高等教育“十二五”规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

何亚丽　主编

科学出版社

内 容 简 介

本书遵循教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》中关于线性代数课程的基本要求，面向普通高校应用型人才培养的需要，以线性方程组为主线，集编者多年教学实践经验编写而成. 全书分为七章，内容包括行列式与线性方程组、矩阵与线性方程组、矩阵的运算、向量与线性方程组、特征值、特征向量及矩阵的相似对角化、对称矩阵与二次型以及 Mathematica 在线性代数中的应用等. 书末附有习题参考答案.

本书在内容以及学习侧重点上都做了精心的选择，讲究学以致用，不过分追求理论的完整，着重线性代数的基本概念和经典方法.

本书适合本科各专业使用，适当取舍后也可作为专科、高职及成人教育等各类教学的用书或工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/何亚丽主编. —北京：科学出版社，2012
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-032987-5

Ⅰ.①线… Ⅱ.①何… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 257605 号

策划：李 军
责任编辑：张振华 / 责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 5 月第一次印刷 印张：16 1/2
字数：371 000

定价：30.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉)
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62135157

前　言

现实世界中，变量与变量之间的依赖关系是多种多样的，但是我们可以把它们分成线性和非线性两大类. 变量之间的关系中最简单的就是线性关系. 讨论变量的线性方程及线性运算的代数就叫做线性代数. 而实际问题中的许多现象都在不同程度上与线性变化的规律相接近. 因此，在研究非线性关系时，一个很重要的方法就是把问题线性化，即把问题化为解线性代数方程之类的运算. 这种处理问题的方法几乎渗透到各个科学技术领域，从而使线性代数有更广泛的应用. 线性代数课程是高等院校大多数专业必修的一门重要基础理论课.

按照现行的国际标准，线性代数是通过公理化来表述的，它是第二代数学模型. 这意味着数学的表述方式和抽象性的全面进化. 数学的公理化、系统性描述使得线性代数内容在严谨性上大大提高，但在直觉性上有一定的降低. 我们不认为直觉性与抽象性一定相互矛盾，特别是在数学教育和数学教材中，如果一味注重形式上的严格性，学生就好像被迫进行钻火圈表演的小猴子一样，变成枯燥规则的奴隶. 多年来，线性代数概念的抽象、计算的冗繁、内容的枯燥一直困扰着学生. 帮助学生建立直觉思维有助于他们理解抽象的概念，进而理解数学的本质. 因此，本书的编写立足普通高等院校人才培养的需要，把握“科学、简约、应用、现代”的原则，力争使教材内容既保持严谨的风格又直观生动，易学易懂.

首先，本书最突出的特点是将 1～6 章每章都分成五部分：基础知识、软件实现、价值体现、解因析理和拓展提高. 我国的大学具有多层次性，每年上百万学线性代数的大学生也有很多层次，其要求差别很大. 对多数学生来说，不教算题而去教他们抽象思维，将是对资源的极大浪费. 因此，我们将线性代数中的基本概念剥离出来，引入数学软件 Mathematica，将烦琐的计算交给计算机完成，并引导学生将所学知识用于实际问题的解决，将每一章的前三部分拿出来可自成体系，即使只学习前三部分，也能全面了解线性代数的基本概念和方法，解决相关实际问题. 这对于部分只注重应用的独立学院学生和专科学生是适用的. 解因析理篇包括线性代数的所有方法、结论和基本计算技能，弥补前三部分在理论叙述上的不足，保证线性代数知识结构的严谨和完整. 需要对线性代数理论及应用全面了解的专业的学生应学习前四部分内容. 拓展提高篇注重的是解题思路的分析、计算技巧的归纳以及题型变化的多样性等，以期达到使学生深刻理解、融会贯通的效果. 有进一步深造和考研要求的学生应将五部分全部学完.

其次，各章知识与中学数学无缝衔接，每个概念的引入都有出处. 或来自中学数学的延伸，或来自几何直观及实际问题的解决，让学生感觉线性代数并非无源之水、无本之木，而是实实在在地存在于我们的生活中. 本书内容以提出问题、讨论问题、解决问题的方式展开，使学生既知其然又知其所以然.

再次，通过数学软件 Mathematica 的使用，提高学习效率. 将基本知识、计算技能与计算机应用融为一体，复杂计算借助 Mathematica 实现，帮助学生实现由知识向能力的转化，使学生感觉线性代数适用、实用、好用. 将线性代数与计算机的优势有机结合，为学生进入科学计算的殿堂打下良好的基础.

