高等院校教材同步辅导及考研复习用书

Spark® 星火·燎原

丛书主编 马德高

常微分方程辅导及习题精解

王高雄·第三版

本册主编 张天德 路慧芹 张宏飞

典型例题分析 + 教材习题答案 + 同步自测练习

延边大学出版社

大学理工图书畅销精品

※ 同步辅导系列

数学分析辅导及习题精解（华师三版、华师四版）（上、下册）
高等代数辅导及习题精解（北大三版）
复变函数论辅导及习题精解（钟玉泉第三版）
常微分方程辅导及习题精解（王高雄第三版）
解析几何辅导及习题精解（吕林根第四版）
离散数学辅导及习题精解（左孝凌版）
物理学辅导及习题精解（马文蔚第五版）
高等数学辅导（同济六版）
线性代数辅导及习题精解（同济四版、同济五版）
概率论与数理统计辅导及习题精解（浙大三版、浙大四版）
结构力学辅导及习题精解（龙驭球第二版）
分析化学辅导及习题精解（武汉大学第五版）（上册）
电工电子技术辅导及习题精解（秦曾煌第七版）（上、下册）

※ 同步测试卷系列

高等数学同步测试卷（同济六版）（上、下册）
微积分同步测试卷（人大三版）
线性代数同步测试卷（同济五版）
概率论与数理统计同步测试卷（浙大四版）

※ 考研数学系列

考研数学历年真题点评（数学一、数学二、数学三）
考研数学全真试题与命题预测（数学一、数学二、数学三）

责任编辑/何　方
封面设计/星火视觉设计中心

ISBN 978-7-5634-1838-1
9 787563 418381 >
定　价：11.80元
MCW111

丛书主编 马德高

常微分方程辅导及习题精解

王高雄·第三版

本册主编 张天德 路慧芹 张宏飞
副主编 孙书荣 乔凤

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程辅导及习题精解 ：王高雄第 3 版 / 马德高主编. -- 延吉 ：延边大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5634-1838-1

Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①常微分方程—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 136245 号

常微分方程辅导及习题精解

主编：马德高
责任编辑：何　方
出版发行：延边大学出版社
社址：吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编：**133002
网址：http://www.ydcbs.com
E-mail：ydcbs@ydcbs.com
电话：0433-2732435　　**传真：**0433-2732434
印刷：莱芜市圣龙印务有限责任公司
开本：880×1230　1/32
印张：8.5　**字数：**250 千字
版次：2011 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN 978-7-5634-1838-1

定价：11.80 元

前言

《常微分方程》是数学专业最重要的一门基础课之一。王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松编写的《常微分方程》是一套深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材，被全国许多院校采用。经过历次修订后的第三版，保持了其一贯的体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点，并根据近代数学发展的潮流，做了相应的调整，进一步强调提高学生的综合素质并激发学生的创新能力。为帮助、指导广大读者学好这门课程，我们编写了这本与王高雄、周之铭、朱思铭、王寿松主编的《常微分方程》（第三版）完全配套的《常微分方程辅导及习题精解》，以帮助加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和应试水平。

本书共分七章。章节的划分与教材一致。每章包括四大部分内容：

一、知识结构及内容小结：先用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，以便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容；然后用表格形式简要对每节涉及的基本概念和基本公式进行了系统的梳理，并指出理解与应用基本概念、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、经典例题解析：精选部分反映各章基本知识点和基本方法的典型例题，并按照题型分类，给出了详细解答，以提高读者的综合解题能力。

三、教材习题全解：对教材里该章节全部习题作详细解答，与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中，对部分有代表性的习题，设置了"思路探索"以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法；安排有"方法点击"来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。有的习题还给出了一题多解，以培养读者的分析能力和发散思维能力。

四、同步自测题及参考答案：精选有代表性、测试价值高的题目，以检测学习效果，提高应试水平。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到，充分体现了如下三大特色：

一、知识梳理清晰、简洁：直观、形象的图表总结，精炼、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和数学思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续：所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、浑然一体，一举完成。

三、内容深入浅出、易学易用：为适应广大学子的不同需求，本书进行了科学的编排，方便考生不仅可以在有教师指导的情况下使用更是自学备考的必备用书。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

