普通高等教育基础课规划教材

PROBABILITY AND STATISTICS

概率论与数理统计全程指导

范玉妹　汪飞星　王萍　李娜　编

第2版

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

概率论与数理统计全程指导

第2版

范玉妹　汪飞星　王　萍　李　娜　编

机 械 工 业 出 版 社

第 2 版前言

本书第 1 版于 2008 年 4 月出版后，经过 4 年的教学实践，我们再次根据在教学中积累的经验，并汲取使用本书的读者、同行们所提出的宝贵意见，对本书的内容做了适当的修定与调整.

这次我们对本书第 1 版主要做了如下四方面的修定与调整：

第一，根据主教材的改动调整补充“同步解析”的内容；

第二，调整补充“典型例题解析”的内容；

第三，修定“考研真题解析”的内容，增补近年来的考研真题；

第四，修正在第 1 版的印刷中的所有错误.

在本书第 2 版出版之际，谨向关心本书和对本书第 1 版提出宝贵意见的同志表示深切谢意. 本书最后所附的参考文献仅是主要参考文献，在此也向列入和未列入参考文献的作者们表示深切谢意.

由于编者水平有限，书中不妥之处敬请读者批评指正.

编　者

第1版前言

概率论与数理统计课程是理、工、管本科生一门重要的必修的基础数学课程，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目. 为了帮助在校的大学生及准备考研的人员学好概率论与数理统计课程，扩大课堂信息量，提高应试能力，我们根据教育部关于高等院校课程教学的基本要求及硕士研究生入学考试的数学考试大纲，融学习指导和考研为一体编写了这本全程学习指导书.

本书紧扣教材，共分为九章，除第九章外每章均设计了五方面内容：

内容提要与基本要求 列出了每章的基本概念，基本定理和基本计算公式，突出了必须掌握的知识点，给出了重点与难点.

习题同步解析 针对主教材的习题，给出了相应的解答. 特别对于相对综合的习题，给出了详尽的解题过程，以方便读者对照和分析，达到通过不断地反复自学消化教材内容的目的.

典型例题解析 精选具有代表性的例题进行分析与解答. 这些例题围绕教材主题，涉及的内容广、类型多、技巧性强，旨在提高学习者的解题能力、分析能力，开拓解题思路，掌握解题技巧.

考研真题解析 精选历年研究生入学考试的真题进行分析与解答. 旨在使学习者了解历年研究生入学考试的知识范围和题型结构. 清楚入学考试的试题与科学的思维方式、熟练的解题技巧及涉及知识的使用意识之间的密切关系.

模拟试题自测 模拟试题旨在对学习者作进一步的解题训练，培养综合能力和应变能力，巩固和提高学习与复习的效果.

限于编者水平，错漏之处在所难免，望读者不吝指正.

编　者

目　录

第一章　随机事件与概率

内容提要与基本要求

第一节　随机试验与随机事件

一、基本法则和排列组合

1. 加法原理

设完成一件事有 m 种方式，第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，…，第 m 种方式有 n_m 种方法，无论通过哪种方法都可以完成这件事，则完成这件事总共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法.

2. 乘法原理

设完成一件事有 m 个步骤，第一个步骤有 n_1 种方法，第二个步骤有 n_2 种方法，…，第 m 个步骤有 n_m 种方法，必须通过每一步骤，才算完成这件事. 则完成这件事总共有 $n_1\times n_2\times\cdots\times n_m$ 种不同的方法.

3. 选排列

从 n 个不同元素中，每次取 k 个（$1\leqslant k\leqslant n$）不同的元素，按一定的顺序排成一列，称为选排列，其排列总数为：

$$\mathrm{P}_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

4. 全排列

当 $k=n$ 时称为全排列，其排列总数为：

$$\mathrm{P}_n^n=\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1=n!.$$

5. 可重复排列

从 n 个不同元素中，取 k 个元素（$k\leqslant n$），允许重复，这种排列称为可重复排列，其排列总数为：$n\cdot n\cdot\cdots\cdot n=n^k$.

6. 组合

从 n 个不同元素中，取 k 个$(1\leqslant k\leqslant n)$不同的元素，不管其顺序合并成一组，称为组合，其组合总数为：

$$C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\ k!},$$

其中 C_n^k 常记为$\binom{n}{k}$，称为组合系数.