最后，习题编排层次分明，例题的选用与各部分内容相匹配，课后练习分基础知识、基本技能、拓展提高三个层次，满足不同层次学生的学习需求.

本书在内容以及学习侧重点上都做了精心选择，讲究学以致用，不过分追求理论的完整，着重基本概念和经典的方法，但内容主体完全满足教育部非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》中的线性代数课程基本要求. 本书适于本科各专业使用，同时照顾到不同层次的需求，在适当取舍后可用于专科、高职及成人教育等各类教学中. 建议教学时数为 20～40 课时.

本书从设想、构思到撰写，得到了刘春凤教授的大力帮助和支持，在此表示衷心的感谢. 本书参阅了许多专家学者的论著，并引用了部分文献中的信息，恕不一一指明出处，在此一并致谢.

本书具体分工如下：何亚丽编写第 1、5、6 章，屈静国，崔玉环编写第 2、3 章，刘琳琳编写第 4、7 章，并负责各章习题的选编与答案的校对. 全书由何亚丽统稿.

由于编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，欢迎读者批评指正.

编　者

2011 年 11 月

目　录

第 1 章　行列式与线性方程组

我们知道，在研究关联着多个因素的量所引起的问题时，需要考察多元函数. 如果所研究的关联性是线性的，那么称这个问题为线性问题. 一次方程就是研究线性问题的方程，被称为线性方程. 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程的一般形式为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 为常数. 当 $n=1$ 和 $n=2$ 时就是我们熟悉的一元一次方程和二元一次方程. 例如，方程 $3x_1-5x_2=-2$ 和 $2x_1+x_2-5x_3+x_4=\sqrt{6}$ 就是线性方程，而 $4x_1-x_2=x_1x_2$ 和 $x_1=2\sqrt{x_2}-6$ 不是线性方程.

线性方程组是由一个或几个包含相同变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组成的. 历史上线性代数的第一个问题是关于解线性方程组的问题，而线性方程组理论的发展又促成了作为工具的行列式理论和矩阵理论的创立与发展. 讨论变量的线性方程及线性运算的代数就叫做线性代数.

线性代数是中学代数的继续和提高，中学数学学习了二元一次方程组的解法，但在科学研究和应用中经常需要解更多未知数的一次方程组，行列式就产生于 n 元线性方程组的求解，它是为简化此类问题的计算而引入的，是线性代数中的基本概念之一. 1750 年，瑞士数学家克莱姆在他的论文中提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克莱姆法则.

本章借助行列式讨论含有 n 个未知数 n 个一次方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

的求解问题.

1.1　基础知识——线性方程组与行列式定义

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

用中学学过的加减消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.2}$$

将方程组中第一个方程的两边同乘以 a_{22}，第二个方程的两边同乘以 a_{12}，然后相减，消去 x_2，可得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

用类似的方法消去 x_1，可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，可得到方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{1.3}$$

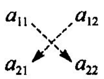

图 1.1

为了便于记忆和讨论表达式(1.3)，我们给出以下的记法. 以表达式(1.3)中的分母为例，将 $a_{11},a_{22},a_{12},a_{21}$ 按其在方程组中出现的位置相应地排成一个方形数表，如图 1.1 所示.

乘积 $a_{11}a_{22}$ 是这个方形表中从左上角到右下角的对角线上两个数之积，乘积 $a_{12}a_{21}$ 是另一条对角线上两个数之积. 在上述方形数表的两边各加一竖线表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 的值，即规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.4}$$

式(1.4)的左端称为二阶行列式，右端称为二阶行列式的展开式.

定义 1.1 用 2^2 个数组成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，横排称行，竖排称列.

利用二阶行列式的概念，当二元线性方程组(1.2)的系数组成的行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq0$ 时，它的解可以用行列式简洁地表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}$$

其中 D_1 和 D_2 是以 b_1,b_2 分别替换系数行列式 D 中第一列、第二列的元素所得到的两个二阶行列式. 利用行列式解二元线性方程组的这个方法就是二元线性方程组的克莱姆(Cramer)法则.

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

当 $n=3$ 时，方程组(1.1)成为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

方程组(1.5)可同样逐次消元，消去 x_3,x_2，可得

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$

把 x_1 的系数记为 D，当 $D\neq0$ 时，

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

类似可解得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

此公式更难记忆，为此定义三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

它是由 3 行 3 列共 9 个元素构成的，是 6 项代数和. 从左上角到右下角的对角线称为主对角线，从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 三阶行列式的展开式可以用对角线法则记忆，如图 1.2 所示，实线上 3 个元素的乘积取正号，虚线上 3 个元素的乘积取负号.

