqslant\delta x.\quad（注：\bar{\varepsilon}_x \text{ 均记作 } \varepsilon_x）$$

作为实用公式，我们取

$$\delta x=\frac{\Delta x}{|x|}，\text{即 } \Delta x=|x|\delta x. \tag{3.3}$$

有了这个公式，就可以算出上面量桌子长度的相对误差界为

$$\delta 3.45=\frac{0.05}{3.45}\leqslant 0.015=1.5\%.$$

两个人买煤问题的相对误差界分别为

$$\delta 2000=\frac{10}{2000}=0.005=0.5\%,$$

$$\delta 100=\frac{10}{100}=0.10=10\%.$$

后者的误差是前者的 20 倍．

## （三）有效数字

在实际工作中，人们总是愿意把近似数写成十进制的有限形式．因此就总结出不通过计算绝对误差界或相对误差界，而直接由组成近似数的数字个数来表示近似数精确度的方法．

我们熟知，任何十进制数皆可写为10的幂级数的形式．例如，

$$26701.528=2\cdot10^4+6\cdot10^3+7\cdot10^2+0\cdot10^1+1\cdot10^0+$$
$$+5\cdot10^{-1}+2\cdot10^{-2}+8\cdot10^{-3},$$
$$0.0367\cdots=3\cdot10^{-2}+6\cdot10^{-3}+7\cdot10^{-4}+\cdots,$$

一般地，可将准确数 $x^*$（设$>0$）的近似值 $x$ 表示为

$$x=x_1 10^m+x_2 10^{m-1}+\cdots+x_p 10^{m-p+1}$$
$$+\cdots+x_n 10^{m-n+1}, \qquad (3.4)$$

其中 $x_1\neq0$，$x_1$，$x_2$，…，$x_n$，各为 0，1，2，…，9 中的某一个数字．$p$，$n$ 为正整数，$m$（称为 $x$ 的阶）为整数．

**定义 3** 对（3.4），如果

$$\Delta x\leqslant\frac{1}{2}10^{m-p+1},$$

则称 $x$ **精确到** $10^{m-p+1}$ 位，或者说 $x$ 是具有 $p$ 个**有效数位**的近似数，其中 $10^m$，…，$10^{m-p+1}$ 都是 $x$ 的有效数位．

特别当 $x$ 精确到末位（即 $p=n$）时，称 $x$ 为**有效数**．其中 $x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 分别称为 $x$ 的第1，第2，…，第$n$个**有效数字**．

例1　$\pi=3.1415926\cdots$，取　$x=3.142$．则

$$|\pi - x| = |-0.000407\cdots\cdots| < 0.0005.$$

$$\because \quad \Delta 3.142 = 0.0005 = \frac{1}{2}10^{-3},$$

此处$m=0$，$m-p+1=-3$，所以$p=4$．即$x$中的3，1，4，2是其4个有效数字，3.142是有效数。

例2 若以$3.142857\left(\doteq\frac{22}{7}\right)$为$\pi$的近似值，则

$$\pi - 3.142857 = -0.00125\cdots,$$

取 $$\Delta 3.142857 = 0.002 < \frac{1}{2}10^{-2}$$

即3.142857是$\pi$的具有3个有效数位的近似数。

通常，用四舍五入法截取的近似数都是有效数。

我们约定：**原始数据都要用有效数字写．凡是不标明绝对误差界或相对误差界的近似数都被认为是有效数．**

这样一来，从一个近似数的表示式就知道了它的绝对误差界（不超过该数末位的半个单位）或精确度。

显然，在定义3的条件下，有效数字个数多的近似数精确。

于是近似数3.1与3.10就有了不同的含义．前者表示，$\Delta 3.1 \leqslant \frac{1}{2}\cdot 10^{-1}$，而后者表示$\Delta 3.10 \leqslant \frac{1}{2}10^{-2}$．3.10比3.1精确．所以在近似数的小数部分里不能随便添加零或抹掉零．

例如，我国1979年的粮食产量为三万二千四百九十万吨．用数字应写为$32490\times10^4$吨．这是个近似数．它表明$\Delta 32490\times10^4 \leqslant \frac{1}{2}10^4$．即数$32490\times10^4$中有5个有效数

字 3，2，4，9，0．如果把它写成

$$3249\times10^5 \text{ 或 } 324900000,$$

就有问题了．前者表示粮食产量的绝对误差界不超过 5 万吨，后者表示绝对误差界不超过半吨．显然这是不合实际的．

必须注意，在定义3 中的 $\Delta x\leqslant\frac{1}{2}10^{m-p+1}$，应理解为

$$10^{m-p}<\Delta x\leqslant\frac{1}{2}10^{m-p+1} \tag{3.5}$$

否则，与绝对误差界的定义就有矛盾了．

### （四）有效数字个数与相对误差界

在定义3中表明了近似数的有效数字个数与绝对误差界的关系．下面指出有效数字（位）个数与相对误差界的关系．

**定理1** 如果近似数 $x$ 有 $p$ 个有效数字（位），则

$$10^{-(p+1)}<\delta x\leqslant\frac{1}{2x_1}10^{-(p-1)} \tag{3.6}$$

其中 $x_1$ 为 $x$ 第 1 个非零数字（下同）

**证明** 由（3.4）知

$$x_1 10^m\leqslant x<(x_1+1)10^m, \tag{3.7}$$

所以由（3.3）及定义3 得

$$\delta x=\frac{\Delta x}{x}\leqslant\frac{\frac{1}{2}10^{m-p+1}}{x_1 10^m}=\frac{1}{2x_1}10^{-(p-1)}.$$

另一方面，由（3.5），（3.7），

$$\delta x=\frac{\Delta x}{x}>\frac{10^{m-p}}{(x_1+1)10^m}$$

$$=\frac{1}{(x_1+1)}10^{-p}\geqslant 10^{-(p+1)}.$$

证完.

例如，取3.14为$\pi$的近似值，其相对误差界由(3.6)可得.

$$\delta 3.14\leqslant \frac{1}{2\times 3}10^{-(3-1)}==\frac{1}{6}10^{-2}<0.17\%$$

若用（3.3）计算，则

$$\delta 3.14==\frac{\Delta 3.14}{3.14}<\frac{0.16}{3.14}<0.051\%.$$

可见用（3.6）估计$\delta x$，虽然简便，但结果比较粗糙.

不过，定理1告诉我们，有效数字个数越多，近似数的相对误差界越小.

**推论** 如果$\delta x>\frac{1}{2}10^{-p}$，则$x$含有的有效数字（位）个数不超过$p$.

**证明** 用反证法. 设$x$有$p+1$个有效数字（位），则由定理1得.

$$\delta x\leqslant \frac{1}{2x_1}10^{-p}\leqslant\frac{1}{2}10^{-p}.$$

这与题设矛盾. 证完.

**例.** 求$\sqrt{6}$的近似值$a$，使$\delta a\leqslant\frac{1}{2}10^{-3}$.

**解** 因为$\sqrt{6}=2.4492\cdots$. $x_1=2$. 设$a$有$n$个有效数字，由定理1，$\delta a\leqslant\frac{1}{4}10^{-(n-1)}$. 令