目 录

第 1 章 绪 论

本章知识结构及内容小结

【本章知识结构】

- 函数方程
  - 微分方程
    - 偏微分方程
      - 一阶方程
        - 线性方程
        - 非线性方程
      - 高阶方程
        - 线性方程
        - 非线性方程
    - 常微分方程
      - 方程的阶
        - 一阶方程
          - 线性方程
          - 非线性方程
        - 高阶方程
          - 线性方程
          - 非线性方程
      - 方程的解
        - 通解
        - 特解
        - 隐式解
        - 积分曲线、方向场

【本章内容小结】

1. 常微分方程基本概念

名 称	内 容
常微分方程和偏微分方程	微分方程就是联系着自变量、未知函数及其导数的关系式. 如果在微分方程中,自变量的个数只有一个,我们称这种微分方程为常微分方程;自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程.
n阶微分方程及一阶与高阶微分方程	微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数n称为微分方程的阶,此微分方程则称为n阶微分方程. 当$n=1$时,称它为一阶微分方程;当$n>1$时,称它为高阶微分方程.
线性和非线性微分方程	如果方程$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$的左端为$y$及$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$的一次有理整式,则称它为$n$阶线性微分方程;不是线性方程的微分方程称为非线性微分方程. n阶线性微分方程一般形式为 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_n(x)y=f(x)$, 其中$a_1(x),\cdots,a_n(x),f(x)$是$x$的已知函数.
微分方程的解	如果函数$y=\varphi(x)$代入方程$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$后,能使它变为恒等式,则称函数$y=\varphi(x)$为该方程的解. 如果关系式$\Phi(x,y)=0$决定的函数$y=\varphi(x)$是上述方程的解,则称$\Phi(x,y)=0$为该方程的隐式解. 方程的解和隐式解统称为微分方程的解.
通解和特解	把含有n个独立的任意常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$的解$y=\varphi(x,c_1,\cdots,c_n)$称为$n$阶方程$F\left(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\right)=0$的通解. 关于解对常数的独立性是指,对$\varphi$及其$n-1$阶偏导数关于$n$个常数$c_1,c_2,\cdots,c_n$的雅可比行列式不为零. 为了确定微分方程一个特定的解,通常给出这个解所必需的初值条件或边值条件,相应地问题称为初值问题或边值问题. 满足初值条件或边值条件的解称为微分方程的特解.
积分曲线和方向场	一阶微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$的解$y=\varphi(x)$表示$Oxy$平面上的一条曲线,称为微分方程的积分曲线,而通解$y=\varphi(x,c)$表示平面上的一族曲线,称为微分方程的积分曲线族. 可以用$f(x,y)$在Oxy平面某区域D上定义过各点的小线段的斜率方向,这样的区域D称为方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$定义的方向场,方向场中方向相同的曲线$f(x,y)=k$称为等倾斜线或等斜线.

名 称	内 容
微分方程组	用两个及两个以上的关系式表示的微分方程称为微分方程组.
驻定与非驻定,动力系统	如果方程组右端不含自变量t,即$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y),y\in D\subseteq\mathbf{R}^n$,则称为驻定(自治)的,右端含$t$的微分方程组$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(t;y),y\in D\subseteq\mathbf{R}^n$,称为非驻定(非自治)的.驻定微分方程组$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y),y\in D\subseteq\mathbf{R}^n$的过$y$的解$\varphi(t;y)$可以视$t$为参数,有非常好的性质:可看成为$D$到$D$的单参数变换群,也就是:如记$\Phi_t(y)=\varphi(t;y)$,令$\Phi_t(y)$为参数$t(y)\in D$的映射(变换),则映射在$D$上满足恒同性$\Phi_0(y)=y$和可加性$\Phi_{t_1+t_2}(y)=\Phi_{t_1}(\Phi_{t_2}(y))=\Phi_{t_2}(\Phi_{t_1}(y))$,满足上述性质的映射称为动力系统.
相空间、奇点和轨线	不含自变量、仅由未知函数组成的空间称为相空间.积分曲线在相空间中的投影称为轨线.对驻定微分方程组$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=f(y),y\in D\subseteq\mathbf{R}^n$,方程组$f(y)=0$的解$y=y^*$表示为相空间中的点,它满足微分方程组,故称为平衡解,又称为奇点(平衡点).