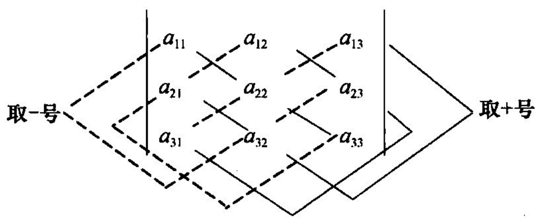

图 1.2

这样当 $D\neq0$ 时，方程组(1.5)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

其中，D_1，D_2 和 D_3 是以 b_1，b_2，b_3 分别替换系数行列式 D 中第一列、第二列、第三列的元素所得到的三个三阶行列式. 利用行列式解三元线性方程组的这个方法就是三元线性方程组的克莱姆法则.

1.1.3　*n* 阶行列式定义

事实上，形如(1.1)的方程组均可以用消元法求解. 问题是消元法对具体的数字方程

求解，虽然比较方便，但其解没有一个统一的公式. 解的公式不仅在理论上具有重要性，而且当方程组的系数含有参数或具有某些对称性时，用公式求解会比用消元法更方便. 由上述讨论可知，恰当地定义 n 阶行列式可解决此问题. 为此我们来分析二阶、三阶行列式的特征.

(1) 二阶行列式是 $2!=2$ 项的代数和，其中每一项是取自不同行不同列的两个元素的乘积，三阶行列式是 $3!=6$ 项的代数和，其中每一项是取自不同行不同列的三个元素的乘积.

(2) 三阶行列式可以写成如下形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

上述等式右端的三项是左端三阶行列式中第一行的三个元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 分别乘以一个二阶行列式，而所乘的二阶行列式是划去该元素所在的行与列后，由其余的元素组成的，并且每一项的前面都乘以 $(-1)^{1+j}$，1 和 j 恰好是元素 a_{1j} 的行标和列标. 容易验证这一规律对于二阶行列式也适用，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}a_{22} + a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}$$

按照这一规律可以用三阶行列式定义四阶行列式，依此类推即可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2 设 A 是 n 阶行列式，从 A 中删去元素 a_{ij} 所在的第 i 行，第 j 列后所得到的 $(n-1)$ 阶行列式称为 A 中元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}，称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，三阶行列式 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的余子式为 $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$，而它的代数余子式为 $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

定义 1.3 n 阶行列式 $A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 由 n^2 个数构成，规定：当 $n=1$ 时，一阶行列式 $A=|a_{11}|$ 表示数 a_{11}，不是 a_{11} 的绝对值，可以是正数也可以是负数. 当 $n=2,3,\cdots$ 时，n 阶行列式表示由以下递归公式得到的数

$$A=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j} \tag{1.6}$$

按此定义，n 阶行列式是 $n!$ 个不同项的代数和，其中的每一项都是处于行列式既不同行又不同列的 n 个元素之乘积. 式(1.6)也称为行列式 A 按第一行的展开式.

注:(1) 如果 A 只代表一个方形数据表,则其行列式用 $|A|$ 或 $\det A$ 表示.

(2) 行列式是由一些数据排列成的数表经过规定的计算方法而得到的一个数. 当然,如果行列式中含有未知数,那么行列式就是一个多项式. 因此它本质上代表一个数值.

例 1.1 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$; (2) $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=2\times7-3\times5=-1$;

(2) $D=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-1\times(-3)\times1-(-2)\times2\times(-1)=-5$.

注:四阶及其以上的行列式没有对角线法则,因此高阶行列式的计算是本章的一个难点.

定义了 n 阶行列式之后,n 元线性方程组的解可用公式表示,这就是著名的克莱姆法则. 1750 年,瑞士的克莱姆发现了用行列式求解线性方程组的克莱姆法则. 这个法则表述简洁自然,思想深刻,包含了对多重行列式的计算,是对行列式与线性方程组之间关系的深刻理解.

定理 1.1(克莱姆法则) 对于 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots x_n$,n 个方程的线性方程组(1.1),若其系数行列式 $D\neq0$,则方程组(1.1)有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 n 阶行列式 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 的第 j 列元素依次改换为 b_1,b_2,$\cdots$,b_n 后所得的行列式,即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

此定理的证明稍后给出.

1.2 软件实现—— Mathematica 中行列式的计算

由行列式定义知,行列式是由一些数据排列成的方形数表经过规定的计算方法得到的一个算式,因此用 Mathematica 计算行列式需解决两个问题:数据表的输入、行列式的计算.