7. 分组组合

n 个不同元素分为 k 组，各组元素数目分别为 r_1，r_2，…，r_k 的分法总数为：

$$\frac{n!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_k!},\ r_1+r_2+\cdots+r_k=n.$$

8. 二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^na^0b^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k,$$

其中 n 是正整数.

9. 组合与排列的关系：

$$P_n^k=C_n^k\cdot k!.$$

10. 组合系数与二项式定理的关系

利用公式

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k,$$

可得到许多有用的组合公式：

令 $a=b=1$ 得：

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n,$$

令 $a=1,b=-1$ 得：

$$C_n^0-C_n^1+(-1)^2C_n^2+\cdots+(-1)^nC_n^n=0.$$

二、样本空间与随机事件

1. 随机试验

若一个试验满足下列三个条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有结果是明确可知的，并且不止一个；

(3) 进行一次试验之前无法预料哪个结果会出现；

则称这样的试验为随机试验，记为 E.

2. 样本空间

随机试验所有结果的集合，称为样本空间，记为 S 或 Ω. 随机试验的每一个可能结果，即 S 中的每一个元素称为样本点，用 e 或 ω 表示.

3. 随机事件

称随机试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件，简称为事件，用大写英文字母 A，B，C，…表示. 随机事件在随机试验中可能发生，也可能不发生. 所谓事件 A 发生指的是在一次试验中，当且仅当它所包含的某个样本点出现.

只包含一个样本点的事件称为基本事件.

一个样本点都不包含的事件称为不可能事件，记为$\varnothing$.

包含所有样本点的事件称为必然事件，必然事件在试验中一定会发生，故记为 S.

三、事件的关系与事件的运算

设试验 E 的样本空间为 S，A，B，$A_k(k=1,2,\cdots)$是 S 的子集.

1. 事件的包含($A\subset B$)：A 发生必然导致 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A，或称事件 A 是 B 的子事件. 对任意事件有：$\varnothing\subset A\subset S$.

2. 事件的相等($A=B$)：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等.

3. 事件的和($A\cup B$)：事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和或并，记作：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

4. 事件的积(交)($A\cap B$，AB)：事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积或交. 记作：$A\cap B$ 或 $AB=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$.

5. 事件的差($A-B$)：事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差. 记作：$A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

6. 事件的互不相容(互斥)：若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件.

7. 对立事件($\overline{A}$)：若事件 A 与事件 B 中必有一个发生且仅有一个发生，即

$$A\cup B=S \text{ 且 } A\cap B=\varnothing$$

则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，或称互为逆事件. A 的对立事件记为$\overline{A}$.

设 A，B，C 为事件，事件的关系与运算满足下列规律：

(1) 交换律：$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) 分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

(4) 差化积：$A-B=A\overline{B}$；

(5) 吸收律：若 $A\subset B$ 则 $A\cup B=B$，$AB=A$；

(6) 德莫根(De Morgan)公式:

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},$$

一般地, 对 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

第二节 随机事件的概率

一、概率的统计定义

1. 频率

在相同的条件下, 进行了 n 次实验, 在这 n 次实验中, 事件 A 发生了 n_A 次, 则称$\frac{n_A}{n}$为事件在 n 次实验中发生的频率, 记为: $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

一般,频率具有下述基本性质:

(1) 非负性: 对任意事件 A 有: $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性: $f_n(S)=1$;

(3) 有限可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件, 则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

2. 概率的统计定义

在大量重复进行同一试验时, 事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 所稳定的常数称为事件 A 的概率, 记为 $P(A)$.

二、概率的公理化定义

设 E 是随机试验, S 是它的样本空间, 对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数, 记为 $P(A)$, 称为事件 A 的概率, 如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件:

(1) 非负性:对任意事件 A, 有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:对必然事件 S, 有 $P(S)=1$;

(3) 可列可加性:若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是两两互不相容的事件, 即对于 $i\neq j$, $A_iA_j=\varnothing$, $i,j=1,2,3,\cdots$, 则有:

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)\cdots+P(A_n)+\cdots.$$

三、概率的性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$;

性质 2 (有限可加性)若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 是两两互不相容的事件, 则有:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

性质 3 (逆事件概率) 对任一事件 A, 有: $P(\overline{A})=1-P(A)$;

性质 4 设 A, B 是两个事件, 若 $A\supset B$, 则有:

$$P(A-B)=P(A)-P(B),\ P(A)\geqslant P(B);$$

性质5（加法公式）对于任意的两个事件 A，B，有：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

一般，对于任意 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，则有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right).$$

第三节　古典概型(等可能概型)

一、等可能试验

若随机试验具有以下两个特征,则称该随机试验为等可能试验:

(1)有限性:它的样本空间的元素只有有限个;

(2)等可能性: 在每次试验中,每个基本事件发生的可能性相同.