2. 雅可比矩阵与函数相关性

名 称	内 容
雅可比矩阵和雅可比行列式	对n个变元的m个函数,$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots,m$,定义雅可比矩阵为 $$\frac{D(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}_{m\times n},$$ 当$n=m$时,称雅可比矩阵对应的行列式为雅可比行列式,记$\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$.
函数相关性	设函数$y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,m)$及其一阶偏导数在某开集$D\subset\mathbf{R}^n$上连续,如果在$D$内$f_1,f_2,\cdots,f_m$中的一个函数能表示成其余函数的函数,则称它们在$D$内函数相关;如果它们在$D$内的任何点的邻域内皆非函数相关,则称它们在$D$内函数无关,或称它们彼此独立.

名　称	内　容
函数相关性的判定	如果雅可比矩阵$\dfrac{D(f_1,f_2,\cdots,f_m)}{D(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$在$D$内的任何点上的秩皆小于$m$，则$f_1,f_2,\cdots,f_m$函数相关；如秩皆为$m$，则$f_1,f_2,\cdots,f_m$函数无关，彼此独立. 当$n=m$时，若雅可比行列式不为零，则函数无关，彼此独立；若雅可比行列式为零，则函数相关.

经典例题解析

基本题型Ⅰ:指出给定微分方程的阶数及是否线性的

例1 指出下列微分方程的阶数，并回答方程是否线性的：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2+x^5$；　　(2) $\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}-2x^2\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}+x^3\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$.

【思路探索】 由n阶线性微分方程的一般形式来判定.

解:(1) 一阶、非线性；　　(2) 四阶、线性.

基本题型Ⅱ:验证或求某方程的通解、特解

例2 验证给出的函数是相应微分方程的解.

(1) $5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+5x,y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{x^2}{2}+c$;($c$为任意常数)

(2) $(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0,y=\dfrac{1-x^2}{2x}$.

【思路探索】 根据微分方程的解的定义，把所给函数代入到相应微分方程中使得方程成为恒等式即可.

解:(1) $\because y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{x^2}{2}+c,\therefore\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3}{5}x^2+x$,

$\therefore$ 左边 $=5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=5(\dfrac{3}{5}x^2+x)=3x^2+5x=$ 右边，

从而 $y=\dfrac{x^3}{5}+\dfrac{x^2}{2}+c$ 是方程 $5\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2+5x$ 的解.

(2) $\because y=\dfrac{1-x^2}{2x},\therefore\mathrm{d}y=\left(\dfrac{1-x^2}{2x}\right)'\mathrm{d}x=-\dfrac{x^2+1}{2x^2}\mathrm{d}x$,

$\therefore$ 左边$=(x+y)\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\left(x+\dfrac{1-x^2}{2x}\right)\mathrm{d}x+x\left(-\dfrac{x^2+1}{2x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$= \left(\frac{x^2+1}{2x} - \frac{x^2+1}{2x}\right)dx = 0 = 右边,$$

$\therefore y = \dfrac{1-x^2}{2x}$ 是方程$(x+y)dx + xdy = 0$的解.

例3 求微分方程$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$的通解,并求与直线$y = x$相切的特解.

【思路探索】 直接在方程的两边求积分即得方程的通解.求方程满足某条件的特解,关键要找到所求积分曲线经过的某一特定点的坐标,代入通解中确定出任意常数即可得特解.

解:在方程$\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$两边求积分,得到方程的通解为

$y = x^3 + c$,其中c为任意常数.

与直线$y = x$相切的解满足在切点处斜率相同,即$3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,所以切点坐标为$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$和$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

将$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$和$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$分别代入$y = x^3 + c$得$c = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$和$c = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

故与直线$y = x$相切的解为$y = x^3 + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$和$y = x^3 - \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$.

基本题型Ⅲ:求满足某些条件(与微分方程有关)的曲线或曲线族

例4 求曲线族$y = x^2 + c$中与直线$y = -3x + 1$正交的曲线.

【思路探索】 关键是由它们在正交点处所满足的斜率关系,求出正交点的坐标.

解:由于曲线族$y = x^2 + c$满足的微分方程为$y' = 2x$.与直线$y = -3x + 1$正交的曲线在正交点处的斜率满足$2x = \dfrac{1}{3}$,即得$x = \dfrac{1}{6}$,正交点坐标为$\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$,代入$y = x^2 + c$得$c = \dfrac{17}{36}$.所以所求的曲线为$y = x^2 + \dfrac{17}{36}$.

例5 求与抛物线族$y = cx^2$正交的曲线族.

【思路探索】 首先对已给定的曲线族求得其满足的微分方程,其次借助于正交性得到所求曲线族满足的微分方程,再求解此微分方程.