1.2.1 数据表的输入方法

Mathematica 中的表在形式上是用花括号括起来的若干表达式,表达式之间用逗号隔开. Mathematica 的数学函数都可以直接作用在表上,这时系统将函数分别作用在表的每一个元素上,得到的结果再做成一个表. 表的元素不仅仅可以是数,也可以是其他形式的表达式. 表本身也是一种表达式,所以表的元素也可以是表.

例如，输入命令：

```
{2,5,8}
%+3
{{2,5,8},{0,1,2},{7,8,6}}
```

输出结果：

```
{2,5,8}
{5,8,11}
{{2,5,8},{0,1,2},{7,8,6}}
```

1.2.2 行列式的计算

表在系统内部被用于表示向量、矩阵和集合. 一层的表用于表示向量，两层的表用于表示矩阵（即数表），这时必须要求每一个子表的长度相同. Mathematica 中有专门用于计算行列式的函数 Det[数表]，即 determinant 的前 3 个字母.

例 1.2 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ 的值.

解 输入命令：

```
{{2,5,8},{0,1,2},{7,8,6}}
Det[%]
```

输出结果：

```
{{2,5,8},{0,1,2},{7,8,6}}
  -6
```

例 1.3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & 2 \\ x & 1 & 6 \end{vmatrix}$ 的值.

解 输入命令：

```
{{2,0,x},{0,1,2},{x,1,6}};
Det[%]
```

输出结果：

$8-x^2$

例 1.4 计算行列式 $\begin{vmatrix} a^2+\frac{1}{a^2} & a & \frac{1}{a} & 1 \\ b^2+\frac{1}{b^2} & b & \frac{1}{b} & 1 \\ c^2+\frac{1}{c^2} & c & \frac{1}{c} & 1 \\ d^2+\frac{1}{d^2} & d & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解　输入命令：

```
A={{a^2+1/a^2,a,1/a,1},{b^2+1/b^2,b,1/b,1},{c^2+1/c^2,c,1/c,1},
   {d^2+1/d^2,d,1/d,1}};
Det[A]//Simplify
```

输出结果：

$$-\frac{(a-b)(a-c)(b-c)(a-d)(b-d)(c-d)(-1+abcd)}{a^2b^2c^2d^2}$$

例 1.5　计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 9 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 10 \\ -2 & 1 & 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 1 & 9 & 11 \end{vmatrix}$ 的值.

解　输入命令：

```
{{2,0,5,5,-1},{0,1,2,7,9},{3,1,6,7,10},{-2,1,4,6,0},{-3,-5,1,9,11}};
Det[%]
```

输出结果：

```
4799
```

再复杂的行列式计算交给 Mathematica 也会变得轻而易举.

1.3　价值体现——应用实例

1.3.1　行列式在 n 元线性方程组求解中的应用

行列式的概念产生于线性方程组的求解，反过来又可以应用于线性方程组特别是高阶线性方程组的求解.

例 1.6　在 Mathematica 环境下，用 Cramer 法则求解方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \end{cases}$

解　输入命令：

```
A={{2,1,-5,1},{1,4,-7,6},{1,-3,0,-6},{0,2,-1,2}};
Det[A]
a1={{8,1,-5,1},{0,4,-7,6},{9,-3,0,-6},{-5,2,-1,2}};
a2={{2,8,-5,1},{1,0,-7,6},{1,9,0,-6},{0,-5,-1,2}};
a3={{2,1,8,1},{1,4,0,6},{1,-3,9,-6},{0,2,-5,2}};
a4={{2,1,-5,8},{1,4,-7,0},{1,-3,0,9},{0,2,-1,-5}};
x1=Det[a1]/Det[A]
x2=Det[a2]/Det[A]
```

```
x3=Det[a3]/Det[A]
x4=Det[a4]/Det[A]
```

输出结果：

```
27
 3
-4
-1
 1
```

例 1.7 一个城市有 3 个重要的企业：一个煤矿，一个发电厂和一条地方铁路. 开采 1 元钱的煤，煤矿必须支付 0.25 元的运输费及 0.25 元的电费. 而生产 1 元钱的电力，发电厂需支付 0.65 元的煤作燃料，自己亦需支付 0.05 元的电费来驱动辅助设备及支付 0.05 元的运输费. 而提供一元钱的运输费，铁路需支付 0.55 元的煤作燃料，0.10 元的电费驱动它的辅助设备. 某个星期内，煤矿从外面接到 50 000 元煤的订货，发电厂从外面接到 25 000 元电力的订货，外界对地方铁路没有要求. 问这 3 个企业在那一个星期内总生产总值多少时才能精确地满足它们本身的要求和外界的要求？

解 对于一个星期的周期，x_1 表示煤矿的总产值，x_2 表示电厂的总产值，x_3 表示铁路的总产值.