二、概率的古典定义

若等可能试验 E 的样本空间 S 由 n 个基本事件构成，每个基本事件是否发生具有相同的可能性，事件 A 由其中 k 个基本事件组成，则

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{S\text{ 所包含的基本事件总数}}.$$

第四节　条件概率及事件的独立性

一、条件概率

设 A，B 是两个事件，且 $P(B)>0$，则称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

条件概率 $P(A|B)$ 符合概率定义中的三个条件，即：

(1) 非负性:对任意的事件 A，有 $P(A|B)\geqslant 0$；

(2) 规范性:对于必然事件 S，有 $P(S|B)=1$；

(3) 可列可加性:设 A_1，A_2，…是两两互不相容的事件，则有：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \,\middle|\, B\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i\mid B).$$

二、乘法定理

设 $P(B)>0$ 或 $P(A)>0$，则有：

$$P(AB)=P(B)P(A|B)\text{或}P(AB)=P(A)P(B|A).$$

一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 为 n 个事件，$n\geqslant 2$，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

(1)互斥事件完备组

设 S 是试验 E 的样本空间，B_1，B_2，…，B_n 为 E 的一组事件，若

1) $B_iB_j=\varnothing$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$；

2) $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=S$；

则称 B_1，B_2，…，B_n 为样本空间 S 的一个划分，或称 B_1，B_2，…，B_n 为互斥事件完备组.

(2)全概率公式

设试验 E 的样本空间为 S，A 为 E 的事件，B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则有：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)P(A|B_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)\end{aligned}$$

2. 贝叶斯公式

若 B_1，B_2，…，B_n 为 S 的一个划分，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=S$，其中 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则对任一事件 A，有：

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

一般地，$P(B_i)$，$(i=1,2,\cdots n)$ 通常称为先验概率，$P(B_i|A)(i=1,2,\cdots,n)$ 通常称为后验概率.

四、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

设 A，B 是两事件，如果满足等式：$P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A，B 相互独立，简称 A，B 独立.

若事件 A，B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

若 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A，B 相互独立与 A，B 互不相容不能同时成立.

2. 多个事件的独立性

设 A，B，C 是三个事件，如果有：

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(BC)=P(B)P(C) \end{cases},$$

则称 A，B，C 两两独立.

若还有 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，则称 A,B,C 相互独立.

一般地，n 个事件 A_1，$A_2,\cdots$，A_n，对任意的 $1\leqslant i<j<k<\cdots\leqslant n$，如果以下等式均成立：

$$\begin{cases} P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j) \\ P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\ \qquad\vdots \\ P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n) \end{cases},$$

则称 $A_1,A_2,\cdots$，A_n 相互独立.

第一章教学基本要求

一、教学基本要求

1. 理解事件的定义，并熟练掌握事件的运算性质；
2. 了解事件频率的概念，理解概率的公理化定义，熟练掌握并能灵活运用概率的性质；
3. 掌握等可能概型中的概率计算方法；
4. 牢固掌握条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式；
5. 理解独立性的概念，并能运用独立性解决某些概率计算问题.

二、教学重点

1. 等可能概型的定义及其计算；
2. 全概率公式与贝叶斯公式的定义及其计算.

三、教学难点

1. 利用已知事件表达某些事件，正确判断试验的概型；
2. 全概率公式与贝叶斯公式的应用与计算.

习题同步解析㊀

A

3. 试判断下列命题是否成立？

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$　　　　不成立

㊀ 此处题号与教材章后习题对应.

(2) 若 $AB \neq \varnothing$ 且 $A \subset C$，则 $BC \neq \varnothing$　　成立

(3) $(A \cup B) - B = A$　　不成立

(4) $(A - B) \cup B = A$　　不成立

通过集合的定义，利用图形做出判断.