解:因为抛物线族$y = cx^2$满足的微分方程为$y' = 2cx$,

再由$\begin{cases} y' = 2cx \\ y = cx^2 \end{cases}$消去$c$得$y' = \dfrac{2y}{x}$,

所以与$y = cx^2$正交的曲线族满足的微分方程为$-\dfrac{1}{y'} = \dfrac{2y}{x}$,

即 $2yy'=-x$，解之得 $y^2=-\frac{1}{2}x+c$，这就是所求的曲线族方程.

基本题型 Ⅳ：建立微分方程模型

例 6 一个质量为 m 的质点在水中由静止开始下沉，设下沉时水的阻力与速度成正比，试求质点运动规律所满足的微分方程及初始条件.

【思路探索】 此题属于物理学领域的问题，注意运用基本定律和定理建立微分方程模型.

解：设质点的运动规律为 $x=x(t)$，其中 t 表示时间，x 表示下沉距离. 质点在水中受到重力 mg 及水的阻力 $-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$（$k>0$ 是比例常数）作用，由牛顿第二定律得

$$mg-k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

$t=0$ 时，下沉距离 $x=0$，下沉速度为 0，因而 $x=x(t)$ 满足下列微分方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{k}{m}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=g,\\ x(0)=0,\\ x'(0)=0.\end{cases}$$

本章教材习题全解

§1.2 基本概念和常微分方程的发展历史

1. 指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否线性的：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=4x^2-y$； (2) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+12xy=0$；

(3) $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3y^2=0$； (4) $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+3xy=\sin x$；

(5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos y+2x=0$； (6) $\sin\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)+\mathrm{e}^y=x$.

解：(1) 一阶，线性； (2) 二阶，非线性； (3) 一阶，非线性；
(4) 二阶，线性； (5) 一阶，非线性； (6) 二阶，非线性.

2. 试验证下面函数均为方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\omega^2y=0$ 的解，这里 $\omega>0$ 是常数：

(1) $y=\cos\omega x$；　　(2) $y=c_1\cos\omega x$（c_1 是任意常数）；

(3) $y=\sin\omega x$；　　(4) $y=c_2\sin\omega x$（c_2 是任意常数）；

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$（$c_1,c_2$ 是任意常数）；

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$（A,B 是任意常数）.

解:(1) $\because y=\cos\omega x,\dfrac{dy}{dx}=-\omega\sin\omega x,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-\omega^2\cos\omega x,$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cdot\cos\omega x=0,$

因此,$y=\cos\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(2) $\because y=c_1\cos\omega x,\dfrac{dy}{dx}=-c_1\omega\sin\omega x,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-c_1\omega^2\cos\omega x,$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_1\omega^2\cos\omega x+\omega^2\cdot c_1\cos\omega x=0,$

因此,$y=c_1\cos\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(3) $\because y=\sin\omega x,\dfrac{dy}{dx}=\omega\cos\omega x,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-\omega^2\sin\omega x,$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-\omega^2\sin\omega x+\omega^2\cdot\sin\omega x=0,$

因此,$y=\sin\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(4) $\because y=c_2\sin\omega x,\dfrac{dy}{dx}=c_2\omega\cos\omega x,\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-c_2\omega^2\sin\omega x,$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2\cdot c_2\sin\omega x=0,$

因此,$y=c_2\sin\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(5) $\because y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x,\dfrac{dy}{dx}=-c_1\omega\sin\omega x+c_2\omega\cos\omega x,$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x,$

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=-c_1\omega^2\cos\omega x-c_2\omega^2\sin\omega x+\omega^2(c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x)=0,$

因此,$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$ 是方程$\dfrac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解.

(6) $y = A\sin(\omega x + B)$, $\frac{dy}{dx} = \omega \cdot A\cos(\omega x + B)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = -\omega^2 \cdot A\sin(\omega x + B),$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = -\omega^2 \cdot A\sin(\omega x + B) + \omega^2 \cdot A\sin(\omega x + B) = 0,$$

因此，$y = A\sin(\omega x + B)$ 是方程$\frac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$ 的解.