根据题意，有

$$\begin{cases} x_1-(0\cdot x_1+0.65x_2+0.55x_3)=50\,000 \\ x_2-(0.25x_1+0.05x_2+0.10x_3)=25\,000 \\ x_3-(0.25x_1+0.05x_2+0\cdot x_3)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1-0.65x_2-0.55x_3=50\,000 \\ -0.25x_1+0.95x_2-0.10x_3=25\,000 \\ -0.25x_1-0.05x_2+x_3=0 \end{cases}$$

在 Mathematica 环境下，输入命令：

```
A={{1,-0.65,-0.55},{-0.25,0.95,-0.10},{-0.25,-0.05,1}};
Det[A]
a1={{50000,-0.65,-0.55},{25000,0.95,-0.10},{0,-0.05,1}};
a2={{1,50000,-0.55},{-0.25,25000,-0.10},{-0.25,0,1}};
a3={{1,-0.65,50000},{-0.25,0.95,25000},{-0.25,- 0.05,0}};
x1=Det[a1]/Det[A]
x2=Det[a2]/Det[A]
x3=Det[a3]/Det[A]
```

输出结果：

```
0.62875
```

102087
56163
28330

因为系数行列式 $D=0.628\ 75\neq0$，根据克莱姆法则，此方程组有唯一解，其解为 $x_1=102\ 087$，$x_2=56\ 163$，$x_3=28\ 330$. 所以煤矿总产值为 102 087 元，发电厂总产值为 56 163 元，铁路总产值为 28 330 元.

1.3.2 行列式的几何应用

1812 年，法国数学家柯西(Cauchy)发表了一篇文章，文中使用行列式给出计算多个多面体体积的行列式公式. 柯西在解析几何中使用行列式的工作激发了人们对行列式应用的强烈兴趣，持续了大约 100 年. 下面我们简要介绍各阶行列式的几何含义.

一阶行列式 $|\boldsymbol{a}_1|=\boldsymbol{a}_1$. 意思就是 $\boldsymbol{a}_1$ 的一阶行列式是数 $\boldsymbol{a}_1$ 或者说是向量的本身，这个数 $\boldsymbol{a}_1$ 的本身是一维坐标轴上的有向长度. 这里强调有向性，长度是有向的，是个向量，这一直是个很重要的概念.

二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ 的几何意义是 xOy 平面上以向量 $\overrightarrow{OA}=(a_1,b_1)$，$\overrightarrow{OB}=(a_2,b_2)$ 为邻边的平行四边形的有向面积，如图 1.3 所示. 我们来考察这个平行四边形与构成它的两个向量之间的关系.

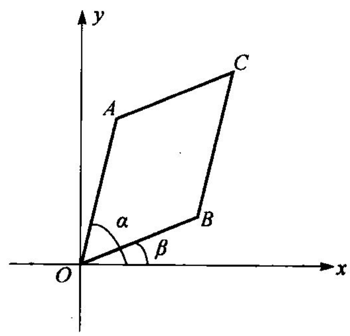

图 1.3

以向量 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$ 为邻边的平行四边形的有向面积为

$$S=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(\alpha-\beta)$$

而

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{b_1}{|\overrightarrow{OA}|}\cdot\frac{a_2}{|\overrightarrow{OB}|}-\frac{a_1}{|\overrightarrow{OA}|}\cdot\frac{b_2}{|\overrightarrow{OB}|}$$

所以

$$S=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(\alpha-\beta)=a_2b_1-a_1b_2$$

至此可以看到，二阶行列式的几何意义就是以行列式的列所构成的向量为邻边的平行四边形的有向面积. 若求面积值，取绝对值即可.

例 1.8 计算由点(−2,−2)，(0,3)，(4,−1)，(6,4)确定的平行四边形的面积.

解 先将此平行四边形平移到使原点为其一顶点的情形，将每个顶点坐标减去顶点(−2,−2)即可. 新的平行四边形面积与原平行四边形面积相同，其顶点为(0,0)，(2,5)，(6,1)，(8,6)，如图 1.4 所示.

此平行四边形的面积由 $A=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$ 的列确定，$|A|=|-28|$，所以平行四边形的面积为 28.