4. 设事件 A，B，C 同时发生时，事件 D 一定发生.

试证：$P(D) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2$

解 题意，$ABC \subset D$. 及概率的单调性可知，

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(AB) + P(C) - P(AB \cup C) \\ &\geqslant P(AB) + P(C) - 1 \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) + P(C) - 1 \\ &\geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2, \end{aligned}$$

因此，$P(D) \geqslant P(ABC) \geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2$.　　得证.

5. 100 件产品中有 10 件次品，现从中任取 5 件进行检验，试求所取的 5 件产品中至多有 1 件次品的概率.

解 A：5 件中至多有一件次品；

由古典概型可得，$P(A) = k/n \approx 0.9231$.

6. 从 0，1，2，…，9 十个数中任意取出三个不同的数，试求下列事件的概率：

(1) $A_1 = \{$三个数中不含 0 和 5$\}$；

(2) $A_2 = \{$三个数中不含 0 或 5$\}$；

(3) $A_3 = \{$三个数中含 0 但不含 5$\}$.

解 (1) $k_1 = C_8^3 P(A_1) = k_1/n = 7/15$；

类似可得：

(2) $P(A_2) = 14/15$；

(3) $P(A_3) = 7/30$.

7. 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 到 10 号的纪念章，现任取 3 人记录其纪念章的号码. 试求：

(1) 最小号码为 5 的概率；

(2) 最大号码为 5 的概率.

解 (1) A：三个号码中最小号码为 5.

$$k_1 = C_5^2,\ P(A) = k_1/n = \frac{1}{12};$$

(2) B：三个号码中最大号码为 5.

同(1)类似可得：$P(B) = k_2/n = \frac{1}{20}$.

8. 5 个人在第一层进入十一层的电梯，假如每个人以相同的概率走出任一层（从第二层开始），试求此 5 个人在不同层走出电梯的概率.

解　A：5 个人从不同的层电梯走出，

$$k = \mathrm{P}_{10}^{5},\ P(A) = k/n = 0.3024.$$

9. 将 3 个球随机地放入 4 个盒子中，试求盒子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率.

解　A_i：盒子中球的最大个数为 i，$i=1$，2，3，

则：$P(A_1)=3/8$；$P(A_2)=9/16$；$P(A_3)=1/16$.

10. 设 10 件产品中有 2 件不合格品，现从中取两次，每次任取一件，取后不放回. 试求下列事件的概率：

（1）两次均取到正品；

（2）在第一次取到正品的条件下，第二次取到正品；

（3）第二次取到正品；

（4）两次中恰有一次取到正品；

（5）两次中至少有一次取到正品.

解　A_i：第 i 次抽出的是正品，$i=1$，2，

（1）由古典概型可算得：$P(A_1A_2)=\dfrac{28}{45}$；

（2）由条件概率可算得：$P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\dfrac{7}{9}$；

（3）由全概率公式可算得：$P(A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{4}{5}$；

（4）由概率的性质可算得：$P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=\dfrac{16}{45}$；

（5）由（1）和（4）的结果可知，$P(A_1A_2)+P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=\dfrac{44}{45}$.

11. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随机地拨号，假设拨过了的数字不再重复. 试求下列事件的概率：

（1）拨号不超过 3 次而拨通电话；

（2）若已知最后一个数字是奇数，则拨号不超过 3 次而拨通电话；

（3）第 3 次拨号才接通电话.

解　（1）A_i：第 i 次拨号拨通电话，$i=1$，2，3，

A：拨号不超过 3 次拨通电话，则有 $A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，

由概率性质及乘法定理可算得 $P(A)=\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{3}{10}$；

（2）当已知最后一位是奇数时，所求概率为：$\frac{3}{5}$；

（3）由前面的计算可知，$P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{10}$.

12. 口袋中有 1 个白球，1 个黑球. 现从中任取 1 个，若取出白球，则试验停止；若取出黑球，则把取出的黑球放回口袋的同时，再加入 1 个黑球. 如此下去，直到取出的是白球为止. 试求下列事件的概率：

（1）取到第 n 次，试验没有结束；

（2）取到第 n 次，试验恰好结束.