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解：

(1) $y = \frac{\sin x}{x}$, $xy' + y = \cos x$;

(2) $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$, $(1 - x^2)y' + xy = 2x$(c 是任意常数)；

(3) $y = ce^x$, $y'' - 2y' + y = 0$(c 是任意常数)；

(4) $y = e^x$, $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$;

(5) $y = \sin x$, $y' + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$;

(6) $y = -\frac{1}{x}$, $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$;

(7) $y = x^2 + 1$, $y' = y^2 - (x^2 + 1)y + 2x$;

(8) $y = -\frac{g(x)}{f(x)}$, $y' = \frac{f'(x)}{g(x)}y^2 - \frac{g'(x)}{f(x)}$.

解：(1) $\because y = \frac{\sin x}{x}$, $y' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, $\therefore xy' + y = \frac{x\cos x - \sin x}{x} + \frac{\sin x}{x} = \cos x$.

因此，$y = \frac{\sin x}{x}$ 是方程 $xy' + y = \cos x$ 的解.

(2) $\because y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$, $y' = \frac{-cx}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$$\therefore (1 - x^2)y' + xy = (1 - x^2) \cdot \frac{-cx}{\sqrt{1 - x^2}} + x(2 + c\sqrt{1 - x^2})$$

$$= -cx\sqrt{1 - x^2} + 2x + cx\sqrt{1 - x^2} = 2x.$$

因此，$y = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$ 是方程$(1 - x^2)y' + xy = 2x$ 的解.

(3) $\because y = ce^x$, $y' = ce^x$, $y'' = ce^x$,

$\therefore y'' - 2y' + y = ce^x - 2 \cdot ce^x + ce^x = 0$.

因此，$y = ce^x$ 是方程 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解.

(4) $\because y = e^x$, $y' = e^x$,

$\therefore y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = e^x \cdot e^{-x} + e^{2x} - 2e^x \cdot e^x = 1 - e^{2x}$,

因此，$y = e^x$ 是方程 $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}$ 的解.

(5) $\because y=\sin x, y'=\cos x$,

$\therefore y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=\cos x+\sin^2 x-2\sin x\sin x+\sin^2 x-\cos x$

$=0$,

因此,$y=\sin x$ 是方程 $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0$ 的解.

(6) $\because y=-\dfrac{1}{x}, y'=\dfrac{1}{x^2}$,

$\therefore x^2y'=x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=1$,又 $x^2y^2+xy+1=x^2\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2+x\left(-\dfrac{1}{x}\right)+1=1$,

所以,$y=-\dfrac{1}{x}$ 是方程 $x^2y'=x^2y^2+xy+1$ 的解.

(7) $\because y=x^2+1, y'=2x$,

$\therefore y^2-(x^2+1)y+2x=(x^2+1)^2-(x^2+1)(x^2+1)+2x=2x=y'$,

因此,$y=x^2+1$ 是方程 $y'=y^2-(x^2+1)y+2x$ 的解.

(8) $\because y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}, \therefore y'=-\dfrac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{f^2(x)}=\dfrac{g(x)f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$,

又 $\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(x)}{g(x)}\cdot\left(-\dfrac{g(x)}{f(x)}\right)^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$

$=\dfrac{g(x)f'(x)}{f^2(x)}-\dfrac{g'(x)}{f(x)}=y'$,

所以,$y=-\dfrac{g(x)}{f(x)}$ 是方程 $y'=\dfrac{f'(x)}{g(x)}y^2-\dfrac{g'(x)}{f(x)}$ 的解.

4. 给定一阶微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$,

(1) 求出它的通解;　　(2) 求通过点(1,4) 的特解;

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解;　　(4) 求出满足条件 $\int_0^1 y\mathrm{d}x=2$ 的解;

(5) 绘出(2)、(3)、(4) 中的解的图形.

解:(1) 由 $\dfrac{dy}{dx}=2x$,得 $dy=2x\mathrm{d}x$,方程两边积分,即得 $y=x^2+c$,其中 c 为任意常数. 所以,方程 $\dfrac{dy}{dx}=2x$ 的通解为 $y=x^2+c$,c 为任意常数.

(2) 把 $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ 代入 $y=x^2+c$ 得 $c=3$. 所以过点(1,4) 的特解为 $y=x^2+3$.

(3) 因为与直线相切,所以方程组 $\begin{cases}y=x^2+c\\y=2x+3\end{cases}$ 有且只有唯一一组解,即 $x^2+c=2x+3$ 有唯一解,故 $c=4$. 因此,与直线 $y=2x+3$ 相切的解是 $y=x^2+4$.

(4) $\because \int_0^1 y\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+c)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}+cx\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}+c=2$,所以 $c=\dfrac{5}{3}$,因