解 （1）A_i：第 i 次取出白球，$i=1, 2, \cdots, n$,

$$P(\overline{A_n}|\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_{n-1}})=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n+1};$$

（2）$P(A_n|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A_{n-1}})=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+1)}$.

13. 某人掉了一串钥匙，此串钥匙掉在宿舍里、掉在教室里、掉在路上的概率分别为40%，35%和25%，而掉在上述三处被找到的概率分别为 0.8，0.3 和 0.1.

试求：找到此串钥匙的概率.

解 A：找到钥匙.

B_1：钥匙掉在宿舍；B_2：钥匙掉在教室；B_1：钥匙掉在宿舍；

由全概率公式可知，$P(A)=0.45$.

14. 已知男子有 5% 是色盲患者，女子有 0.25% 是色盲患者. 现从男女人数相等的人群中随机地挑选一人，恰好是色盲患者，试问此人是男性的概率有多大?

解 A：选出的是男性；$\overline{A}$：选出的是女性；

H：选出的人是色盲患者；$\overline{H}$：选出的人不是色盲串者；

由贝叶斯公式可知，$P(A|H)=\frac{20}{21}$.

15. 某学生在做一道有 4 个选项的单项选择题时，如果他不知道问题的正确答案时，就作随机猜测. 现从卷面上看此题是解对了. 试在以下情况下求学生确实知道正确答案的概率：

（1）学生知道正确答案和胡乱猜测的概率都是 0.5；

（2）学生知道正确答案的概率都是 0.2.

解 A：此题解对了；$\overline{A}$：此题解错了；

H：学生知道正确解案；$\overline{H}$：学生胡乱猜测的；

(1) 由贝叶斯公式可知，$P(H|A)=\frac{4}{5}$；

(2) 由贝叶斯公式可知，$P(H|A)=\frac{1}{2}$.

16. 有两箱同种类的零件，第一箱装 50 件，其中 10 件是一等品；第二箱装 30 件，其中 18 件是一等品. 现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取一件，作不放回抽样. 试求：

(1) 第一次取到的零件是一等品的概率；

(2) 在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的也是一等品的概率.

解　A_i：第 i 次从箱中取得的是一等品，不放回抽样，$i=1,2$.

H：从第一箱中取零件；$\overline{H}$：从第二箱中取零件；

(1) 由全概率公式，$P(A_1)=P(A_1|H)P(H)+P(A_1|\overline{H})P(\overline{H})=\frac{2}{5}$；

(2) 由全概率公式计算可得，$P(A_1A_2)=0.1942$，

再由(1)的结果可得，$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=0.4856$.

B

17. 将两信息分别编码为 A 和 B 传递出去，接收站收到时，A 被误收作 B 的概率为 0.02，而 B 被误收作 A 的概率为 0.01. 信息 A 与信息 B 传送的频繁程度为 2∶1. 现若接收站收到的信息是 A，试求原发信息是 A 的概率.

解　D：将信息 A 传递出去；$\overline{D}$：将信息 B 传递出去；

R：接收到信息 A；　　$\overline{R}$：接收到信息 B；

由贝叶斯公式得到，$P(D|R)=\frac{196}{197}$.

18. 甲、乙文具盒内都有 2 支蓝色笔和 3 支红色笔. 现从甲文具盒中任取 2 支笔放入乙文具盒，然后再从乙文具盒中任取 2 支笔. 试求：最后取出的 2 支笔都是红色笔的概率.

解　设 A_1：从甲文具盒中取到 2 支蓝色笔；

A_2：从甲文具盒中取到 2 支红色笔；

A_3：从甲文具盒中取到 1 支蓝色笔和 1 支红色笔；

B：从乙文具盒中取到 2 支红色笔；

显然，A_1，A_2，A_3 构成一个互斥事件完备组，且

$P(A_1)=C_2^2/C_5^2=\frac{1}{10}$；$P(A_2)=C_3^2/C_5^2=\frac{3}{10}$；$P(A_3)=C_2^1\cdot C_3^1/C_5^2=\frac{6}{10}$；

$P(B|A_1)=C_3^2/C_7^2=\frac{3}{21}$；$P(B|A_2)=C_5^2/C_7^2=\frac{10}{21}$；$P(B|A_3)=C_4^2/C_7^2=\frac{6}{21}$；